উচ্চ মাধ্যমিক পদার্থবিজ্ঞান প্রথম পত্র

ডঃ আমির হোসেন খান

মোহাম্মদ ইসহাক

আইডিয়াল লাইব্রেরী ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক অনুমোদিত

মুখবন্ধ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ডের নতুন পাঠ্যসূচি অনুযায়ী উচ্চ মাধ্যমিক পদার্থবিজ্ঞান ১ম পত্রের পুস্তকখানি রচিত হয়েছে এবং দেশের প্রখ্যাত কয়েকজন পদার্থবিদের মূল্যায়নের ভিত্তিতে পুস্তকখানি উচ্চ মাধ্যমিক শ্রেণীর পদার্থবিজ্ঞান ১ম পত্র পাঠ্যপুস্তক হিসেবে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক অনুমোদিত হয়েছে। মাধ্যমিক স্তরের পদার্থবিজ্ঞানের সাথে ধারাবাহিকতা রক্ষা করে উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের পাঠ্যসূচিতে অন্তর্ভুক্ত বিষয়গুলোর প্রয়োজনীয় আলোচনা সহজ সরল ভাষায় উপস্থাপন করা হয়েছে। প্রতিটি বিষয় জটিল না করে সহজভাবে আলোচনা করেছি যেন ছাত্রছাত্রীরা বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে অসুবিধার সম্মুখীন না হয়। বিষয়বস্তু বর্ণনা সহজবোধ্য করার জন্য যথেষ্ট সংখ্যক প্রয়োজনীয় চিত্র সংযোজন করেছি। প্রতিটি অধ্যায়ে বিষয়বস্তুর আধুনিক মতবাদ, তত্ত্ব ও তথ্য সমৃদ্ধ করতে আমরা যথেষ্ট সচেষ্ট থেকেছি এবং এজন্য দেশী-বিদেশী অনেক বই-এর সাহায্য নিয়েছি। যে সমস্ত পুস্তকের সাহায্য গ্রহণ করা হয়েছে সে সমস্ত পুস্তকের লেখক এবং প্রকাশকদের কাছে আমরা কৃতজ্ঞ ও ঋণী।

পুস্তকখানিতে এস. আই. পদ্ধতির একক সর্বত্র ব্যবহার করা হয়েছে। প্রচলিত এবং বহুলভাবে ব্যবহৃত পরিভাষা ব্যবহারের চেষ্টা করা হয়েছে। উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের উপরের স্তরে বিজ্ঞান বিষয়ক প্রায় পুস্তকই ইংরেজিতে লেখা; তাই বিভিন্ন রাশির ইংরেজি প্রতিশব্দ জানা থাকলে বিষয়বস্তু বুঝতে সুবিধা হবে বিবেচনায় বাংলার পাশাপাশি ইংরেজি প্রতিশব্দ সংযুক্ত করা হয়েছে।

পুস্তকখানি নির্ভুলভাবে মুদ্রণের চেষ্টা নেয়া হয়েছে। তবুও ভুল থাকা অস্বাভাবিক নয়। যদি দৈবাৎ কোথাও মুদ্রণ ত্রুটি দৃষ্টিগোচর হয় তা জানালে কৃতার্থ হব। পুস্তকের শ্রীবৃদ্ধি ও মান উন্নয়নের ব্যাপারে যে কোন পরামর্শ এবং গঠনমূলক সমালোচনা সাদরে গৃহীত হবে এবং তা পরবর্তী সংস্করণে সন্নিবেশিত করা হবে।

এ পুস্তক রচনায় যাঁরা আমাদেরকে বিভিন্নভাবে সাহায্য সহযোগিতা করেছেন তাঁদেরকে ধন্যবাদ জানাচ্ছি। যাদের উদ্দেশ্যে বইখানি রচিত তাদের যদি কাজে লাগে তবেই আমাদের পরিশ্রম সার্থক হয়েছে বিবেচনা করব।

ডঃ আমির হোসেন খান
প্রফেসর মোহাম্মদ ইস্‌হাক

পাঠ্যসূচি

পদার্থবিজ্ঞান—প্রথম পত্র

১। ভেক্টর

সাধারণ ধর্ম ঃ একক ভেক্টর ও উপাংশ, রৈখিক সমন্বয় ও লব্ধি, স্কেলার ও ভেক্টর গুণফল, ভেক্টরের সময় সাপেক্ষ ব্যবকলন।

২। রৈখিক গতি

একমাত্রীয় গতির রেখচিত্র বিবরণ, দ্রুতি ও সরণ, তাৎক্ষণিক দ্রুতি (ব্যবকলনের সাহায্যে), গতির সমীকরণ, সুষম ত্বরণের ক্ষেত্রে গতি সমীকরণের সমাধান, পড়ন্ত বস্তুর গতি।

৩। দ্বিমাত্রিক গতি

সরণ, বেগ ও ত্বরণের ভেক্টর রূপ, গতি সমীকরণের ভেক্টর রূপ ও সমাধান (সুষম ত্বরণ), নিক্ষিপ্ত বস্তুর দ্বিমাত্রিক গতি, বৃত্তীয় গতি, কৌণিক ও রৈখিক বেগের সম্পর্ক (ভেক্টর দ্বারা), কৌণিক ত্বরণ; কেন্দ্রমুখী ত্বরণ।

৪। গতি সূত্র

জড়তা ও বল, চার প্রকার মৌলিক বল, নিউটনের প্রথম গতিসূত্র; ভরবেগ; নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র (ভেক্টর দ্বারা), ঘাতবল; নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র; ভরবেগের সংরক্ষণ (ভেক্টর দ্বারা), রকেটের গতি, বলের ভারসাম্য, ঘর্ষণ বল ও ঘর্ষণ গুণাঙ্ক।

৫। কৌণিক গতিসূত্র

কৌণিক ভরবেগ, টর্ক, কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্র, কেন্দ্রমুখী বল, যানবাহন ও রাস্তার বাঁক, জড়তার ভ্রামক, চক্রগতির ব্যাসার্ধ, সমান্তরাল ও অভিলম্ব অক্ষ উপপাদ্য।

৬। কাজ, শক্তি ও ক্ষমতা

কাজের সংজ্ঞা (ভেক্টর ও সমাকলনের সাহায্যে), গতিশক্তি ও কাজ-শক্তি উপপাদ্য (ধ্রুব বল), স্থিতিশক্তি, শক্তির নিত্যতা, ক্ষমতা।

৭। মহাকর্ষ

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র, ‘G’-এর মান নির্ণয়; অভিকর্ষজ ত্বরণ ‘g’-এর তারতম্য, অভিকর্ষ কেন্দ্র, কৃত্রিম ও ভূ-স্থির উপগ্রহ, মহাকর্ষীয় বিভব, মুক্তিবেগ, কেপলারের সূত্র।

৮। সরল ছন্দিত স্পন্দন

সংজ্ঞা, ব্যবকলনীয় সমীকরণ ও সমাধান (শুধু উল্লেখ), স্থিতি ও গতিশক্তির পরিবর্তন (রেখ), স্প্রিংজনিত স্পন্দন, সরল দোলক ও তার পর্যায়কাল, দোলকের সাহায্যে ‘g’ নির্ণয়।

৯। স্থিতিস্থাপকতা

আন্তঃআণবিক বলের ধারণা, স্থিতিস্থাপকতা ও হুকের সূত্র, স্থিতিস্থাপকতার গুণাঙ্কবলি ও পয়সনের অনুপাত, ইয়াং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয়; স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি।

১০। প্রবাহী পদার্থ

পৃষ্ঠটান (আণবিক তত্ত্ব), স্পর্শকোণ, কৈশিক নলের সাহায্যে পৃষ্ঠটান নির্ণয়; সান্দ্রতা, স্টোকসের সূত্র, পৃষ্ঠটান ও সান্দ্রতার ওপর তাপমাত্রার প্রভাব।

১১। তাপ ও গ্যাস

বয়েলের ও চার্লসের সূত্র, আদর্শ গ্যাস সমীকরণ, গ্যাসের অণুর গতি বণ্টন সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা, মূল গড় বর্গ বেগ, চাপ ও তাপমাত্রার সঙ্গে অণুর গতিবেগের সম্পর্ক, গড় মুক্ত পথ, সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্পীয় চাপ, আর্দ্রতামিতি।

১২। তাপমাত্রা

তাপমাত্রার নির্দিষ্ট বিন্দু, স্কেল, ত্রৈধ বিন্দু, পরম তাপমাত্রা, পারদ থার্মোমিটার, থার্মোকাপল, থার্মিস্টর ও পাইরোমিটার।

১৩। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র

তাপ ও অভ্যন্তরীণ শক্তি, রুদ্ধতাপ ও সমোষ্ণ প্রসারণ ও সঙ্কোচন, তাপ গতিবিদ্যার প্রথম সূত্র (গাণিতিক), আপেক্ষিক তাপ, C_p, C_v ও γ, রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় $PV =$ ধ্রুবক, তাপীয় সমতা।

১৪। তাপ বিকিরণ

কৃষ্ণবস্তুর বিকিরণ, উইনের সরণ সূত্র, স্টেফানের সূত্র, নিউটনের শীতলীকরণের সূত্র, তরলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়।

১৫। অবস্থার পরিবর্তন

অবস্থা ও দশা, গলন ও বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ, দশা চিত্র, পানির ত্রৈধ বিন্দু, সুপ্ত তাপ নির্ণয়।

১৬। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র

প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া, দ্বিতীয় সূত্রের গুণগত ধারণা, ইঞ্জিনের দক্ষতা।

১৭। তরঙ্গ ও শব্দ

তরঙ্গের সাধারণ বৈশিষ্ট্য, বিস্তার, তরঙ্গ দৈর্ঘ্য, স্পন্দন সংখ্যা, দশা, তীব্রতা, আড় ও অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ, উপরিপাতন ও ব্যতিচার, অগ্রগামী ও স্থির তরঙ্গ।

১৮। শব্দ

তীব্রতার লগস্কেল (ডেসিবেল), স্বরগ্রাম ও হারমোনিকস্, বীট, টানা তারের কম্পনসূত্র, অনুনাদ, সঙ্গীত ও শব্দ যন্ত্র।

১৯। শব্দের গতিবেগ

স্থিতিস্থাপকতা ও শব্দের গতিবেগের সম্পর্ক, শব্দের বেগের ওপর তাপমাত্রা ও আর্দ্রতার প্রভাব (গাণিতিক), বায়ু স্তম্ভের সাহায্যে গতিবেগ নির্ণয়, ডপলার ক্রিয়া (গাণিতিক)।

মান বণ্টন

তত্ত্বীয় = ৭৫

রচনামূলক প্রশ্ন	৩টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে	৩ × ১৫ = ৪৫
সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন	৬টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে	৬ × ৫ = ৩০
		মোট = ৭৫

প্রশ্নপত্র প্রণয়নের নীতিমালা ঃ

তত্ত্বীয় রচনামূলক অংশে প্রতিটি প্রশ্নে একাধিক অংশ থাকতে পারে। সকল প্রশ্নের বিকল্প (অথবা) প্রশ্ন থাকবে। প্রতিটি বিভাগ যেমন বলবিদ্যা, তাপ ও শব্দ থেকে কমপক্ষে ১টি প্রশ্ন থাকবে।

সূচিপত্র

১৪. তাপ বিকিরণ — ৪১৪–৪৩২
HEAT RADIATION

১৫. অবস্থার পরিবর্তন — ৪৩৩–৪৫৭
CHANGE OF STATE

১৬. তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র — ৪৫৮–৪৭৪
SECOND LAW OF THERMODYNAMICS

১৯. শব্দের গতিবেগ — ৫৪৫–৫৬৮
VELOCITY OF SOUND

ব্যবহারিক

অবতারণা — ৩–১৪

১

ভেক্টর

VECTOR

১·১ সূচনা

Introduction

বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয় সুনির্দিষ্টভাবে জানতে হলে কোন না কোন ধরনের পরিমাপের প্রয়োজন হয়। পদার্থের যে সব ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিমাপ করা যায় তাদেরকে রাশি (quantity) বলে। যেমন, দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, আয়তন, বেগ, কাজ ইত্যাদি প্রত্যেকে এক একটি রাশি। **পদার্থবিজ্ঞানের অন্তর্গত যে কোন রাশিকে ভৌত (physical) রাশি বলে।**

কিছু কিছু ভৌত রাশিকে শুধুমাত্র মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার অনেক ভৌত রাশি রয়েছে যাদেরকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয়। তাই ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য অনুসারে ভৌত রাশিগুলোকে আমরা দুই ভাগে বিভক্ত করতে পারি ; যথা—

(ক) **স্কেলার রাশি** বা **অদিক রাশি** (Scalar quantity)।

(খ) **ভেক্টর রাশি** বা **দিক রাশি** বা **সদিক রাশি** (Vector quantity)।

স্কেলার রাশি ঃ যে সব ভৌত রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, জনসংখ্যা, তাপমাত্রা, তাপ, বৈদ্যুতিক বিভব, দ্রুতি, কাজ ইত্যাদি স্কেলার বা অদিক রাশি।

V.V. **ভেক্টর রাশি ঃ যে সব ভৌত রাশির মান এবং দিক দুই-ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলে।** যেমন সরণ, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, বল, ওজন ইত্যাদি ভেক্টর বা দিক রাশি।

১·২ ভেক্টর রাশির নির্দেশনা

Representation of a vector

কোন একটি ভেক্টর রাশিকে দুভাবে প্রকাশ করা হয়ে থাকে, যথা—(১) **অক্ষর দ্বারা** এবং (২) **সরলরেখা দ্বারা**।

১। **অক্ষর দ্বারা** কোন একটি ভেক্টর রাশিকে **চারভাবে** প্রকাশ করা হয়, যথা—

(ক) কোন অক্ষরের উপর তীর চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়। সাধারণভাবে শুধু অক্ষর দ্বারাও রাশিটির মান নির্দেশ করা হয়।

A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\vec{A}$ এবং মান রূপ $|\vec{A}|$ বা A

(খ) কোন অক্ষরের উপর রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখ দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\bar{A}$ এবং মান রূপ $|\bar{A}|$।

(গ) কোন অক্ষরের নিচে রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখ দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

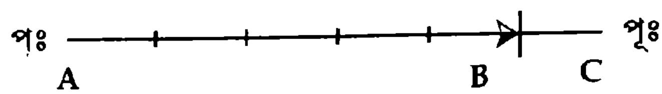
A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\underline{A}$ এবং মান রূপ $|\underline{A}|$

(ঘ) মোটা হরফের অক্ষর দিয়ে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়। যেমন A অক্ষরের ভেক্টর রূপ **A** এবং এর মান A।

ভেক্টর রাশি নির্দেশের ক্ষেত্রে (ক)-এ ব্যবহৃত চিহ্নই শ্রেয়। তাই এই বই-এ আমরা এই পদ্ধতিই ব্যবহার করব।

২। সরলরেখা দ্বারা ভেক্টর রাশি নির্দেশ করতে হলে রাশিটির দিকে বা সমান্তরালে একটি সরলরেখা অংকন করে সরলরেখাটির শেষ প্রান্তে একটি তীর চিহ্ন দ্বারা রাশিটির দিক এবং কোন স্কেলে উক্ত সরলরেখাটির দৈর্ঘ্য দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়। এ পদ্ধতিকে জ্যামিতিক উপায়ে ভেক্টরের নির্দেশনাও বলে।

মনে করি, একটি ভেক্টর রাশির মান 5 এবং এর দিক পূর্ব দিক। একে সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করতে হবে। এখন AC একটি সরলরেখা পূর্ব-পশ্চিম দিক বরাবর অংকন করে AC সরলরেখা হতে সুবিধামত দৈর্ঘ্যকে একক ধরে এর 5 গুণ দৈর্ঘ্য AB কেটে নিই এবং AB-এর শেষ প্রান্তে পূর্ব দিকে তীর চিহ্ন যুক্ত করি [চিত্র ১.১]। এই তীর চিহ্নিত সরলরেখাই ভেক্টর রাশিটি নির্দেশ করবে। ভেক্টর রাশি নির্দেশী সরলরেখার তীর চিহ্নিত প্রান্ত B-কে **শীর্ষবিন্দু** বা **অন্ত বিন্দু** এবং অপর প্রান্ত A-কে **আদিবিন্দু** বা **মূলবিন্দু** বা **পাদবিন্দু** বলে।



চিত্র ১.১

১.৩ ভেক্টর রাশি সম্পর্কিত কতকগুলো সংজ্ঞা
Some definitions relating vectors

১। একক ভেক্টর (Unit vector) ঃ যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে। মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে বা সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যাবে।

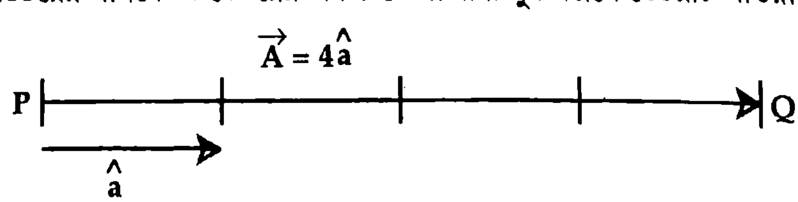
একক ভেক্টরকে প্রকাশ করতে সাধারণত ছোট অক্ষরের উপর একটি টুপি চিহ্ন (^) দেয়া হয়। যেমন $\hat{i}$, $\hat{a}$, $\hat{n}$ ইত্যাদি দ্বারা একক ভেক্টর প্রকাশ করা হয়।

ধরি, $\vec{A}$ একটি ভেক্টর যার মান, $A \neq 0$

$\frac{\vec{A}}{A} = \vec{A}$**-এর দিকে একক ভেক্টর**

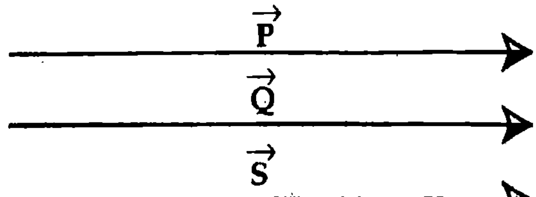
$= \hat{a}$ (ধরি)।

কাজেই কোন একটি ভেক্টর $\vec{A}$-এর মান, $A = 4$ একক এবং $\vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, $\vec{A} = 4\hat{a}$ [চিত্র ১.২]। অর্থাৎ কোন ভেক্টরের মানকে ঐ ভেক্টরের একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে ভেক্টরটি পাওয়া যায়।



চিত্র ১.২

২। সম-ভেক্টর বা সমান ভেক্টর (Equal vector) ঃ একই দিকে ক্রিয়ারত একাধিক সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে সম-ভেক্টর বা সমান ভেক্টর বলে। পাদবিন্দু বা আদিবিন্দু যেখানেই হোক না কেন ভেক্টরগুলো পরস্পরের সমান্তরাল এবং মান সমান হলে তাদেরকে সম-ভেক্টর বলে।



চিত্র ১.৩

১.৩ চিত্রে P, Q ও S তিনটি সম-ভেক্টর।

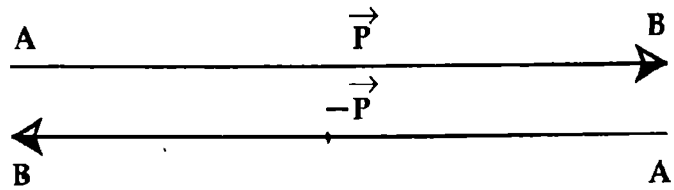
এখানে $\vec{P} = \vec{Q} = \vec{S}$ ও $P = Q = S$

৩। বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর (Negative vector) ঃ বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে একে অপরের বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর বলে।

১'৪ চিত্রে $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{P}$

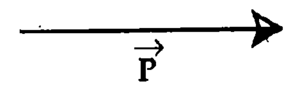
এর বিপরীত ভেক্টর $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{P}$

এখানে, AB = BA



চিত্র ১'৪

৪। স্বাধীন ভেক্টর (Free vector) ঃ কোন ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু কোথায় হবে তা যদি ইচ্ছেমত ঠিক করা যায়, তবে ঐ ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলা হয়। [চিত্র ১'৫-এ $\overrightarrow{P}$ একটি স্বাধীন ভেক্টর।]



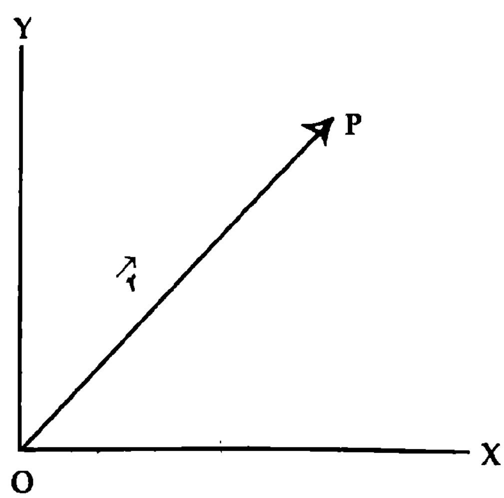
চিত্র ১'৫

৫। সীমাবদ্ধ ভেক্টর (Localised vector) ঃ যদি কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে ভেক্টরের পাদবিন্দু হিসেবে ঠিক করে রাখা হয়, তবে তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে।

৬। অবস্থান ভেক্টর (Position vector) ঃ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

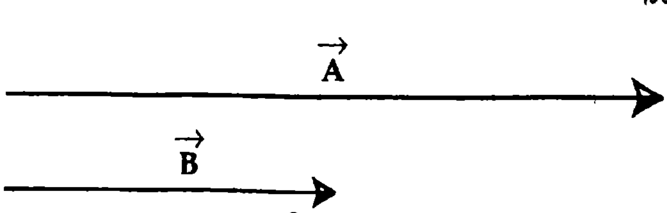
মনে করি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত X ও Y দুটি অক্ষ, এদের মূল বিন্দু O। P যে কোন একটি বিন্দু। এখানে $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করছে। সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর [চিত্র ১'৬]।

অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় **ব্যাসার্ধ ভেক্টর** (radius vector) বলে এবং $\overrightarrow{r}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $OP = \overrightarrow{r}$ ।



চিত্র ১'৬

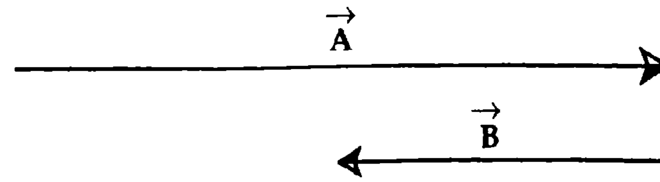
৭। সদৃশ ভেক্টর (Like vector) ঃ সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর $\overrightarrow{A}$ ও $\overrightarrow{B}$ যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে [চিত্র ১'৭]। উদাহরণ, $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{B}$



চিত্র ১'৭

৮। বিসদৃশ ভেক্টর (Unlike vector) : সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যদি বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে, তবে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে [চিত্র ১.৮]।

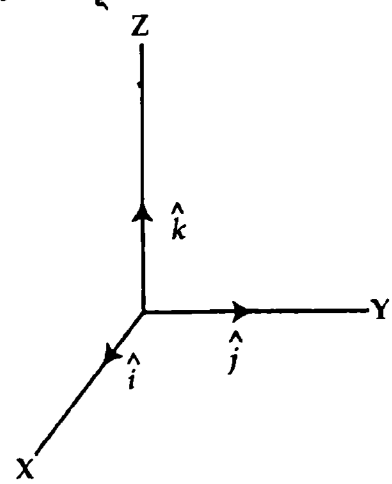
উদাহরণ, $\vec{A} = -3\vec{B}$



চিত্র ১.৮

৯। নাল বা শূন্য ভেক্টর (Null or Zero vector) : যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য, তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু একই। একে 0 দ্বারা সূচিত করা হয়।

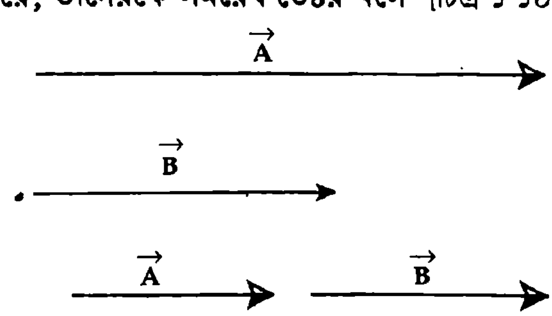
১০। আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর (Rectangular unit vector) : ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর বলে।



চিত্র ১.৯

১১। বিপ্রতীপ ভেক্টর (Reciprocal vector) : দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে। উদাহরণ, $\vec{A} = 5\,\hat{i}$ ও $\vec{B} = \frac{1}{5}\,\hat{i}$ । এখানে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিপ্রতীপ ভেক্টর।

১২। সমরেখ ভেক্টর (Co-linear vector) : দুই বা ততোধিক ভেক্টর এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে, তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে [চিত্র ১.১০]।

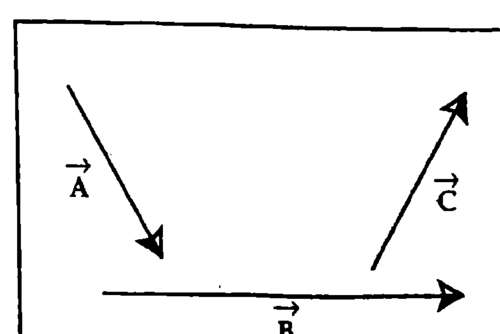


চিত্র ১.১০

১৩। সম-তলীয় ভেক্টর (Co-planar vector) : দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সম-তলীয় ভেক্টর বলে [চিত্র ১.১১]।

১৪। সঠিক ভেক্টর (Proper vector) : যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয়, তাদেরকে সঠিক ভেক্টর বলে।

১৫। সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর (Co-initial vector): একই মূল বা পাদবিন্দুবিশিষ্ট ভেক্টরসমূহকে সম-প্রারম্ভিক ভেক্টর বলে।



চিত্র ১.১১

১·৪ ভেক্টর রাশির যোগ ও বিয়োগ
Addition and subtraction of vectors

জ্যামিতিক পদ্ধতি ঃ একই জাতীয় দুটি ভেক্টর রাশিকে যোগ বা বিয়োগ করা যায়। যেমন সরণের সাথে কেবল সরণই যোগ বা বিয়োগ করা চলে। সরণের সাথে বেগের যোগ বা বিয়োগের প্রশ্নই ওঠে না। **ভেক্টর রাশির মান ও দিক দুই-ই আছে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ সাধারণ বীজগণিতের নিয়মানুযায়ী করা হয় না। ভেক্টর রাশির দিকই এ সব ক্ষেত্রে বিঘ্ন ঘটায়।** যেমন ধরা যাক, একটি নৌকায় দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার এবং একটি নদীর পানির স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার। নৌকাটিকে ঐ নদীর এক পাড় হতে সোজা অপর পাড়ের দিকে চালালে, নৌকাটির উপর যে দুটি বেগ ক্রিয়া করবে এদের যোগফল (8 + 6) = 14 কিলোমিটার / ঘণ্টা দ্বারা নৌকাটির প্রকৃত বেগ পাওয়া যাবে না—প্রকৃত বেগ সম্পূর্ণ আলাদা হবে। আবার নৌকাটির গতিমুখ ঐ দুই বেগের মাঝামাঝি কোন এক দিকে হবে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ জ্যামিতিক পদ্ধতি অনুসারে করতে হয়।

একই অভিমুখী দুটি ভেক্টর রাশি যোগ করতে হলে রাশি দুটিকে একই দিকে নির্দেশ করতে হয়, আর বিয়োগ করতে হলে একটি ভেক্টর রাশিকে অপরটির বিপরীত দিকে নির্দেশ করতে হয়। কিন্তু দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এদের যোগফল আর একটি নতুন ভেক্টর রাশি হবে। দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগে যে একটি নতুন ভেক্টর রাশি হয় তাকে এদের **লব্ধি** (Resultant) বলে। অর্থাৎ লব্ধি হল ভেক্টর রাশিগুলোর সম্মিলিত ফল।

১·৫ ভেক্টর রাশির যোগ

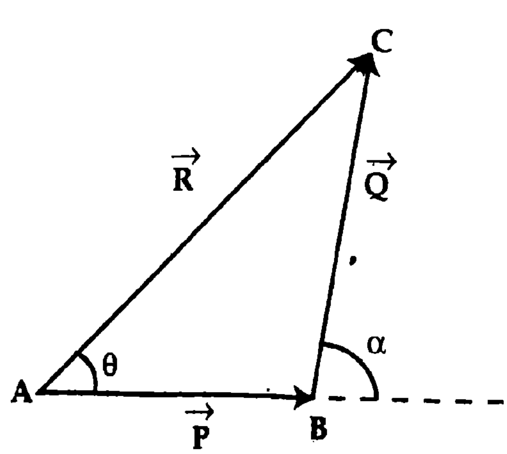
জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগ নিম্নলিখিত পাঁচটি সূত্রের সাহায্যে করা যায় ; যথা—

(১) **সাধারণ সূত্র** (General law)
(২) **ত্রিভুজ সূত্র** (Law of triangle)
(৩) **বহুভুজ সূত্র** (Law of polygon)
(৪) **সামান্তরিক সূত্র** (Law of parallelogram) এবং
(৫) **উপাংশ সূত্র** (Law of components)।

এই অনুচ্ছেদে প্রথম চারটি সূত্র আলোচনা করা হল ঃ

১·৫·১ সাধারণ সূত্র

সূত্র ঃ সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষ বা শেষবিন্দু এবং দ্বিতীয়টির আদি বিন্দু একই বিন্দুতে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু ও দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখার দিকে লব্ধি ভেক্টরের দিক এবং ঐ সরলরেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্দেশ করবে।



চিত্র ১·১২

ধরা যাক একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্ণয় করতে হবে।

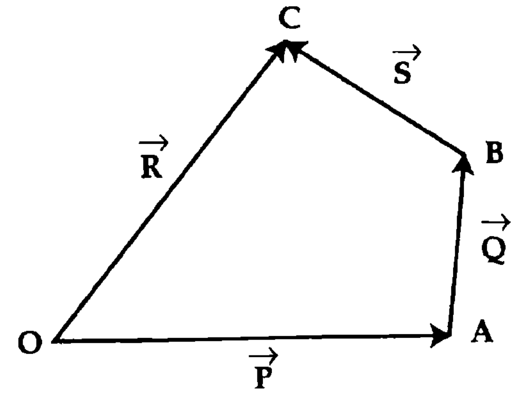
$\vec{P}$ নির্দেশী সরলরেখা AB-এর শীর্ষবিন্দু B-তে $\vec{Q}$ নির্দেশী সরলরেখার আদিবিন্দু থাকে। এরূপে BC রেখা দ্বারা $\vec{Q}$ নির্দেশ করে $\vec{P}$-এর আদিবিন্দু A এবং $\vec{Q}$-এর শীর্ষবিন্দু C যুক্ত করি এবং রেখাটিকে A হতে C অভিমুখে তীর চিহ্নিত করি [চিত্র ১·১২]। তা হলে তীর চিহ্নিত AC রেখাই $\vec{R}$ নির্দেশ করবে। এখানে রাশি দুটির যোগফল নিম্ন উপায়ে লেখা হয়—

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \qquad (1)$$

অনুরূপে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগ করা যায়।

১.১৩ চিত্রে তিনটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{S}$ যথাক্রমে তীর চিহ্নিত OA, AB ও BC সরলরেখায় নির্দেশ করে OC সরলরেখা দ্বারা এদের লব্ধি $\vec{R}$ সূচিত হয়েছে।

এখানে লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$।

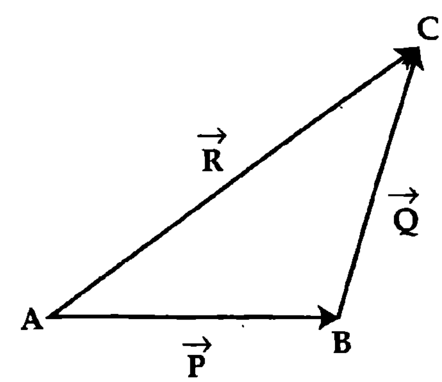


চিত্র ১.১৩

১.৫.২ ত্রিভুজ সূত্র

সূত্র ঃ দুটি ভেক্টর কোন ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর যোগ করতে হবে। প্রথমে $\vec{P}$-এর প্রান্ত বা শীর্ষবিন্দুর সাথে $\vec{Q}$-এর আদি বিন্দু যুক্ত করে ভেক্টর দুটি মানে ও দিকে বাহু AB ও BC দ্বারা সূচিত করা হল। এখন $\vec{P}$-এর আদি বিন্দু ও $\vec{Q}$-এর শেষ বিন্দু যোগ করে ABC ত্রিভুজটি সম্পূর্ণ করা হল। AC বাহুটিই দিকে ও মানে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ নির্দেশ করে [চিত্র ১.১৪]।



চিত্র ১.১৪

অর্থাৎ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ (2)

পুনঃ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = -\vec{CA}$ [$\because \vec{AC} = -\vec{CA}$]

বা, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ (3)

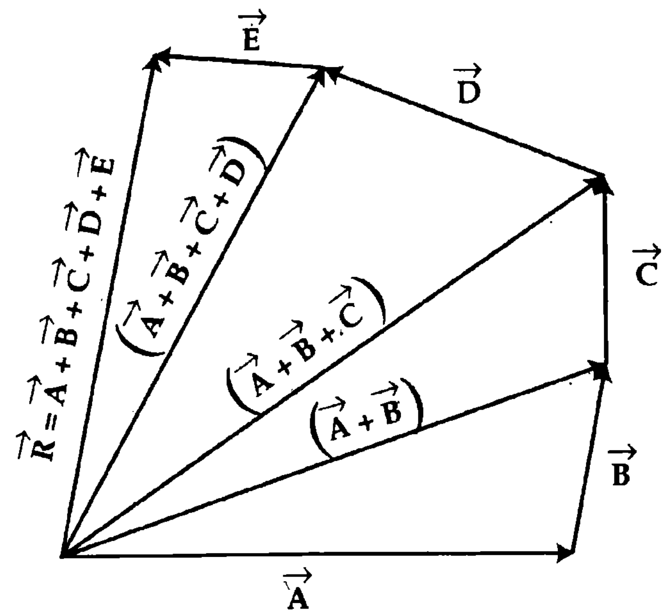
সিদ্ধান্ত ঃ অতএব, একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় সমতলীয় ভেক্টর রাশিকে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হবে।

১.৫.৩ বহুভুজ সূত্র

সূত্র ঃ দুই-এর অধিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ভেক্টর রাশিগুলোকে একই ক্রমে সাজিয়ে প্রথম ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দু যোগ করলে যে বহুভুজ পাওয়া যায় এর শেষ বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ পাঁচটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ১.১৫। এদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে। এখন প্রথম ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর উপর দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর উপর তৃতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু স্থাপন করি এবং এমনিভাবে ভেক্টর রাশিগুলোকে পর পর স্থাপন করি। তাহলে বহুভুজ সূত্রানুসারে প্রথম ভেক্টর রাশির আদি বিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর সংযোজক ভেক্টর রাশি $\vec{R}$-ই উল্লিখিত ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।

লব্ধি, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$



চিত্র ১.১৫

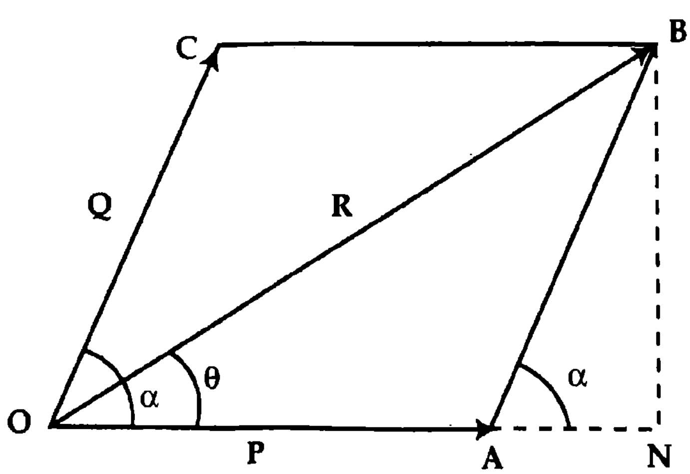
১.৫.৪ সামান্তরিক সূত্র

সূত্র : কোন সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে, তা হলে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যা : মনে করি O বিন্দুতে একটি কণার উপর $\vec{OA} = \vec{P}$ ও $\vec{OC} = \vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি একই সময়ে α কোণে ক্রিয়া করছে [চিত্র ১.১৬। OA ও OC-কে সন্নিহিত বাহু ধরে OABC সামন্তরিকটি অংকন করি এবং OB যুক্ত করি। এই সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়াবিন্দু O থেকে অংকিত কর্ণ $\vec{OB}$-ই ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করে।

অর্থাৎ, $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$



চিত্র ১.১৬

লব্ধির মান নির্ণয় :

মনে করি লব্ধির মান R এবং $\angle AOC = \alpha$ কোণটি সূক্ষ্মকোণ। এখন B বিন্দু হতে OA-এর বর্ধিত অংশের উপর BN লম্ব টানি যা বর্ধিত OA বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করল।

AB ও OC সমান্তরাল।

$\angle AOC = \angle BAN = \alpha$। আবার OBN ত্রিভুজের, $\angle ONB$ = এক সমকোণ $= 90°$।

$$OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$

আবার, BNA সমকোণী ত্রিভুজে, $AB^2 = AN^2 + BN^2$

বা, $OC^2 = AN^2 + BN^2$ [$\because AB = OC$]

এখন ত্রিকোণমিতির সাহায্যে আমরা পাই, $\cos \angle BAN = \cos \alpha = \frac{AN}{AB}$

$$AN = AB \cos \alpha = OC \cos \alpha$$

সুতরাং $OB^2 = OA^2 + AB^2 + 2OA \cdot AB \cos \alpha$ [$\because AB^2 = AN^2 + BN^2$]

বা, $OB^2 = OA^2 + OC^2 + 2OA \cdot OC \cos \alpha$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \qquad (4)$$

লব্ধির দিক নির্ণয় ঃ

মনে করি P-এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে লব্ধি R ক্রিয়া করছে, অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$।

সুতরাং OBN সমকোণী ত্রিভুজে,

$$\tan \theta = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{(OA + AN)}$$

BAN সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin \alpha = \frac{BN}{AB}$

$BN = AB \sin \alpha$

$$= \frac{AB \sin \alpha}{(OA + AB \cos \alpha)} = \frac{Q \sin \alpha}{(P + Q \cos \alpha)} \qquad (5)$$

সমীকরণ (4) এবং সমীকরণ (5) হতে যথাক্রমে R এবং θ পাওয়া যায়।

বিশেষ ক্ষেত্র (Special cases) ঃ

(i) $\alpha = 0°$ হলে, অর্থাৎ ভেক্টর দুটি একই দিকে ক্রিয়া করলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 0° = P^2 + Q^2 + 2PQ$ [$\because \cos 0° = 1$]

$= (P + Q)^2$

$\boxed{\therefore R = P + Q}$

এবং $\tan \theta = \frac{Q \sin 0°}{P + Q \cos 0°} = 0$ [$\because \sin 0° = 0$]

$\theta = 0°$

সুতরাং, দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল এবং দিক হবে ভেক্টরদ্বয় যেদিকে ক্রিয়া করে সেদিকে।

(ii) $\alpha = 90°$ হলে, অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 90° = P^2 + Q^2$ [$\because \cos 90° = 0$]

বা, $\boxed{R = \sqrt{P^2 + Q^2}}$

এবং $\tan \theta = \frac{Q \sin 90°}{P + Q \cos 90°} = \frac{Q}{P}$

$\boxed{\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q}{P}\right)}$

(iii) $\alpha = 180°$ হলে, অর্থাৎ ভেক্টর দুটি বিপরীতমুখী হলে,

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos 180° = P^2 + Q^2 - 2PQ$ [$\because \cos 180° = -1$]

$= (P \sim Q)^2$

$\boxed{\therefore R = P \sim Q}$

এবং $\tan \delta = \frac{Q \sin 180°}{P + Q \cos 180°} = \frac{0}{P - Q} = 0$ [$\because \sin 180° = 0$]

$\theta = 0$

অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী হলে তাদের লব্ধির মান হবে ভেক্টর দুটির বিয়োগফল এবং দিক হবে বৃহত্তর ভেক্টরটির দিকে। ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখী হলে, সেক্ষেত্রে লব্ধি শূন্য হবে।

লব্ধির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান (Maximum and minimum value of the resultant)

মনে করি দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ একই সময়ে কোন বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়া করছে। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুসারে এদের লব্ধির মান $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

(ক) উপরোক্ত সমীকরণ হতে বলা যায় লব্ধি $\vec{R}$-এর মান $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণের উপর নির্ভর করে। $\vec{R}$-এর মান সর্বাধিক হবে যখন $\cos\alpha$-এর মান সর্বাধিক হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = 1 = \cos 0^\circ$

বা, $\alpha = 0^\circ$ হবে

∴ লব্ধির সর্বোচ্চ মান

$$R_{(\text{সর্বোচ্চ})} = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0^\circ}$$

$$= \sqrt{(P+Q)^2} = (P+Q) \qquad (6)$$

অতএব, **দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর একই দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে এবং এই সর্বোচ্চ মান ভেক্টর রাশি দুটির যোগফলের সমান হবে।** অন্যভাবে বলা যায়, দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির মান এদের যোগফল অপেক্ষা বড় হতে পারে না।

(খ) লব্ধি R-এর সর্বনিম্ন মান হবে যখন $\cos\alpha$-এর মান সর্বনিম্ন হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = -1 = \cos 180^\circ$ বা, $\alpha = 180^\circ$ হবে।

লব্ধির সর্বনিম্ন মান,

$$\boxed{R_{(\text{সর্বনিম্ন})}} = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = \sqrt{(P \sim Q)^2} = \boxed{P \sim Q} \qquad (7)$$

অতএব, **দুটি ভেক্টর রাশি যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হবে এবং লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টর রাশি দুটির বিয়োগফলের সমান হবে।** সুতরাং বলা যায়, দুটি ভেক্টর রাশির সর্বনিম্ন মান এদের বিয়োগফল অপেক্ষা ছোট হতে পারে না। এখানে উল্লেখ্য যে (7)নং সমীকরণে ~ চিহ্নটি P এবং Q-এর মধ্যে বিয়োগফল নির্দেশ করে, তবে P এবং Q এদের মধ্যে যেটি বড় সেটি আগে লিখতে হবে অর্থাৎ Q যদি P অপেক্ষা বড় হয় তবে $P \sim Q = Q - P$

১·৬ ভেক্টরের বিয়োগ

Subtraction of vectors

দুটি ভেক্টর রাশির বিয়োগ বলতে একটি ভেক্টরের সাথে অপরটির ঋণাত্মক ভেক্টরের যোগফল বুঝায়।

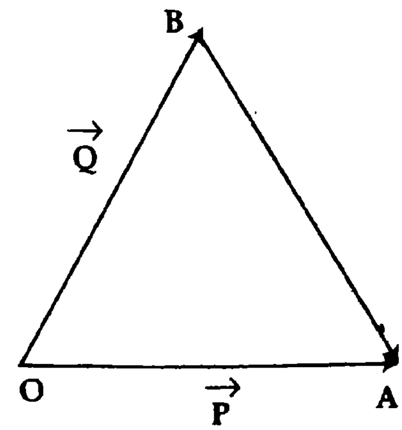
$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির বিয়োগফল $\vec{C}$ হলে দেখা যায়, $\vec{C} = \vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q})$

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র, সামান্তরিক সূত্র ও বহুভুজ সূত্র প্রভৃতি ভেক্টরের বিয়োগের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

(ক) ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে ভেক্টরের বিয়োগফল নির্ণয় :

ধরা যাক $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির বিয়োগফল নির্ণয় করতে হবে। প্রথমে ভেক্টর দুটিকে মান ও দিকে অপরিবর্তিত রেখে একই আদি বিন্দু হতে OA ও OB অঙ্কন করতে হয় [চিত্র ১.১৭]। এরপর $\vec{Q}$-এর প্রান্ত বিন্দু B-এর সাথে $\vec{P}$-এর প্রান্ত বিন্দু A যোগ করলে $\vec{BA}$-ই মানে ও দিকে $\vec{P} - \vec{Q}$ ভেক্টরকে সূচিত করে।

অতএব, $\vec{BA} = \vec{P} - \vec{Q}$



চিত্র ১.১৭

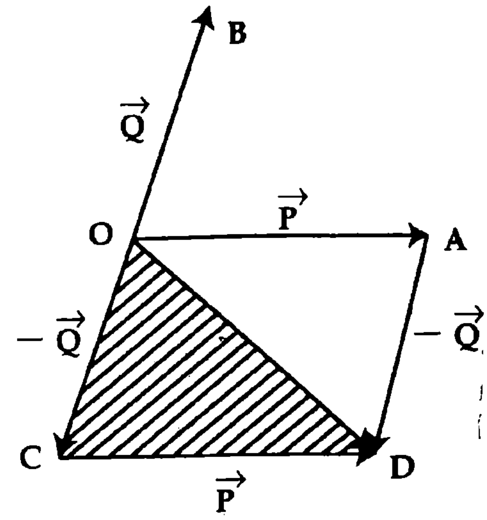
(খ) সামান্তরিকের সূত্রের সাহায্যে ভেক্টরের বিয়োগফল নির্ণয় :

ধরা যাক $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটিকে একই আদি বিন্দু হতে উপযুক্ত বাহু দ্বারা সূচিত করতে হয় [চিত্র ১.১৮]। এরপর $\vec{Q}$-এর সমান অথচ বিপরীতমুখী বাহু দ্বারা $-\vec{Q}$-কে নির্দেশ করা হয়।

এখন OA ও OC-কে সন্নিহিত বাহু ধরে OADC সামান্তরিক অঙ্কন করলে কর্ণ $\vec{OD}$ উক্ত ভেক্টর দুটির বিয়োগফল নির্দেশ করে।

অর্থাৎ, কর্ণ $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD}$

$$= \vec{P} + (-\vec{Q}) = \vec{P} - \vec{Q}।$$

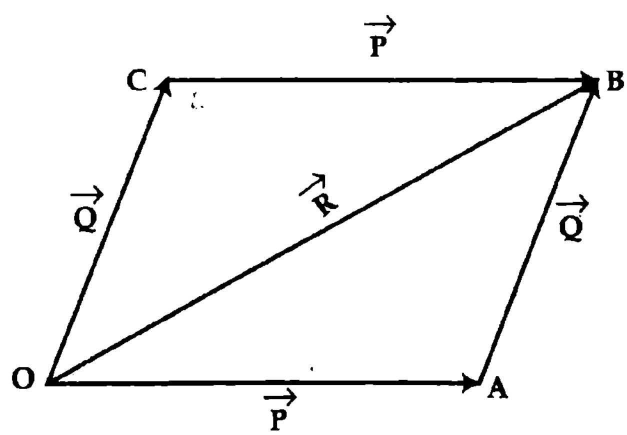


চিত্র ১.১৮

১.৭ ভেক্টর যোগের কয়েকটি সূত্র
Some laws of vector addition

(ক) বিনিময় সূত্র (Commutative law) : $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$

প্রমাণ : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{R}$ রাশি দুটির লব্ধি [চিত্র ১.১৯]।



চিত্র ১.১৯

ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে, OAB ত্রিভুজে,

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

অর্থাৎ $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

এখন OABC সামান্তরিক অঙ্কন করি এবং OC ও CB-এ যথাক্রমে AB ও OA-এর ন্যায় তীর চিহ্নিত করি। OCB ত্রিভুজে

$\vec{OB} = \vec{OC} + \vec{CB}$ (ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে).

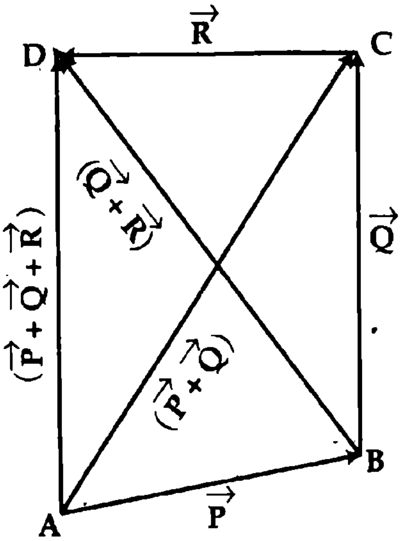
$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OC} + \vec{CB}$

অর্থাৎ $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ (৪)

এটিই হল বিনিময় সূত্র।

তেমনি স্কেলার রাশিও বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

(খ) সংযোজন সূত্র (Associative law) ঃ $(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{P})$



চিত্র ১.২০

মনে করি $\vec{P}$, $\vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ১.২০]। এদেরকে যথাক্রমে $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ এবং $\vec{CD}$ রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। এখন AC, BD এবং AD যোগ করি। অতএব ত্রিভুজের সূত্র হতে পাই,

ABC ত্রিভুজে, $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{P} + \vec{Q}$

ACD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$

$$= \left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R} \qquad (9)$$

আবার, BCD ত্রিভুজে,

$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{Q} + \vec{R}$

এবং ABD ত্রিভুজে, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right) \qquad (10)$

সমীকরণ (9) এবং সমীকরণ (10) হতে পাই,

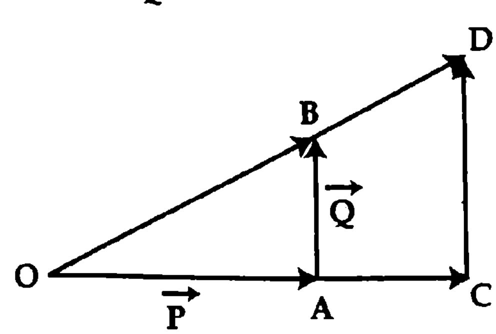
$$\left(\vec{P} + \vec{Q}\right) + \vec{R} = \vec{P} + \left(\vec{Q} + \vec{R}\right)$$

এটিই হল ভেক্টর রাশির যোগের সংযোজন সূত্র অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ সংযোজন সূত্র মেনে চলে।

(গ) বণ্টন সূত্র (Distribution law) ঃ $m(\vec{P} + \vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q}$

মনে করি, $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{AB} = \vec{Q}$ [চিত্র ১.২১]। OB যোগ করি। এখন ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} = \vec{P} + \vec{Q}$



চিত্র ১.২১

মনে করি, OA ও OB-এর বর্ধিতাংশের উপর C ও D দুটি বিন্দু নেয়া হল যাতে $\vec{OC} = m\vec{OA} = m\vec{P}$

এবং $CD = m\vec{AB} = m\vec{Q}$

এখন, OAB এবং OCD সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে,

$$\frac{\vec{OC}}{\vec{OA}} = \frac{\vec{OD}}{\vec{OB}} = \frac{\vec{CD}}{\vec{AB}} = \frac{m\vec{Q}}{\vec{Q}} = m$$

$$\vec{OD} = m\vec{OB} = m(\vec{P} + \vec{Q}) \qquad (11)$$

আবার, ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = m\vec{P} + m\vec{Q}$$

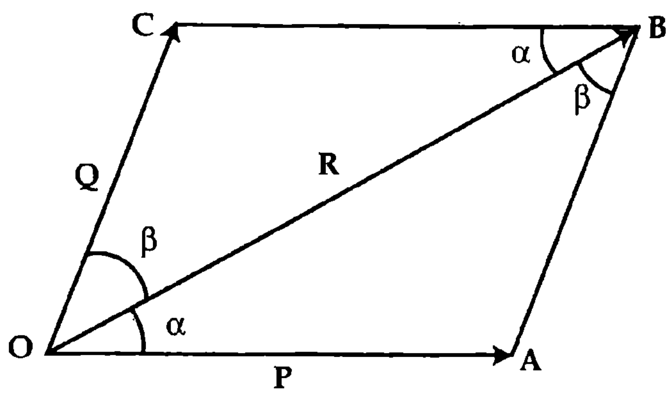
$$m(\vec{P} + \vec{Q}) = m\vec{P} + m\vec{Q} \qquad (12)$$

\ **এটিই হল ভেক্টর যোগের বণ্টন সূত্র।**

১·৮ ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ ও উপাংশ
Resolution of vectors and components

একটি ভেক্টর রাশিকে সামান্তরিক সূত্রের দ্বারা বহুভাবে দুটি ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করা যায়। এই পদ্ধতির নাম ভেক্টর রাশির বিভাজন। সুতরাং **একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াকে ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ বলে। এই বিভক্ত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি অংশক বা উপাংশ (Component) বলে।**

(i) যে কোন দুই উপাংশে বিভাজন ঃ



চিত্র ১.২২

মনে করি R একটি ভেক্টর রাশি। তীর চিহ্নিত OB সরলরেখাটি তার মান ও দিক নির্দেশ করছে [চিত্র ১.২২]। OB-এর সাথে দুই পাশে α ও β কোণ উৎপন্ন করে এরূপ দুটি দিকে একে দুটি উপাংশে বিভক্ত করতে হবে।

এখন O বিন্দু হতে OB-এর সাথে দুই পাশে α এবং β কোণ করে OA এবং OC রেখা দুটি টানি। OB-কে কর্ণ করে OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করি।

সুতরাং সামান্তরিকের সূত্রানুযায়ী OB দ্বারা সূচিত ভেক্টর রাশি $\vec{R}$-এর দুটি অংশকের বা উপাংশের মান ও দিক $\vec{OA}$ এবং $\vec{OC}$ নির্দেশ করবে।

বর্ণনানুসারে OC এবং AB সমান্তরাল এবং OB তাদেরকে যুক্ত করেছে। কাজেই $\angle ABO = \angle BOC = \beta$

এখন ত্রিকোণমিতি ও ত্রিভুজের ধর্মানুসারে ΔOAB হতে আমরা পাই,

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin\angle OAB}$$

আবার $AB = OC$ এবং $\angle OAB = 180° - (\angle AOB + \angle ABO) = 180° - (\alpha + \beta)$

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin\{180° - (\alpha+\beta)\}}$$

$\vec{OA}$ এবং $\vec{OC}$ দ্বারা সূচিত উপাংশ দুটির মান যথাক্রমে P এবং Q-এর সমান ধরে আমরা পাই,

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\{180° - (\alpha+\beta)\}} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)} \quad [\because AB = OC]$$

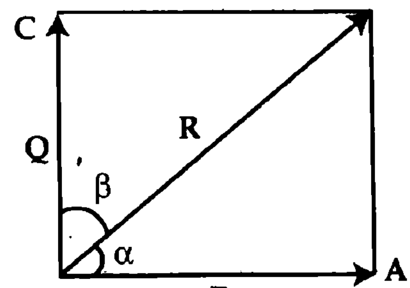
$$P = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (13)$$

এবং $$Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (14)$$

সমীকরণ (13) ও (14) R ভেক্টরের উপাংশের সমীকরণ।

(ii) লম্ব উপাংশে বিভাজন :

যদি R ভেক্টরকে সমকোণে বিভাজিত করা হয় অর্থাৎ, P এবং Q উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণী হয় [চিত্র ১·২৩], তবে $(\alpha + \beta) = 90°$



চিত্র ১·২৩

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin 90° = 1 \text{ এবং}$$

$$\sin \beta = \sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\frac{P}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\sin \alpha} = R$$

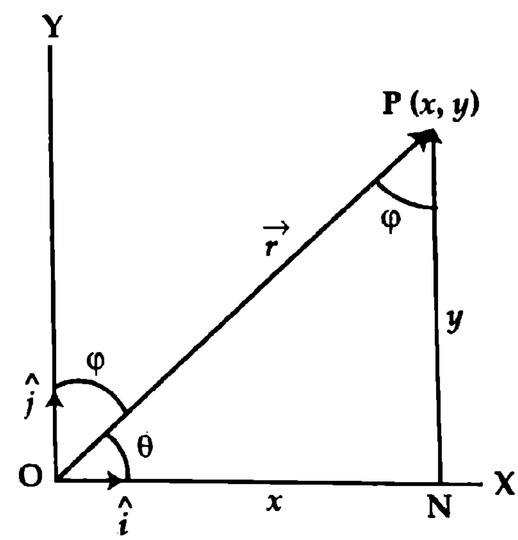
$$P = R \cos \alpha \text{ এবং } Q = R \sin \alpha \qquad (15)$$

P এবং Q উপাংশ দুটিকে মূল ভেক্টর রাশি R-এর লম্বাংশ বলে। P-কে অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal components) এবং Q-কে উলম্ব উপাংশ (Tangential components) বলে।

১·৯ একটি ভেক্টর রাশিকে একক ভেক্টর রাশির সাহায্যে প্রকাশ
Representation of a vector by unit vectors

একটি ভেক্টর রাশিকে একক ভেক্টর রাশির সাহায্যে প্রকাশ করতে গিয়ে আমরা দুটি বিষয় বিবেচনা করব। একটি দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্র ও অপরটি ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্র। নিম্নে বিষয় দুটি পৃথকভাবে আলোচিত হল।

(ক) দ্বিমাত্রিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে : ধরা যাক পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX ও OY সরলরেখা দুটি যথাক্রমে X ও Y অক্ষ নির্দেশ করছে [চিত্র ১·২৪]। XY সমতলে X অক্ষের সাথে θ কোণে অবস্থিত OP রেখাটি দ্বারা r মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ -এর মান ও দিক নির্দিষ্ট হয়েছে। আরও ধরা যাক P-এর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং ধনাত্মক X ও Y অক্ষে একক ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ । P হতে X অক্ষের উপর PN লম্ব টানি।



চিত্র ১·২৪

তা হলে চিত্র অনুসারে ON = x, NP = y এবং OP = r.

$$\vec{ON} = x\hat{i}, \ \vec{NP} = y\hat{j} \text{ এবং } \vec{OP} = \vec{r}$$

এখন, ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে,

$$\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP}$$

$$\text{বা, } \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (16)$$

ভেক্টরের মান

চিত্র ১·২৪ হতে আমরা পাই,

$$OP^2 = ON^2 + NP^2$$

$$\text{বা, } r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (17)$$

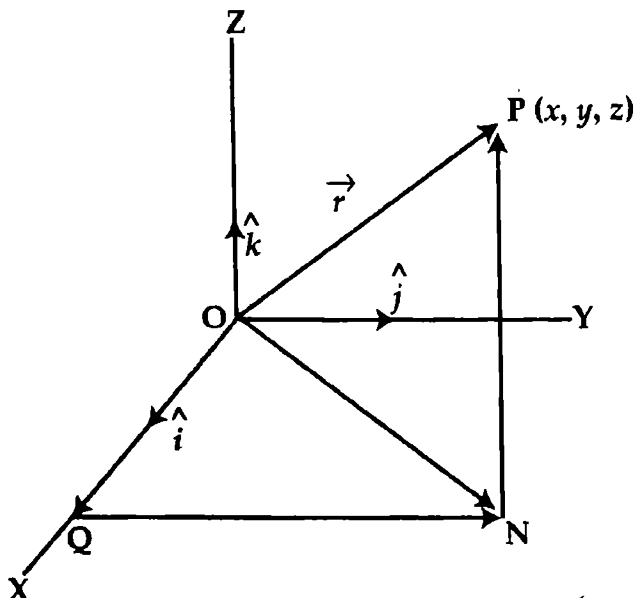
$\vec{r}$ বরাবর বা $\vec{r}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর :

$\vec{r}$ বরাবর বা $\vec{r}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর,

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (18)$$

(খ) ত্রিমাত্রিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ঃ ত্রিমাত্রিক ভেক্টরের বেলায় অনুরূপভাবে লেখা যায়,

$\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$. এখানে P-এর অবস্থানাঙ্ক (x, y, z) ।



চিত্র ১.২৫

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY ও OZ সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ নির্দেশ করছে [চিত্র ১.২৫]। OP রেখাটি এই অক্ষ ব্যবস্থায় r মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ নির্দেশ করছে। আরও মনে করি P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষে একক ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\hat{i}$ $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ । PN রেখাটি হল XY সমতলের উপর এবং NQ রেখাটি হল OX-এর উপর লম্ব।

তা হলে $\vec{OP} = \vec{ON} + \vec{NP}$ এবং

$$\vec{ON} = \vec{OQ} + \vec{QN}$$

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QN} + \vec{NP}$$

কিন্তু $\vec{OQ} = x\hat{i}$, $\vec{QN} = y\hat{j}$, $\vec{NP} = z\hat{k}$

ও $\vec{OP} = \vec{r}$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (19)$$

ভেক্টরের মান ঃ

চিত্র ১.২৫ হতে, $OP^2 = ON^2 + NP^2$ এবং $ON^2 = OQ^2 + QN^2$

$$OP^2 = OQ^2 + QN^2 + NP^2$$

বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (20)$$

$\vec{r}$ বরাবর বা, $\vec{r}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর রাশি ঃ

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \qquad (21)$$

উদাহরণ ঃ যদি $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ হয়, তবে $\vec{A}$ ভেক্টর রাশির মান,

$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ এবং $\vec{A}$ ভেক্টর রাশি বরাবর একক ভেক্টর রাশি,

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

১.১০ ভেক্টর যোগের উপাংশ সূত্র
Law of components for vector addition

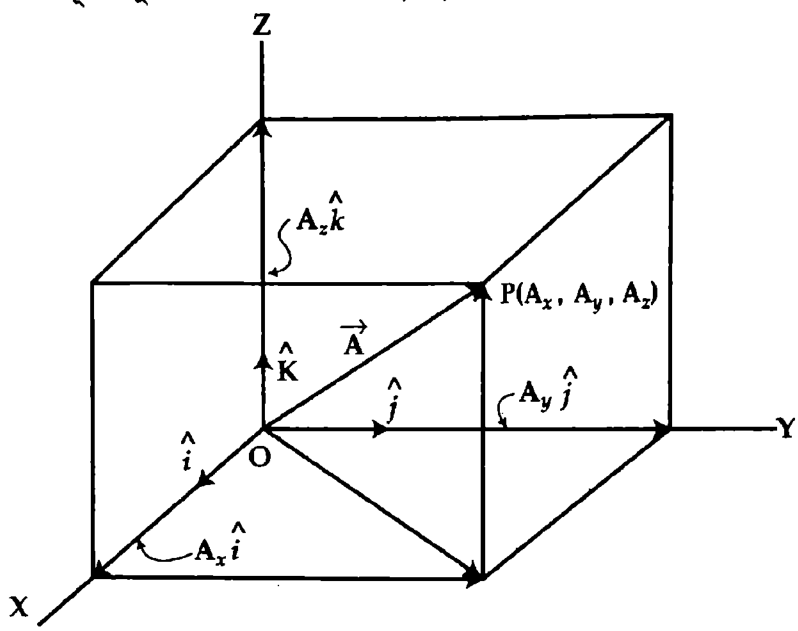
পূর্বের অনুচ্ছেদে একটি ভেক্টর রাশিকে আয়তাকার একক ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করার নিয়ম আলোচনা করা হয়েছে। দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি লম্ব উপাংশে বিভক্ত করা থাকে, তবে তাদের লব্ধি উপাংশের সাহায্যে সহজেই প্রকাশ করা যায়। একে ভেক্টর যোগের উপাংশ সূত্র বলে।

ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করে উপাংশগুলোর বীজগাণিতিক যোগফল দ্বারা লব্ধি ভেক্টর নির্ণয় করা যায়। লব্ধি ভেক্টর নির্ণয়ের পদ্ধতি নিম্নে আলোচনা করা হল।

১·১০·১ ভেক্টর রাশির যোগের উপাংশ সূত্র

যে কোন স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করা যায়। প্রত্যেকটি ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করে উপাংশগুলোর বীজগাণিতিক যোগফল দ্বারা লব্ধি ভেক্টর রাশি নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, ত্রিমাত্রিক আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় OX, OY, OZ তিনটি অক্ষ নির্দেশ করছে [চিত্র ১·২৬]। মনে করি O মূলবিন্দু। $\vec{A}$ ভেক্টর রাশিকে X, Y, Z-অক্ষ বরাবর উপাংশে বিভক্ত করার জন্য OX অক্ষ



চিত্র ১·২৬

বরাবর একক ভেক্টর রাশি $\hat{i}$, OY অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর রাশি $\hat{j}$ এবং OZ অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর রাশি $\hat{k}$ লই। $\vec{A}$-এর শীর্ষবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (A_x, A_y, A_z) হলে X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর এর উপাংশ যথাক্রমে $A_x\hat{i}$, $A_y\hat{j}$ ও $A_z\hat{k}$ এবং

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad (22)$$

অনুরূপভাবে $\vec{B}$ ভেক্টর রাশিকে X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর উপাংশের সাহায্যে লেখা যায়,

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \qquad (23)$$

$$\therefore \vec{A} + \vec{B} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \qquad (24)$$

এখন $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ হলে এবং X, Y ও Z অক্ষ বরাবর লব্ধি $\vec{C}$-এর উপাংশের মান যথাক্রমে C_x, C_y এবং C_z হলে সমীকরণ (24)-কে লেখা যায়,

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k} \qquad (25)$$

অর্থাৎ, $C_x = A_x + B_x$, $C_y = A_y + B_y$ এবং $C_z = A_z + B_z$

লব্ধির মান ঃ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের যোজনের লব্ধির মান হবে,

$$|\vec{C}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

$$= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2} \qquad (26)$$

উপরের নিয়মে ভেক্টর দুটির বিয়োগফল নির্ণয় করা যায়।

১.১০.২ ভেক্টর বিয়োগের উপাংশ সূত্র

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটিকে বিভাজিত উপাংশে লেখা যায়, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

এই ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগ বা বিয়োজন হবে,

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} \qquad (27)$$

এখন $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ হলে এবং X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{C}$-এর উপাংশ যথাক্রমে C_x, C_y ও C_z হলে,

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

অর্থাৎ $C_x = (A_x - B_x)$, $C_y = (A_y - B_y)$ এবং $C_z = (A_z - B_z)$

অতএব, লব্ধির মান,

$$|\vec{C}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

$$= \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} \qquad (28)$$

বিঃ দ্রঃ দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে দুটি উপাংশ যথা $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ সংশ্লিষ্ট রাশিগুলো থাকবে।

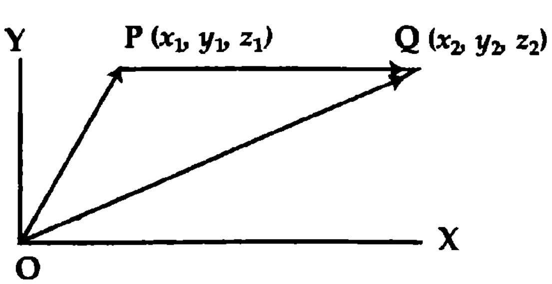
১.১১ দুটি অবস্থান ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর সংযোগকারী ভেক্টর (উপাংশ পদ্ধতি)

মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে দুটি বিন্দু P ও Q-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1, z_1) ও (x_2, y_2, z_2) [চিত্র ১.২৭ (ক)] হলে $\vec{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ ও $\vec{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$

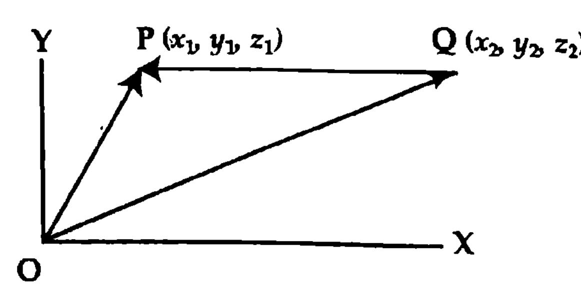
পুনরায়, $\vec{OP} + \vec{PQ} = \vec{OQ}$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$\vec{r}_{12} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \qquad (29)$$



চিত্র ১.২৭(ক)



চিত্র ১.২৭(খ)

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (30)$$

অনুরূপভাবে চিত্র ১.২৭ (খ) থেকে দেখানো যায়,

$$\vec{QP} = \vec{r}_{21} = (x_1 - x_2)\hat{i} + (y_1 - y_2)\hat{j} + (z_1 - z_2)\hat{k} \qquad (31)$$

এবং $|\vec{QP}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ । $\qquad (32)$

এটিই হল দুটি বিন্দুর সংযোগকারী ভেক্টরের মান।

উদাহরণ ঃ P ও Q বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 3, 4) এবং (4, 6, 8) হলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর রাশি এবং এর মান হবে যথাক্রমে,

$$\overrightarrow{PQ} = (4-2)\hat{i} + (6-3)\hat{j} + (8-4)\hat{k} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

এবং $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$

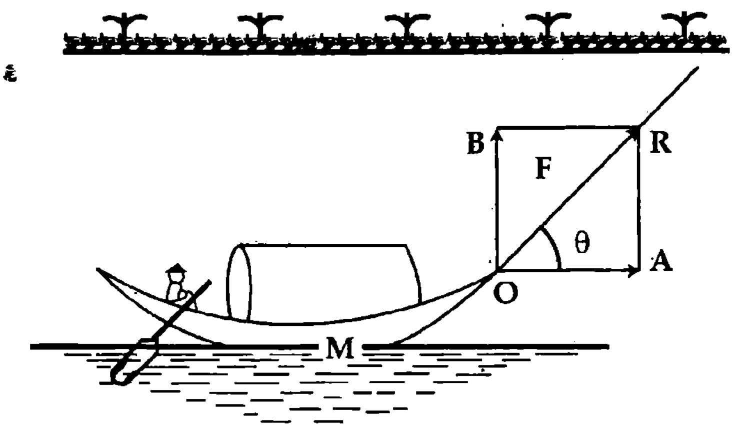
১·১২ ভেক্টর বিভাজনের দৃষ্টান্ত

১। **নৌকার গুণ টানা ঃ** মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\overrightarrow{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায় যথা—অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ।

অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ, এর দিক OA বরাবর।

উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ, এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ F cos θ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ F sin θ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ F sin θ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে ফলে F sin θ-এর মান কম হবে এবং F cos θ-এর মান বেশি হবে। ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে।



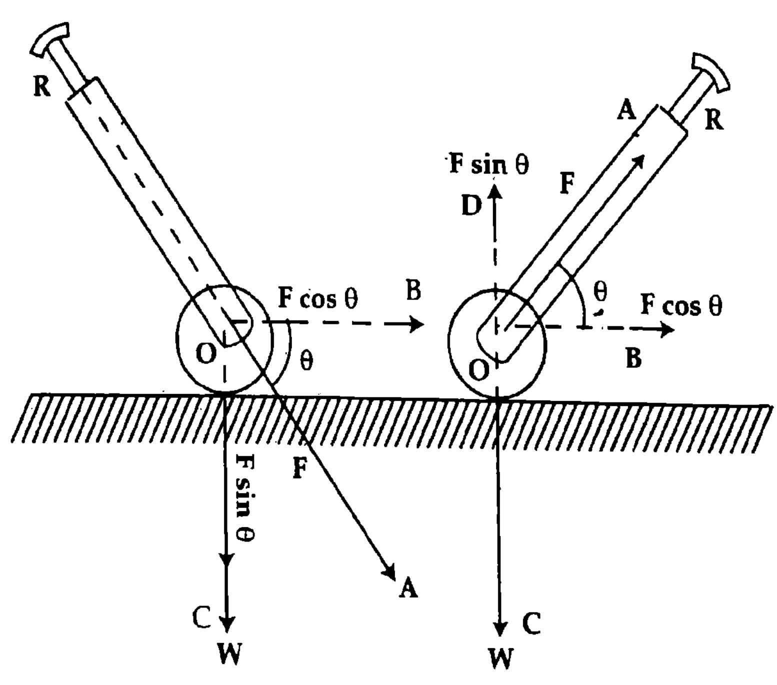
চিত্র ১.২৮

২। **লন-রোলার চালনা ঃ** তলের উপর দিয়ে কোন বস্তুকে ঠেলা বা টানা হলে তল ও বস্তুর মধ্যে ঘর্ষণ বল ক্রিয়াশীল হয় এবং বস্তুর গতিকে বাধা দেয়। বস্তুর ওজন বেশি হলে ঘর্ষণ বলও বেশি হয়। রোলারকে ঠেলে বা টেনে গতিশীল করা হয়।

ঠেলার ক্ষেত্রে ঃ ধরা যাক,

রোলারের ওজন = $\overrightarrow{W}$

রোলারের হাতলের উপর প্রযুক্ত বল = $\overrightarrow{F}$



চিত্র ১.২৯

F বল রোলারের O বিন্দুতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ১.২৯ (ক)]। O বিন্দুতে এই বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়।

বলের অনুভূমিক উপাংশ = $F \cos \theta$, এর দিক OB বরাবর সামনের দিকে

এবং উল্লম্ব উপাংশ = $F \sin \theta$, এর দিক OC বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়াশীল যা রোলারের ওজন বৃদ্ধি করে। সুতরাং রোলারের মোট ওজন হয় $(W + R \sin \theta)$। ফলে রোলার প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয়ে যায় বলে ঘর্ষণ বলের মানও বেড়ে যায়। তাই রোলার ঠেলা কষ্টকর হয়।

টানার ক্ষেত্রে ঃ ধরা যাক, রোলারের ওজন = $\vec{W}$

রোলারের হাতলের উপর প্রযুক্ত বল = $\vec{F}$

F বল O বিন্দুতে অনুভূমিক রেখা OB-এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ১.২৯ (খ)]। F বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত হয়ে যায়।

অনুভূমিক উপাংশ = $F \cos \theta$, এর ক্রিয়ায় রোলারটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে

এবং উল্লম্ব উপাংশ = $F \sin \theta$, এর ক্রিয়া OD বরাবর উপরের দিকে হওয়ায় রোলারের মোট ওজন হ্রাস পায়। ফলে রোলারের ওজন হয় $(W - F \sin \theta)$। ফলে টানার ক্ষেত্রে রোলার হাল্কা অনুভূত হয় এবং ঘর্ষণ বলও হ্রাস পায়। ফলে রোলার টানা সহজতর হয়।

সুতরাং, **লন-রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর।**

১.১৩ ভেক্টর রাশির গুণন
Multiplication of vectors

দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল সাধারণত দুই প্রকার, যথা—

(১) **স্কেলার গুণন বা ডট গুণন** (Scalar or Dot product)

(২) **ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন** (Vector or Cross product)

এই দুটি গুণন বা গুণফল নিম্নে পৃথক পৃথকভাবে আলোচনা করা হল।

১.১৩.১ স্কেলার গুণন বা ডট গুণন

সংজ্ঞা ঃ দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে যার মান রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান। ভেক্টর রাশি দুটির মাঝে (·) চিহ্ন দিয়ে ডট গুণফল প্রকাশ করা হয় এবং পড়তে হয় "প্রথম রাশি ডট দ্বিতীয় রাশি।"

বা, **স্কেলার গুণফল দুটি ভেক্টরের মানের গুণফলের সাথে তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের গুণফল।**

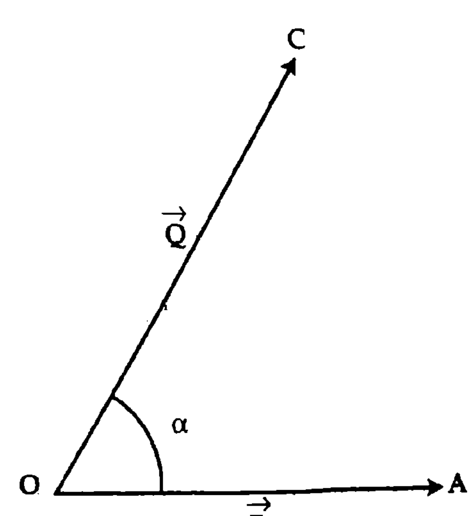
ব্যাখ্যা ঃ মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। তীর চিহ্নিত OA ও OC সরলরেখা রাশি দুটির মান ও দিক নির্দেশ করছে [চিত্র ১.৩০]। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে আনত। তাদের স্কেলার বা অদিক গুণফল = $\vec{P} \cdot \vec{Q}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং পড়তে হয় $\vec{P}$ ডট $\vec{Q}$। কাজেই সংজ্ঞা অনুসারে পাই,

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = |\vec{P}||\vec{Q}| \cos \alpha$$

বা, $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \alpha$ (33)

এখানে $0 \le \alpha \le \pi$

সমীকরণ (33) হতে দেখা যায়, গুণফল একটি স্কেলার রাশি।



চিত্র ১.৩০

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ

(ক) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q}$ ~~$= PQ\cos 0° = PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।~~

(খ) যদি $\alpha = 90°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 90° = 0$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

(গ) যদি $\alpha = 180°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 180° = -PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।

[উল্লেখ্য ঃ $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = P \times Q\cos\alpha = Q \times P\cos\alpha$, এখানে, $Q\cos\alpha = \vec{P}$ বরাবর Q-এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha = \vec{Q}$ বরাবর $\vec{P}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ।]

স্কেলার গুণনের উদাহরণ ঃ বল $\vec{F}$ এবং সরণ $\vec{s}$ উভয়েই ভেক্টর রাশি। কিন্তু এদের স্কেলার গুণফল কাজ (W) একটি স্কেলার রাশি, অর্থাৎ

$$W = \vec{F}.\vec{s} = Fs\cos\alpha \tag{34}$$

স্থিতিশক্তি, বৈদ্যুতিক বিভব ইত্যাদিও ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফলের উদাহরণ।

১·১৩·২ একক ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণন
Multiplication of unit vectors

পরস্পর সমকোণে অবস্থিত তিনটি অক্ষ বিবেচনা করি। এরা যথাক্রমে X, Y এবং Z। মনে করি এই তিনটি অক্ষ বরাবর সূচিত তিনটি একক ভেক্টর হল যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ এবং $\hat{k}$। এদের স্কেলার গুণফল বের করি।

(i) $\hat{i}.\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0°$
$= 1 \times 1 \times 1$
$= 1$

যেহেতু একই অক্ষ বরাবর দুটি একক ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ = 0°

অনুরূপভাবে, $\hat{j}.\hat{j} = 1$ এবং $\hat{k}.\hat{k} = 1$

$$\boxed{\therefore\ \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1} \tag{35}$$

(ii) $\hat{i}.\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90°$ [$\because$ X এবং Y অক্ষের মধ্যবর্তী কোণ 90°]
$= 1 \times 1 \times 0$
$= 0$

অনুরূপভাবে,

$\hat{j}.\hat{k} = 0$ এবং $\hat{k}\ \hat{i} = 0$

$$\boxed{\therefore\ \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0} \tag{36}$$

১·১৩·৩ ভেক্টর বা ক্রস গুণন
Cross product of vectors

সংজ্ঞা ঃ দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয়, তবে ঐ গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুণফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

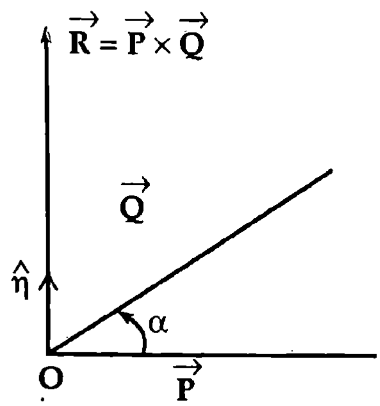
ব্যাখ্যা ঃ মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। অতএব এদের ভেক্টর গুণফল বা দিক গুণফল—

$$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, |\vec{P}|\,|\vec{Q}|\, \sin\alpha,\ 0 \le \alpha \le \pi$$

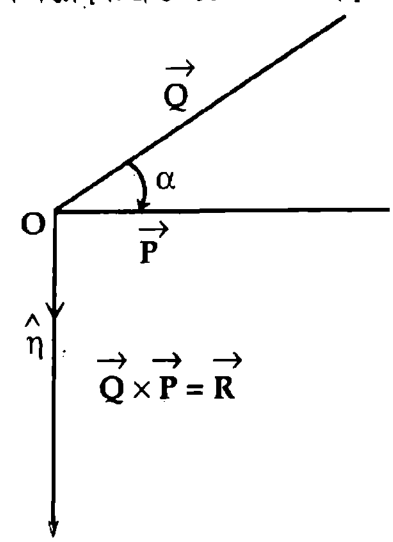
বা, $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q}$

$$= \hat{\eta}\, PQ \sin\alpha \quad 0 \le \alpha \le \pi \qquad (37)$$

এখানে $\hat{\eta}$ (ইটা) একটি একক ভেক্টর যা $\vec{R}$ এর দিক নির্দেশ করে [চিত্র ১·৩১ ও ১·৩২]।

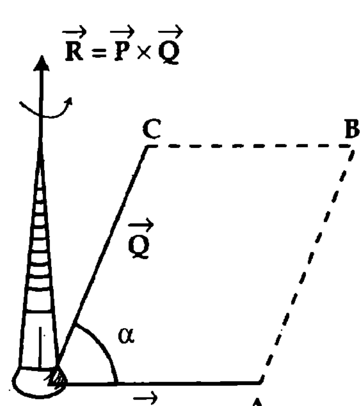


চিত্র ১·৩১

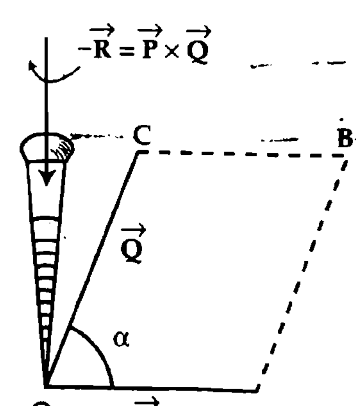


চিত্র ১·৩২

ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম ঃ ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের উপর লম্বভাবে একটি ডান হাতি স্ক্রুকে রেখে প্রথম ভেক্টর হতে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যে দিকে অগ্রসর হয় সেই দিকই হবে $\vec{R}$ তথা $\hat{\eta}$ এর দিক।



চিত্র ১·৩৩



চিত্র ১·৩৪

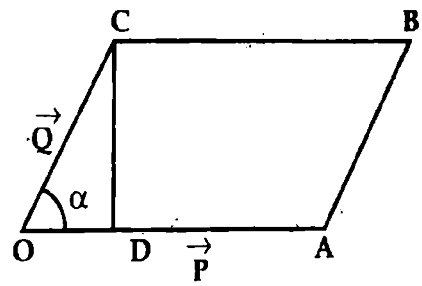
উপরোক্ত নিয়ম অনুসারে $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর অভিমুখ হবে উপরের দিকে [চিত্র ১·৩৩] এবং $\vec{Q} \times \vec{P}$ এর অভিমুখ হবে নিচের দিকে [চিত্র ১·৩৪] অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে ডান হাতি স্ক্রুর দিক হবে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখী (Anti-clockwise) এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clockwise)। Anti-clockwise direction-কে positive (ধনাত্মক) ধরা হয় এবং clockwise direction-কে Negative (ঋণাত্মক) ধরা হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ (ক) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 0° = 0$

এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

(খ) যদি $\alpha = 90°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta} PQ \sin 90° = PQ$.
এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

(গ) যদি $\alpha = 180°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta} PQ \sin 180° = 0$
এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।



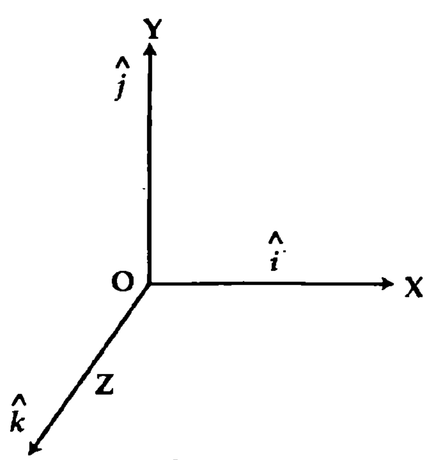
চিত্র ১.৩৫

উদাহরণ : মনে করি দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের সাথে α কোণ উৎপন্ন করেছে। OABC সামান্তরিকের $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OC} = \vec{Q}$ এখন C হতে OA এর উপর CD লম্ব টানি [চিত্র ১.৩৫]।

$$\text{সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল} = OA \times CD = OA \times OC \sin\alpha = PQ \sin\alpha = |\vec{P} \times \vec{Q}|$$

সিদ্ধান্ত—**সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মানের সমান।**

১.১৩.৪ একক ভেক্টরের ভেক্টর গুণন
Cross product of unit vectors



চিত্র ১.৩৬

পরস্পর সমকোণে অবস্থিত তিনটি অক্ষের দিকে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করি। X, Y এবং Z অক্ষের দিকে একক ভেক্টরগুলো যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ [চিত্র ১.৩৬]। এদের ভেক্টর গুণফল বের করি।

(১) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{\eta} |\hat{i}| |\hat{i}| \sin 0°$

[∵ একক ভেক্টর দুটি একই অক্ষ বরাবর ও $\alpha = 0°$]

$= \hat{\eta} \times 1 \times 1 \times 0 = 0$

অনুরূপভাবে,

$\hat{j} \times \hat{j} = 0$ এবং $\hat{k} \times \hat{k} = 0$

$$\boxed{\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0} \qquad (38)$$

(২) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{\eta} |\hat{i}| |\hat{j}| \sin 90°$ [∵ অক্ষ দুটি পরস্পরের সাথে লম্ব, $\alpha = 90°$]

$= \hat{\eta} . 1 \times 1 \times 1 = \hat{\eta}$

সংজ্ঞানুযায়ী $\hat{\eta}$ একক ভেক্টর $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ উভয়ের উপর লম্ব। অতএব, এর দিক ধনাত্মক Z অক্ষ বরাবর। অর্থাৎ এক্ষেত্রে $\hat{\eta}$ একক ভেক্টর এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টর অভিন্ন।

$$\boxed{\therefore \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}}$$

অনুরূপভাবে, $\boxed{\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \text{ এবং } \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}}$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i}) \\ &\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j}) \\ \text{এবং } &\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k}) \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

১·১৪ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ বা অভিক্ষেপ
Projection of a vector

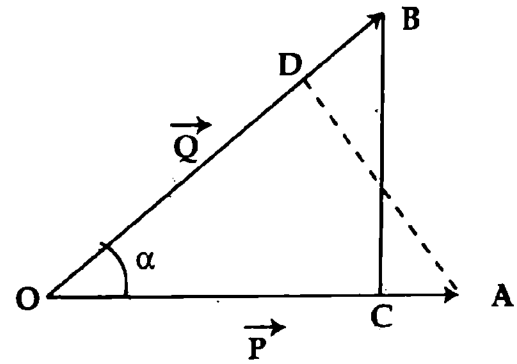
মনে করি $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OB} = \vec{Q}$। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\angle AOB = \alpha$। B বিন্দু হতে OA-এর উপর BC লম্ব টানি। তাহলে OC-ই $\vec{P}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ বা সংক্ষেপে অভিক্ষেপ। চিত্র ১˙৩৭ অনুসারে,

$$OC = |\vec{Q}|.\cos\alpha$$

আবার, $\vec{P}.\vec{Q} = |\vec{P}||\vec{Q}|\cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}||\vec{Q}|}$$

সুতরাং, $OC = |\vec{Q}|\dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}||\vec{Q}|} = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}|}$



চিত্র ১˙৩৭

অনুরূপভাবে, A বিন্দু হতে OB-এর উপর লম্ব OD অঙ্কন করলে $\vec{Q}$ ভেক্টরের উপর $\vec{P}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ,

$$OD = |\vec{P}|\cos\alpha = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{Q}|}$$

উদাহরণ ঃ ভেক্টর $\vec{P} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এর উপর $\vec{Q} = 4\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}$-এর

লম্ব অভিক্ষেপ বা অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}|} = \dfrac{(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}).(4\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{(1^2)+(2)^2+(2)^2}}$

$$= \frac{4+16-2}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{18}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6$$

১·১৫ উপাংশে বিভাজিত ভেক্টর রাশির গুণফল
Multiplication of resolved vector components

এখন আমরা উপাংশে বিভাজিত ভেক্টর রাশির গুণফল আলোচনা করব। এ গুণফলও দুই প্রকারের ; যথা—

(ক) স্কেলার গুণফল এবং **(খ) ভেক্টর গুণফল**

(ক) স্কেলার গুণফল ঃ মনে করি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এরা যথাক্রমে

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং

$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

এদের স্কেলার গুণফল

$$\vec{A}.\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}).(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x(\hat{i}.\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}.\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}.\hat{k}) + A_yB_x(\hat{j}.\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}.\hat{j}) + A_yB_z(\hat{j}.\hat{k}) + A_zB_x(\hat{k}.\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}.\hat{j}) + A_zB_z(\hat{k}.\hat{k})$$

$$= A_xB_x + 0 + 0 + 0 + A_yB_y + 0 + 0 + 0 + A_zB_z$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (40)$$

আবার, $\vec{A}\cdot\vec{A} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$

বা, $A^2 = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z$

বা, $A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (41)$$

অনুরূপভাবে,

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \qquad (42)$$

পুনরায়, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} \qquad (43)$$

সমীকরণ (40), (41) এবং (42) হতে $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$-এর মান নির্ণয় করে সমীকরণ (43)-এর সাহায্যে $\cos\alpha$-এর মান জেনে α-এর মান বের করা যায়।

(খ) ভেক্টর গুণফল ঃ মনে করি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর। এরা যথাক্রমে,
$\vec{A} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$ এবং $\vec{B} = (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$।
অতএব এদের ভেক্টর গুণফল,

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\times(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})\\
&= A_xB_x(\hat{i}\times\hat{i}) + A_xB_y(\hat{i}\times\hat{j}) + A_xB_z(\hat{i}\times\hat{k}) + A_yB_x(\hat{j}\times\hat{i}) + A_yB_y(\hat{j}\times\hat{j})\\
&\quad + A_yB_z(\hat{j}\times\hat{k}) + A_zB_x(\hat{k}\times\hat{i}) + A_zB_y(\hat{k}\times\hat{j}) + A_zB_z(\hat{k}\times\hat{k})\\
&= 0 + A_xB_y\hat{k} + A_xB_z(-\hat{j}) + A_yB_x(-\hat{k}) + 0 + A_yB_z\hat{i} + A_zB_x\hat{j} + A_zB_y(-\hat{i}) + 0\\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\\
&= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}
\end{aligned}$$

অতএব, নির্ণায়কের সাহায্যে লেখা যায়,

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (44)$$

$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2}$ এবং
$\vec{A}\times\vec{B}$-এর অভিমুখে একক ভেক্টর

$$\hat{\eta} = \frac{\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}}{|\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}|} \qquad (45)$$

আবার,

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\alpha = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\alpha.$$

$$\therefore \sin\alpha = \frac{|\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}|}{|\vec{\mathbf{A}}|\,|\vec{\mathbf{B}}|} \qquad (46)$$

এখন, $\vec{A}\times\vec{B}$, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$-এর মান নির্ণয় করে সমীকরণ (46)-এর সাহায্যে $\sin\alpha$-এর মান জেনে α-এর মান বের করা যায়।

বিশেষ ক্ষেত্র
Special cases

দুটি ভেক্টর বা দিক রাশি পরস্পর সমান্তরাল এবং সমকোণী হতে পারে। কখন সমান্তরাল এবং কখন সমকোণী হবে, তা এখন আলোচনা করা হবে।

(ক) সমান্তরাল ভেক্টর (Parallel vector) : মনে করি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর, এরা পরস্পরের সমান্তরাল হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ শূন্য হবে অর্থাৎ $\alpha = 0°$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin\alpha = 0$$

সুতরাং, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 0$

অর্থাৎ, যদি শূন্য ভেক্টর না হয়, তবে দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণফল শূন্য হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

(খ) লম্ব ভেক্টর (Perpendicular vector) : মনে করি $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর। এরা পরস্পরের লম্ব হলে এদের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ হবে অর্থাৎ, $\alpha = 90°$ হবে।

$$\therefore \vec{A} . \vec{B} = AB\cos\alpha = AB\cos 90° = 0$$

সুতরাং $\vec{A}\ \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$ (শূন্য) হবে।

অর্থাৎ, যদি শূন্য ভেক্টর না হয়, তবে দুটি ভেক্টর রাশির ডট গুণফল শূন্য হলে এরা পরস্পর লম্ব হবে।

১·১৬ স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে, কিন্তু ভেক্টর গুণফল তা মেনে চলে না
Dot product obeys commutative law, but cross product does not

$\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি লই। তা হলে তাদের স্কেলার গুণফল $\vec{P} \cdot \vec{Q} = \vec{Q} \cdot \vec{P}$ ও ভেক্টর গুণফল $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$। অতএব $\vec{P} \times \vec{Q}$ এবং $\vec{Q} \times \vec{P}$-এর মান সমান হলেও তাদের দিক বিপরীত। অর্থাৎ $\vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$।

প্রমাণ : পূর্বের বর্ণনা অনুসারে, $\vec{P} . \vec{Q} = PQ\cos\alpha$ (47)

আবার, $\vec{Q}\ \vec{P} = QP\cos\alpha = PQ\cos\alpha$ (48)

উপরোক্ত দুটি সমীকরণ হতে প্রমাণিত হল যে, $\vec{P} . \vec{Q} = \vec{Q}\ \vec{P}$

অর্থাৎ, স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

পুনরায়, $\vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ\sin\alpha$ (49)

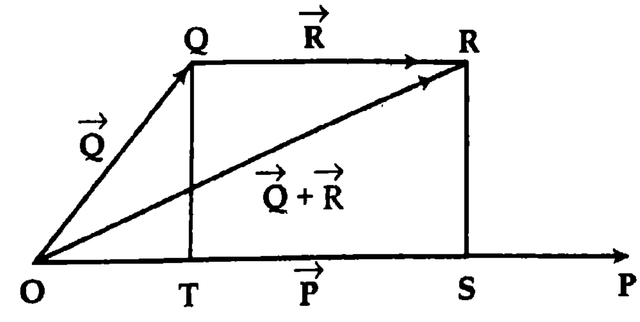
এবং $\vec{Q} \times \vec{P} = -\hat{\eta}\, PQ\sin\alpha$ (50)

$\vec{P} \times \vec{Q} \neq \vec{Q} \times \vec{P}$, অর্থাৎ ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে না।

১·১৭ স্কেলার গুণফল বণ্টন সূত্র (Distribution law) মেনে চলে

বণ্টন সূত্র ঃ $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\ \vec{B} + \vec{A}\ \vec{C}$

প্রমাণ ঃ $\vec{P}, \vec{Q}$ এবং $\vec{R}$ ভেক্টর তিনটি যথাক্রমে $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ এবং $\overrightarrow{QR}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে [চিত্র ১.৩৮]। চিত্র থেকে পাওয়া যায়



চিত্র ১.৩৮

$$\vec{P}.(\vec{Q}+\vec{R}) = \vec{P}.(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR})$$
$$= \vec{P}.\overrightarrow{OR}$$
$= |\vec{P}| \times \vec{P}$ এর উপর $\overrightarrow{OR}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ
$$= |\vec{P}| \times OS$$
$$= |\vec{P}| \times (OT + TS)$$
$$= |\vec{P}| \times OT + |\vec{P}| \times TS$$

কিন্তু $|\vec{P}| \times OT = |\vec{P}|$ ($\overrightarrow{OP}$ এর উপর $\overrightarrow{OQ}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ) $= \vec{P}\ .\ \overrightarrow{OQ}$

এবং $|\vec{P}|\ TS = |\vec{P}|$ ($\overrightarrow{OP}$ এর উপর QR-এর লম্ব অভিক্ষেপ) $= \vec{P}\ \overrightarrow{QR}$

অতএব, $\vec{P}.(\vec{Q}+\vec{R}) = \vec{P}.\ \overrightarrow{OQ} + \vec{P}.\overrightarrow{QR} = \vec{P}\ \vec{Q} + \vec{P}\ \vec{R}$ (51)

অর্থাৎ, স্কেলার গুণফল বণ্টন সূত্র মেনে চলে।

১·১৮ ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে

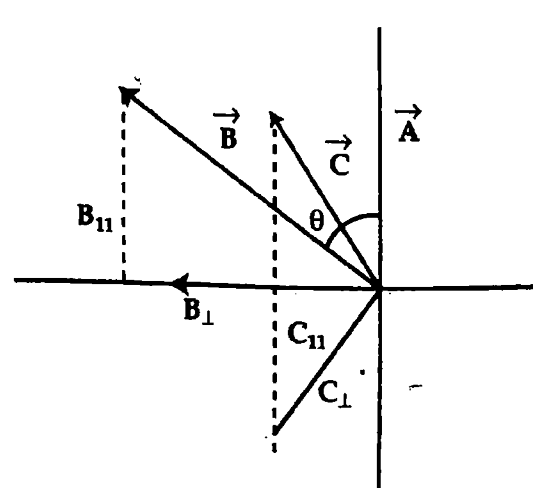
বণ্টন সূত্র ঃ $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

প্রমাণ ঃ ভেক্টর $\vec{B}$-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করি [চিত্র ১.৩৯]। B_{11} উপাংশটি $\vec{A}$-এর সমান্তরালে এবং $B_{\perp}$ উপাংশটি $\vec{A}$-এর অভিলম্ব বরাবর। তাহলে $\vec{B} = \vec{B}_{11} + \vec{B}_{\perp}$। এখন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $B_{\perp} = B\sin\theta$। অতএব, $\vec{A}\times\vec{B}_{\perp}$ ভেক্টরের মান হবে $AB_{\perp}\sin\theta$ যা $\vec{A}\times\vec{B}$-এর মানের সমান এবং $\vec{A}\times\vec{B}_{\perp}$ ভেক্টরের দিক ও $\vec{A}\times\vec{B}$-এর দিক একই।

সুতরাং $\vec{A}\times\vec{B}_{\perp} = \vec{A}\times\vec{B}$

অনুরূপভাবে, $\vec{C}$-কে $\vec{A}$-এর সমান্তরাল ও অভিলম্ব বরাবর যথাক্রমে $\vec{C}_{11}$ ও $\vec{C}_{\perp}$ উপাংশে বিভাজিত করলে দেখানো যায়, $\vec{A}\times\vec{C}_{\perp} = \vec{A}\times\vec{C}$।

ভেক্টর যোগের উপাংশ সূত্রানুসারে আবার যেহেতু,



চিত্র ১.৩৯

$$\vec{B}+\vec{C} = \vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{11} + \vec{C}_{\perp} + \vec{C}_{11}$$
$$= (\vec{B}_{\perp} + \vec{C}_{\perp}) + (\vec{B}_{11} + \vec{C}_{11})$$

অতএব, $\vec{A}\times(\vec{B}_{\perp} + \vec{C}_{\perp}) = \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})$

এখন, $B_\perp$ এবং $C_\perp$ ভেক্টরদ্বয় $\vec{A}$-এর উপর লম্ব।

$$\vec{A} \times (\vec{B}_\perp + \vec{C}_\perp) = \vec{A} \times \vec{B}_\perp + \vec{A} \times \vec{C}_\perp$$

অতএব, $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$ (প্রমাণিত) (52)

১.১৯ কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্র

$\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি এবং m ও n দুটি স্কেলার রাশি হলে ঃ

(১) $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$ [বিনিময় সূত্র]

(২) $(\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{R} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{R})$ [সংযোগ সূত্র]

(৩) $m\vec{P} = \vec{P}m$ [বিনিময় সূত্র]

(৪) $m(n\vec{P}) = mn\vec{P}$ [সংযোগ সূত্র]

(৫) $(m + n)\vec{P} = m\vec{P} + n\vec{P}$ [বণ্টন সূত্র]

(৬) $n(\vec{P} + \vec{Q}) = n\vec{P} + n\vec{Q}$ [বণ্টন সূত্র]

(৭) $\vec{P}.(\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P}.\vec{Q} + \vec{P}\ \vec{R} = \vec{Q}.\vec{P} + \vec{R}.\vec{P}$

(৮) $n(\vec{P}.\vec{Q}) = (n\vec{P}).\vec{Q} = \vec{P}.(n\vec{Q}) = (\vec{P}.\vec{Q})n$

(৯) $\vec{P} \times (\vec{Q} + \vec{R}) = \vec{P} \times \vec{Q} + \vec{P} \times \vec{R}$ [বণ্টন সূত্র]

(১০) $m(\vec{P} \times \vec{Q}) = (m\vec{P}) \times \vec{Q} = \vec{P} \times (m\vec{Q}) = (\vec{P} \times \vec{Q})m$

১.২০ স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশির মধ্যে পার্থক্য
Distinction between scalar quantity and vector quantity

স্কেলার রাশি	ভেক্টর রাশি
১। যে রাশির শুধু মান আছে দিক নেই তাকে স্কেলার বা অদিক রাশি বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, আয়তন, দ্রুতি, তাপমাত্রা, কাজ ইত্যাদি।	১। যে রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে তাকে ভেক্টর বা দিক রাশি বলে। যেমন সরণ, ত্বরণ, বেগ, বল ইত্যাদি।
২। সাধারণ গাণিতিক নিয়মে স্কেলার রাশি যোগ, বিয়োগ বা গুণন করা যায়।	২। সাধারণ গাণিতিক নিয়মে সাধারণত দুটি ভেক্টর রাশির যোগ, বিয়োগ বা গুণন করা যায় না।
৩। স্কেলার রাশি শুধু তার মানের পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয়।	৩। ভেক্টর রাশি তার মান অথবা দিক অথবা মান ও দিক উভয়ের পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয়।
৪। দুটি স্কেলার রাশির কোন একটি শূন্য না হলে এদের স্কেলার গুণফল কখনও শূন্য হয় না।	৪। দুটি ভেক্টর রাশির কোন একটির মান শূন্য না হলেও এদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হতে পারে।
৫। দুটি স্কেলার রাশির গুণনে সর্বদা একটি স্কেলার রাশি পাওয়া যায়।	৫। দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল একটি ভেক্টর রাশি অথবা একটি স্কেলার রাশি হতে পারে।

১·২০ ভেক্টর রাশির দুই প্রকার গুণনের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between two kinds of vector multiplication

ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণনের মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য করা যায়।

ভেক্টর গুণন	স্কেলার গুণন
১। দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি ভেক্টর রাশি হলে, ঐ গুণনকে রাশি দুটির ভেক্টর গুণন এবং গুণফলকে রাশি দুটির ভেক্টর গুণফল বলে।	১। দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হলে ঐ গুণনকে ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণন বলে এবং গুণফলকে ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল বলে।
২। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি হলে, $\lvert\vec{P}\times\vec{Q}\rvert = PQ\sin\alpha$ এবং $\vec{P}\times\vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ\sin\alpha$ এখানে, α = রাশি দুটির মধ্যবর্তী কোণ এবং $\hat{\eta}$ = $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার অভিলম্বভাবে একটি একক দিক রাশি।	২। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি হলে, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha$
৩। দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল বিনিময় সূত্র মানে না। যেমন, $\vec{P}\times\vec{Q} \neq \vec{Q}\times\vec{P}$	৩। দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল বিনিময় সূত্র মেনে চলে। যেমন $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$
৪। দুটি ভেক্টর রাশির উভয়ের মান শূন্য না হলেও তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হতে পারে যদি রাশি দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হয়।	৪। দুটি ভেক্টর রাশির উভয়ের মান শূন্য না হলেও তাদের স্কেলার গুণফল শূন্য হতে পারে যদি রাশি দুটি পরস্পর সমকোণে ক্রিয়া করে।

১·২১ ভেক্টর ব্যবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ
Vector-differentiation or vector derivatives

ভেক্টর ব্যবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ আলোচনার পূর্বে কয়েকটি প্রয়োজনীয় বিষয় জানা দরকার।

(ক) ক্যালকুলাস (Calculus) : বিজ্ঞানের ভাষায় ক্যালকুলাস হল অবিরত পরিবর্তনশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ গণনার একটি শাস্ত্র। আধুনিক গণিতে এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা।

ক্যালকুলাস দুভাগে বিভক্ত—(১) ব্যবকলন ক্যালকুলাস (Differential calculus), (২) সমাকলন ক্যালকুলাস (Integral calculus)

(খ) অপারেটর (Operator) : অপারেটর একটি ইংরেজি শব্দ। এর অভিধানগত অর্থ হল **'চালক'** বা **'সংঘটক'** বা **'কার্যকারক'**। কিন্তু বিজ্ঞানের ভাষায় বলা হবে— অপারেটর এক ধরনের প্রতীক বা সংকেত। এর নিজস্ব কোন মান নেই। যেমন বর্গ (^{2}), ঘন (^{3}), বর্গমূল ($\sqrt{\ }$), sine, log ইত্যাদি। তবে এরা যখন অন্য কোন রাশির সাথে যুক্ত হয় তখন একটি নির্দিষ্ট মান বহন করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $\sqrt{25} = 5$, $\sin 30° = 0{\cdot}5$ ইত্যাদি। আরও সোজা কথায় বলা যেতে পারে $(10\times)$ চিহ্নটির কোন মান হয় না। কিন্তু (10×5) চিহ্নটির মান $= 50$। এর অর্থ 10-কে 5 দ্বারা গুণ করা। এখন যদি $(10\times)$ চিহ্নকে C দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $10\times5 = C5$ হয়। অতএব C একটি অপারেটর।

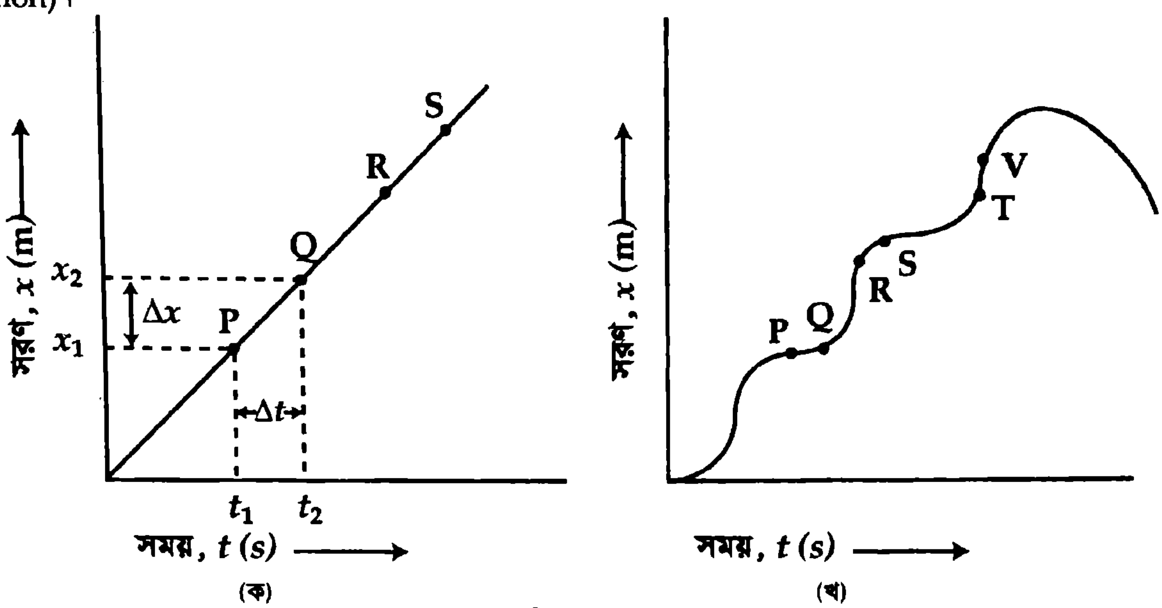
সংজ্ঞা : যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোন পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

উল্লেখ্য, ব্যবকলন একটি অপারেটর। t-সাপেক্ষে এই অপারেটর $\frac{d}{dt}$, x-সাপেক্ষে $\frac{d}{dx}$, y-সাপেক্ষে $\frac{d}{dy}$ ইত্যাদি। সমাকলনও একটি অপারেটর। এর চিহ্ন $\int$ অথবা Σ। ভেক্টর ব্যবকলন অপারেটর $\vec{\nabla}$ চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এ চিহ্নকে 'ডেল' উচ্চারণ করা হয়। বিভিন্ন উপাংশের সাহায্যে একে নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

যেহেতু স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশিকেই ব্যবকলন করা যায়, সেহেতু ব্যবকলন অপারেটর স্কেলার এবং ভেক্টর উভয় প্রকার রাশির ক্ষেত্রেই কার্যকর।

ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে ব্যবকলন (Differentiation of vectors with respect to time) : সময়ের সাথে কোন ভেক্টর রাশির পরিবর্তন হলে ঐ রাশির ব্যবকলন করাকে ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে ব্যবকলন করা বুঝায়। যেমন গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$, সময় t-এর উপর নির্ভর করে। এখানে ভেক্টর $\vec{r}$ সময় t-এর অপেক্ষক (function)।



চিত্র ১·৪০

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, একটি বাস সমতল ও সোজা রাস্তার উপর দিয়ে উত্তর দিক থেকে দক্ষিণ দিকে ছুটে চলেছে। বাসটি ১ম সেকেন্ডে 2m, ২য় সেকেন্ডে 4m, ৩য় সেকেন্ডে 6m এভাবে চলছে। তখন আমরা বলি যে বাসটির সরণ $\vec{x}$ সবসময় সমান। এখন বাসটির সরণ $\vec{x}$-কে Y-অক্ষে এবং সময় t-কে X-অক্ষে স্থাপন করে লেখচিত্র অংকন করলে এটি সরলরেখা হবে [চিত্র ১·৪০(ক)]।

এই সরলরেখার যে কোন দুটি বিন্দু P ও Q হতে X ও Y-অক্ষের উপর লম্ব টেনে Δx ও Δt বের করতে পারি। Δx ও Δt-এর অনুপাত অর্থাৎ ঢাল $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ হবে বাসের বেগ। এই সরলরেখার ঢাল সর্বত্র একই মানের হবে; অর্থাৎ বেগ সর্বত্র সমান। অর্থাৎ যে কোন সময় ব্যবধানের জন্য (তা যতই ক্ষুদ্র হক) বেগ সমান হবে। এ অবস্থায় আমরা বলি যে, বাসটির গড় বেগ ও তাৎক্ষণিক বেগ সমান। কিন্তু বাসটি যদি বাঁকা ও উঁচু-নিচু রাস্তায় চলে এবং ঘন ঘন বাসের বেগ কম-বেশি করতে হয়, তবে সরণ $\vec{x}$ বনাম সময় t লেখচিত্রটি সরলরেখা না হয়ে বক্ররেখা (curve) হবে [চিত্র ১·৪০ (খ)]। এক্ষেত্রে রেখার যে কোন দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী ঢাল অন্য বিন্দুদ্বয়ের ঢালের সমান হবে না। অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ ভিন্ন ভিন্ন হবে। এবার সময় ব্যবধান Δt যদি অত্যন্ত ক্ষুদ্র ধরা হয়, তবে সরণের পরিবর্তনের হার অর্থাৎ বেগ ঐ স্থানের প্রকৃত বেগের প্রায় কাছাকাছি হবে। Δt যদি শূন্যের কাছাকাছি হয়, তবে $\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ প্রকৃত বেগ হবে।

অর্থাৎ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \vec{v}$, প্রকৃত বেগ (53)

ক্যালকুলাসের ভাষায়,

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ লেখা হয়। (54)

এটিই ভেক্টরের সময় সাপেক্ষে ব্যবকলন। $\vec{x}$ হল সরণ ভেক্টর এবং $\frac{d}{dt}$ হল অপারেটর।

সমীকরণ (54)-এ সরণ $\vec{x}$ ভেক্টর রাশি এবং সময় t স্কেলার রাশি। সুতরাং, কোন স্কেলারের সাপেক্ষে ভেক্টরের ব্যবকলন ভেক্টর হয় (যেমন এক্ষেত্রে বেগ $\vec{v}$)। স্কেলার রাশির ব্যবকলন স্কেলার রাশি হবে।

এখন $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে লেখা যায়,

$\vec{x} = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1$, এখানে x_1, y_1, z_1 হল যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষের দিকে $\vec{x}$ ভেক্টরের উপাংশের মান। x_1, y_1, z_1 উপাংশগুলো সময় t-এর অপেক্ষক কিন্তু $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ধ্রুবক এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের কোন পরিবর্তন নেই ; অর্থাৎ এদের পরিবর্তনের হার শূন্য। অতএব $\hat{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে এর ব্যবকলন হবে,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{i}\frac{dx_1}{dt} + \hat{j}\frac{dy_1}{dt} + \hat{k}\frac{dz_1}{dt} \qquad (55)$$

অবস্থান ভেক্টর হতে বেগ ও ত্বরণ প্রতিপাদন ঃ

ধরা যাক, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর।

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ $\vec{v}$ বলা হয়।

সুতরাং, $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \qquad (56)$$

আবার, অতি ক্ষুদ্র সময়ে বেগ $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হার হল ত্বরণ $\vec{a}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \qquad (57)$$

কোন স্কেলার রাশিকে ব্যবকলন করার সাধারণ নিয়ম নিম্নরূপ ঃ

(ক) প্রথমে চল রাশিটির সহগ সংখ্যাকে ঘাত দ্বারা গুণন করতে হবে।

(খ) পরে চল রাশির ঘাতের মান হতে '1' বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ ঃ মনে করি, দূরত্ব $s = 16t^2$। এখানে সহগ 16, t চল রাশি এবং 2 হল ঘাত। উপরের নিয়ম অনুসারে প্রথমে সহগ 16-কে ঘাত 2 দ্বারা গুণন করে পাওয়া যাবে 32 এবং চল রাশির ঘাত 2 হতে 1 বিয়োগ করলে পাওয়া যাবে 1।

$$\frac{ds}{dt} = v = 32t$$

১·২২ ভেক্টরের সমাকলন
Integration of vectors

ভেক্টরের সাধারণ সমাকলন স্কেলার রাশির মতই হয়। মনে করি

$\vec{A}(t) = \hat{i}A_x(t) + \hat{j}A_y(t) + \hat{k}A_z(t)$ ভেক্টরটি একটি মাত্র স্কেলার চলরাশি t-এর কলন তাহলে

$$\int \vec{A}(t)\,dt = \hat{i}\int A_x(t)\,dt + \hat{j}\int A_y(t)\,dt + \hat{k}\int A_z(t)\,dt \text{ হবে।} \qquad (58)$$

একে $\vec{A}(t)$-এর অনিশ্চিত সমাকলন (Indefinite integral) বলে। যদি এমন কোন ভেক্টর $\vec{B}(t)$ থাকে t সাপেক্ষে যার অবকল গুণাঙ্ক $\vec{A}(t)$-এর সমান অর্থাৎ যদি $\vec{A}(t) = d\vec{B}(t)/dt$ হয়, তা হলে $\int \vec{A}(t)\,dt = \vec{B}(t) + \vec{C}$ হবে।

এখানে $\vec{C}$ হল t নিরপেক্ষ স্বেচ্ছিক কোন ভেক্টর।

এরূপ ক্ষেত্রে $t = a$ হতে $t = b$ সীমার মধ্যে $\vec{A}(t)$- এর নিশ্চিত সমাকলন (Definite integral) হবে

$$\begin{aligned}\int_a^b \vec{A}(t)\,dt &= \int_a^b \frac{d\vec{B}(t)dt}{dt} \\ &= \int_a^b d\vec{B}(t) \\ &= [\vec{B}(t) + \vec{C}]_a^b \\ &= \vec{B}(b) - \vec{B}(a) \qquad (59)\end{aligned}$$

ব্যবকলন সংক্রান্ত কয়েকটি সূত্র :

মনে করি, y এবং z হল x-এর অপেক্ষক এবং m এবং n হল ধ্রুব সংখ্যা। অতএব,

$$\frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{d}{dx}(my) = m\frac{dy}{dx} \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{d}{dx}(y + z) = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} \qquad \text{(iii)}$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \text{(iv)}$$

$$\frac{d}{dx}(yz) = y\frac{dz}{dx} + z\frac{dy}{dx} \qquad \text{(v)}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \text{(vi)}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \text{(vii)}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx \qquad \text{(viii)}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx \qquad \text{(ix)}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \text{(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x} \qquad \text{(xi)}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{nx}) = ne^{nx}। \qquad \text{(xii)}$$

স্মরণিকা

ভেক্টর রাশি : যে সব ভৌত রাশির দিক ও মান উভয়ই আছে তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলা হয়।

স্কেলার রাশি : যে সব ভৌত রাশির মান আছে কিন্তু দিক নেই তাদেরকে স্কেলার রাশি বলা হয়।

একক ভেক্টর রাশি : যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর রাশি বলে।

লব্ধি ও অংশক বা উপাংশ : দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির যোগফলকে লব্ধি এবং রাশিগুলোকে লব্ধির অংশক বা উপাংশ বলা হয়।

অবস্থান ভেক্টর : কোন বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

নাল বা শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু একই।

আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর : ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ একক ভেক্টরগুলোকে আয়তাকার বা আয়ত একক ভেক্টর বলে।

সম-ভেক্টর বা সমান ভেক্টর : একই দিকে ক্রিয়ারত একাধিক সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে সম-ভেক্টর বা সমান ভেক্টর বলে।

বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর : বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে একে অপরের বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর বলে।

স্বাধীন ভেক্টর : কোন ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু কোথায় হবে তা যদি ইচ্ছেমত ঠিক করা যায়, তবে ঐ ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।

সীমাবদ্ধ ভেক্টর : যদি কোন নির্দিষ্ট বিন্দুকে ভেক্টরের পাদবিন্দু হিসেবে ঠিক করে রাখা হয়, তবে তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে।

সদৃশ ভেক্টর : সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে।

বিপ্রতীপ ভেক্টর : দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে।

সমরেখ ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে, তবে তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে।

সমতলীয় ভেক্টর : দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।

ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ ও উপাংশ : একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াকে ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ বলে। এই বিভক্ত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি উপাংশ বা অংশক বলে।

ত্রিভুজ সূত্র : দুটি ভেক্টর কোন ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু দ্বারা একই ক্রমে মানে ও দিকে সূচিত করা হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীত ক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করে।

ভেক্টর যোগের সামন্তরিক সূত্র : কোন সামন্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত সন্নিহিত বাহু দুটি যদি কোন কণার উপরে একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে তা হলে ঐ বিন্দু হতে অঙ্কিত সামন্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে। একে ভেক্টর রাশির যোজনের সামন্তরিক সূত্র বলে।

স্কেলার গুণন বা ডট গুণন : দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি হবে যার মান রাশি দুটির মানের গুণফলের সাথে তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান।

ভেক্টর বা ক্রস গুণন : দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয় তবে ঐ গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এ ভেক্টরের গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine)-এর গুণফলের সমান। ভেক্টর গুণফলের দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

অপারেটর : যে গাণিতিক চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোন পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেওয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

দুটি ভেক্টরের যোজন :

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$|\vec{R}| = R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{(P + Q\cos\alpha)} \qquad \ldots (3)$$

$$\text{একক ভেক্টর} = \frac{\text{ভেক্টর}}{\text{ভেক্টরের মান}} \; ; \text{ বা } \hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (4)$$

$$\boxed{\hat{a} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}} \qquad (5)$$

একটি ভেক্টরকে উপাংশে প্রকাশ : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ (6)

বা, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

ভেক্টরের মান : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ... (7)

বা, $\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$

ভেক্টর বিভাজন : $\boxed{\dfrac{P}{\sin\alpha} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin(\alpha+\beta)}}$ (8)

লম্ব উপাংশে বিভাজন : $P = R\sin\alpha$ এবং $Q = R\cos\alpha$ ... ... (9)

ভেক্টর যোগের উপাংশ সূত্র : $\boxed{\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}}$ ... (10)

ভেক্টর বিয়োগের উপাংশ সূত্র: $\boxed{\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}}$ ... (11)

দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন :

$$\boxed{\vec{P}.\vec{Q} = |\vec{P}|\,|\vec{Q}|\cos\alpha} \ldots \qquad (12)$$

$$\boxed{\vec{A}\ \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \qquad (13)$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}} \qquad (14)$$

দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণন :

$\boxed{\vec{P}\times\vec{Q} = \hat{\eta}\,|\vec{P}|\,|\vec{Q}|\,\sin\alpha}$ ($\hat{\eta}$ একক ভেক্টরের দিক হচ্ছে $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ এর উপরে লম্ব) (15)

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (16)$$

$\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ -এর পারস্পরিক ডট এবং ক্রস গুণন :

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1 \qquad (17)$$

$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0 \qquad (18)$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0 \qquad (19)$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}\ ;\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}\quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \qquad (20)$$

ভেক্টর ব্যবকলন

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}} \qquad (21)$$

সমাধানকৃত উদাহরণ

P

১। দুটি ভেক্টর রাশির প্রত্যেকটির মান 5 একক। তারা একই বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর।

মনে করি লব্ধি $= R$

আমরা পাই, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে আমরা পাই,

এখানে, $P = 5$ একক
$Q = 5$ একক
মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 120°$

$$R = \sqrt{(5)^2 + (5)^2 + 2 \times 5 \times 5 \times \cos 120°}$$

$$= \sqrt{25 + 25 + 50 \times (-1/2)}$$

$$= \sqrt{50 - 25} = \sqrt{25} = 5 \text{ একক।}$$

আবার, $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \dfrac{5\sin 120°}{5 + 5\cos 120°}$ যেখানে θ হচ্ছে ভেক্টর $\vec{P}$ এবং লব্ধি $\vec{R}$-এর মধ্যবর্তী কোণ

$$= \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{5 - \frac{5}{2}} \qquad \left[\begin{array}{l} \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120° = -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

বা, $\tan\theta = \dfrac{5 \times \sqrt{3} \times 2}{5 \times 2} = \sqrt{3} = \tan 60° \qquad \theta = 60°$

P

অর্থাৎ লব্ধির মান 5 একক এবং যা ভেক্টর $\vec{P}$ এর সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।

২। দুটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তর লব্ধি 28 একক ও ক্ষুদ্রতর লব্ধি 4 একক। রাশি দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে কোন একটি কণার উপর ক্রিয়া করল। লব্ধির মান নির্ণয় কর।

দুটি ভেক্টর রাশি P ও Q একই দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি বৃহত্তর হয় ও পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি ক্ষুদ্রতর হয়।

বৃহত্তর লব্ধি $= P + Q = 28$ (1)

এবং ক্ষুদ্রতর লব্ধি $= P - Q = 4$ (2)

সমীকরণ (1) ও (2)-এর যোজন ও বিয়োজন হতে পাওয়া যায়, $P = 16$ একক ও $Q = 12$ একক।

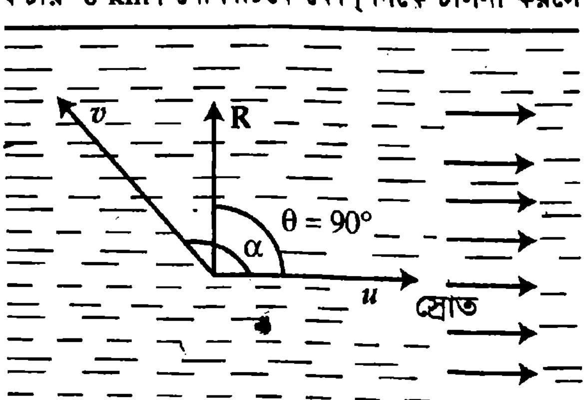
আবার, আমরা পাই, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

এখানে, $\alpha = 90°$

$$R = \sqrt{16^2 + 12^2 + 2 \times 16 \times 12 \times \cos 90°}$$

$$= \sqrt{256 + 144 + 0} = \sqrt{400} = 20 \text{ একক}$$

৩। কোন একটি নদীতে একটি দাঁড়ের নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 18 km এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় 6 km। নৌকাটিকে কোন্ দিকে চালনা করলে তা সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে এবং নৌকাটি কত বেগে চলবে?



চিত্র ১.৪১

ধরা যাক স্রোতের বেগ $= u$ এবং দাঁড়ের বেগ $= v$। তা হলে $u + v = 18$ এবং $v - u = 6$.

সমীকরণ দুটির যোজন ও বিয়োজনে পাওয়া যায়,

$v = 12 \text{ km h}^{-1}$ এবং $u = 6 \text{ km h}^{-1}$।

ধরা যাক স্রোতের সাথে α কোণ করে নৌকাটিকে চালনা করলে তা R বেগে চলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে। তা হলে স্রোতের গতি বরাবর R-এর অংশ,

$$R\cos 90° = 0 = u\cos 0° + v\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{u}{v} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$$

বা, $\alpha = 120°$

$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$P = 6, Q = 12, \alpha = 12$

$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{P}{Q}\right)$

আবার, স্রোতের গতিমুখের লম্ব দিক বরাবর R-এর অংশ, $R \sin 90^\circ = R = u \sin 0^\circ + v \sin \alpha$

$$R = v \sin\alpha = v\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 12\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 6\sqrt{3} = 10.39 \text{ km h}^{-1}$$

৪। ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান একটি গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। (ক) ট্রাকটি কোন্ দিকে চলছে এবং (খ) ট্রাকটির প্রকৃত বেগ কত? [চ. বো. ২০০২]

মনে করি ট্রাকটি উত্তর দিকের সাথে θ কোণে পূর্বদিকে চলছে। ত্রিভুজ সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$$\vec{V}_T = \vec{V}_{TC} + \vec{V}_C$$

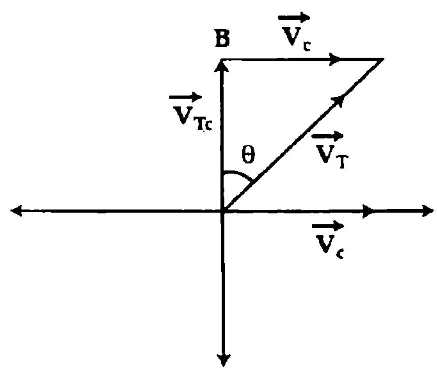
$$V_T^2 = V_{TC}^2 + V_C^2$$

বা, $$V_T = \sqrt{V_{TC}^2 + V_C^2}$$

$$= \sqrt{(40\sqrt{3})^2 + (40)^2}$$

$$= \sqrt{40^2(4)} = 2 \times 40$$

$$= 80 \text{ kmh}^{-1}$$



চিত্র ১.৪২

এখানে,
গাড়ির প্রকৃত বেগ,
$V_C = 40 \text{ kmh}^{-1}$
গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ,
$V_{TC} = 40\sqrt{3} \text{ kmh}^{-1}$
ট্রাকের প্রকৃত বেগ,
$V_T = ?$

আবার, $$\tan\theta = \frac{V_C}{V_{TC}} = \frac{40}{40\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$

$$\theta = 30^\circ$$

উত্তর ঃ $V_T = 80 \text{ kmh}^{-1}$ এবং $\theta = 30^\circ$

৫। P ও Q দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, − 4, 5) ও (2, 3, − 1)। (i) এদের অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর ; (ii) PQ ভেক্টর রাশি এবং এর মান বের কর।

(i) মনে করি P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_1}$ এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_2}$।

আমরা জানি, $\vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ (1)

এখানে $x_1 = 3$, $y_1 = -4$ ও $z_1 = 5$

∴ সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\vec{r_1} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

আবার, $\vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ (2)

এখানে, $x_2 = 2$, $y_2 = 3$ ও $z_2 = -1$

সমীকরণ (2) হতে পাই, $\vec{r_2} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

(ii) $$\vec{PQ} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$= (2-3)\hat{i} + \{3-(-4)\}\hat{j} + (-1-5)\hat{k}$$

$$= -\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + (7)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{1+49+36} = \sqrt{86}$$

৬। $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টর রাশিটির মান এবং $\vec{A}$ -এর দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ হলে, এর মান

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

প্রদত্ত দিক রাশিটির মান

$$A = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

ধরা যাক, $\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}}{7} = \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$$

৭। $\vec{A} = 8\hat{i} - 4\hat{j}$ এবং $\vec{B} = \hat{j} - 4\hat{i}$ দুটি ভেক্টর দেয়া আছে।

(ক) $\vec{A}$-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $\vec{B}$-এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $\vec{A} + \vec{B}$-এর মান নির্ণয় কর।

(ঘ) $\vec{A} - \vec{B}$-এর মান নির্ণয় কর।

(ঙ) $\vec{A} \cdot \vec{B}$-এর মান নির্ণয় কর।

(চ) $\vec{A} \times \vec{B}$-এর মান নির্ণয় কর।

(ক) $\vec{A}$-এর মান $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$
$= \sqrt{8^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{80}$
$= 4\sqrt{5}$

এখানে, $A_x = 8, A_y = -4$

(খ) $\vec{B}$-এর মান $|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + (1)^2}$
$= \sqrt{17}$

এখানে, $B_x = -4, B_y = 1$

(গ) $(\vec{A} + \vec{B}) = 8\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{j} - 4\hat{i} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$

এখানে, $A_x = 4, B_x = -3$

$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5$

(ঘ) $(\vec{A} - \vec{B}) = 8\hat{i} - 4\hat{j} - (\hat{j} - 4\hat{i})$

এখানে, $A_x = 12, A_y = -5$

$= 8\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{j} + 4\hat{i} = 12\hat{i} - 5\hat{j}$

$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$

(ঙ) $|\vec{A} \cdot \vec{B}| = A_xB_x + A_yB_y$
$= 8 \times (-4) + (-4) \times 1 = -32 - 4 = -36$

(চ) $\vec{A} \times \vec{B} = (8\hat{i} - 4\hat{j}) \times (\hat{j} - 4\hat{i})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 8 & -4 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= i(0) + j(0) + \hat{k}(8 - 16) = -8\hat{k}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$

৮। যদি $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ হয় তবে দেখাও যে,

$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ [ব. বো. ২০০৫, ২০০১; রা. বো. ২০০৪, ২০০০; চ. বো. ২০০১]

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\,.\,(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= A_xB_x\hat{i}\,\hat{i} + A_xB_y\,\hat{i}\,.\,\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i}\,.\,\hat{k} + A_yB_x\,\hat{j}\,.\,\hat{i} + A_yB_y\,\hat{j}\,.\,\hat{j} + A_yB_z\,\hat{j}\,.\,\hat{k} + A_zB_x\,\hat{k}\,.\,\hat{i}$$

$$+ A_zB_y\,\hat{k}.\hat{j} + A_zB_z\,\hat{k}.\hat{k}$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \text{ (প্রমাণিত)} \qquad \left[\begin{array}{l} \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}\,.\hat{k} = \hat{k}.\,\hat{i} = 0 \\ \text{এবং}\ \hat{i}\;\;\hat{i} = \hat{j}\,.\,\hat{j} = \hat{k}\,.\,\hat{k} = 1 \end{array}\right]$$

৯। $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। দেখাও যে, এরা পরস্পর সমান্তরাল।

আমরা জানি $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হলে ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর সমান্তরাল হবে।

প্রশ্নানুযায়ী $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\eta}\,AB\sin\alpha = 0$ হতে হবে।

এখানে, $$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(3-3) + \hat{j}\,(3-3) + \hat{k}\,(3-3)$$
$$= 0\,.$$

$\therefore\ \vec{A} \times \vec{B} = \hat{\eta}\ |\vec{A}|\,|\vec{B}|\ \sin\alpha = 0$

কিন্তু, $A \neq 0$ ও $B \neq 0$ $\qquad \sin\alpha = 0 = \sin 0°$

$\alpha = 0°$ অর্থাৎ, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর সমান্তরাল।

১০। দুটি ভেক্টরের যোগফল $\vec{A} + \vec{B} = 12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$ এবং বিয়োগফল $\vec{A} - \vec{B} = -6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ নির্ণয় কর এবং এদের স্কেলার গুণন নির্ণয় কর।

$$(\vec{A} + \vec{B}) + (\vec{A} - \vec{B}) = (12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}) + (-6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k})$$

বা, $$2\vec{A} = 12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k} - 6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 18\hat{k}$$

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}$$

পুনরায়, $$(\vec{A} + \vec{B}) - (\vec{A} - \vec{B}) = (12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}) - (-6\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k})$$

বা, $$2\vec{B} = 12\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k} + 6\hat{i} - 12\hat{j} - 10\hat{k}$$
$$= 18\hat{i} - 16\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore\ \vec{B} = 9\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A}\,.\vec{B} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 9\hat{k}).(9\hat{i} - 8\hat{j} - \hat{k})$$
$$= 27\hat{i}\,.\,\hat{i} - 32\,\hat{j}\,.\,\hat{j} - 9\,\hat{k}\,.\,\hat{k}$$
$$= 27 - 32 - 9 = 27 - 41 = -14$$

১১। $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব। [রা. বো. ২০০১]

আমরা জানি, $\vec{A}\,.\,\vec{B} = 0$ হলে ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হবে।

প্রশ্নানুযায়ী, $\vec{A}\,.\,\vec{B} = AB\cos\theta = 0$ হতে হবে।

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = 9\times4 + (1\times-6) + (-6\times5) = 36 - 6 - 30 = 0$$

যেহেতু $\vec{A}\,.\,\vec{B} = 0$, কিন্তু $A \neq 0$ ও $B \neq 0$; $\qquad \cos\theta = 0 = \cos 90°$

অতএব ভেক্টর দুটি পরস্পরের উপর লম্ব।

Q.V

১২। $P = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}, Q = -2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থান করে তার উল্লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ২০০৪]

$\vec{P} \times \vec{Q}$ একটি ভেক্টর যা $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর তলে লম্ব।

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(9-8) + \hat{j}(-4-6) + \hat{k}(-4-3) = \hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$$

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর রাশি $= \hat{n}$

$$\hat{n} = \frac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-7)^2}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{1 + 100 + 49}}$$

$$= \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{150}}$$

১৩। ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$-এর উপর $\vec{Q} = 4\hat{j} + 5\hat{k}$-এর লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৪]

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}$-এর উপর $\vec{Q}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta$

আমরা জানি, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$$Q\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{|P|} = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}|}$$

এখন, $\vec{P}.\vec{Q} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}).(4\hat{j} + 5\hat{k})$

$$= 2 \times 0 + (-3) \times (4) + (1) \times (5)$$

$$= -12 + 5 = -7$$

এবং $|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$

$$= \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$Q\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{14}}$$

১৪। $\vec{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর।

$\vec{a} \times \vec{b}$ একটি ভেক্টর রাশি। এটি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$-এর তলে লম্ব।

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(6+9) + \hat{j}(-12+2) + \hat{k}(6+24) = 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$$

মনে করি $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর রাশি $= \hat{\eta}$

$$\hat{\eta} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

$$= \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{\sqrt{(15)^2 + (-10)^2 + (30)^2}}$$

$$= \frac{15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}}{35}$$

$$= \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{2}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$$

১৫। $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ও $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টর রাশিদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর রাশি নির্ণয় কর।

মনে করি ভেক্টর রাশিদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর $\vec{C}$ এবং এই ভেক্টর রাশির সমান্তরাল একক ভেক্টর রাশি = $\hat{C}$

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} \qquad (1)$$

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর

$$\vec{C} = (4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) + (-2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

$$= 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

এবং $\vec{C}$-এর মান $C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (2)^2}$

$$= \sqrt{9} = 3$$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\hat{C} = \frac{2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

একক ভেক্টর রাশিটি $= \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$

১৬। $\vec{A} = \hat{i} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$. ভেক্টরদ্বয়ের অভিলম্ব দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৫]

ধরি, ভেক্টরদ্বয়ের অভিলম্ব দিকে একক ভেক্টর = $\hat{\eta}$

আমরা পাই,

$$\hat{\eta} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} \qquad (1)$$

$\vec{A} = \hat{i} - \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}(0+1) + \hat{j}(-1-0) + \hat{k}(1-0)$$

$$= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

এবং $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

সমীকরণ (1) থেকে পাই,

$$\hat{\eta} = \frac{\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

১৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।
[রা. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০৫, ২০০১; সি. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩]

এখানে,

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$

বা, $(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}\ \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (2)^2}\cos\theta$$

বা, $12-6-2=\sqrt{4+4+1}\ \sqrt{36+9+4}\cos\theta$ BG & JEWEL

বা, $4=\sqrt{9}\times\sqrt{49}\cos\theta$

বা, $4=3\times 7\times\cos\theta$

বা, $4=21\cos\theta$

বা, $\cos\theta=\frac{4}{21}$

বা, $\cos\theta=0.190476$

বা, $\theta=\cos^{-1}0.190476$
$=79.01°$

P.V

১৮। $\vec{A}=3\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$ হলে, $\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০০৪]

মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ = θ

$\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ = $B\cos\theta$ (1)

আবার,

$\boxed{\vec{A}.\vec{B}=AB\cos\theta}$

$\therefore\ \boxed{B\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A}}$ (2)

এখানে,

$\vec{A}=3\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{B}=\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$

এখানে, $\vec{A}.\vec{B}=(3\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}).(\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k})$
$=3+4+6$
$=13$

এবং $A=\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(3)^2}=\sqrt{9+1+9}=\sqrt{19}$

$\therefore\ B\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A}=\frac{13}{\sqrt{19}}$

P.V

১৯। দেয়া আছে $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $\vec{B}=m\hat{i}+2\hat{j}-10\hat{k}$। m-এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব হবে ?
[চ. বো. ২০০১]

আমরা জানি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পরের উপর লম্ব হলে $\vec{A}.\vec{B}=0$

এখানে, $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $\vec{B}=m\hat{i}+2\hat{j}-10\hat{k}$

$(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}).(m\hat{i}+2\hat{j}-10\hat{k})=0$

বা, $2m+6+50=0$

বা, $2m+56=0$

বা, $2m=-56$

$m=-28$

P.V

২০। দেখাও যে, $\vec{A}=2\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}$ এবং $\vec{B}=3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।
[ব. বো. ২০০৪]

আমরা জানি, $\vec{A}.\vec{B}=0$ হলে ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত হবে।

$\vec{A}.\vec{B}=(2\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}).(3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})$
$=(2)\times(3)+(4)\times(-5)+(7)\times(2)$
$=6-20+14$
$=0$

যেহেতু $\vec{A}.\vec{B}=0$ এবং $|A|,|B|\neq 0$,

অতএব ভেক্টর দুটি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত।

২১। $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i} + a\hat{j} - 9\hat{k}$ । 'a'-এর মান কত হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে ?
[চ. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; রা. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০০]

যদি $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হয় তবে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে।

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = (5\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \times (15\hat{i} + a\hat{j} - 9\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ 15 & a & -9 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(-18 + 3a) - \hat{j}\,(-45 + 45) + \hat{k}\,(5a - 30)$$

$$= \hat{i}\,(-18 + 3a) + \hat{k}\,(5a - 30)$$

শর্ত মতে,

$-18 + 3a = 0$

বা, $3a = 18$

$a = 6$

এবং $5a - 30 = 0$

বা, $5a = 30$

$a = 6$

কাজেই $a = 6$ মানের জন্য ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

২২। যদি $\vec{A} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ হয় তবে $\vec{A}\ \ \vec{B}$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০০]

আমরা জানি,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$
$$= 6.2 + (-3).2 + 2.1$$
$$= 12 - 6 + 2$$
$$= 8$$

২৩। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর। দেখাও যে,

(i) ভেক্টর তিনটি একই তলে অবস্থিত [ঢা. বো. ২০০০]

(ii) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

(i) এখন, $$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(-10 + 12) - \hat{j}\,(15 - 4) + \hat{k}\,(-9 + 2)$$
$$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

পুনঃ, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k})$
$$= 4 - 11 + 7 = 11 - 11$$
$$= 0$$

সুতরাং ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত।

(ii) আবার,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}\,[(4 - 2)] - \hat{j}\,(8 + 3) + \hat{k}\,(-4 - 3)$$
$$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$$
$$= 2 + 33 - 35 = 35 - 35 = 0$$

অতএব, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ (প্রমাণিত)

BG & JEWEL

২৪। প্রমাণ কর যে, $\vec{A}\,.\,(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\,.\,\vec{B} + \vec{A}\,.\,\vec{C}$. [ব. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৪]

ধরি, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k}$$

$$\vec{B}+\vec{C} = (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) + (C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k})$$

$$= (B_x+C_x)\,\hat{i} + (B_y+C_y)\,\hat{j} + (B_z+C_z)\,\hat{k}$$

$$\vec{A}\,.\,(\vec{B}+\vec{C}) = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\,.\,\{(B_x+C_x)\,\hat{i} + (B_y+C_y)\,\hat{j} + (B_z+C_z)\,\hat{k}\}$$

$$= A_x(B_x+C_x) + A_y(B_y+C_y) + A_z(B_z+C_z)$$

$$= A_xB_x + A_xC_x + A_yB_y + A_yC_y + A_zB_z + A_zC_z$$

আবার, $\vec{A}\,.\,\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\,.\,(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}\,.\,\vec{C} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\,.\,(C_x\hat{i} + C_y\hat{j} + C_z\hat{k})$$

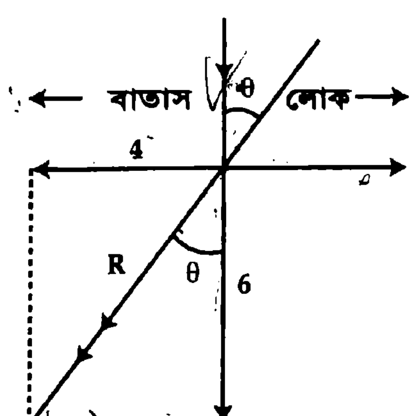
$$= A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z$$

$$\vec{A}\,\vec{B} + \vec{A}\,.\,\vec{C} = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) + (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)$$

$$= A_xB_x + A_xC_x + A_yB_y + A_yC_y + A_zB_z + A_zC_z.$$

$\vec{A}\,.\,(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\,.\,\vec{B} + \vec{A}\,.\,\vec{C}$ (প্রমাণিত)

২৫। $4\ ms^{-1}$ বেগে দৌড়ে যাবার সময় একজন লোক $6\ ms^{-1}$ বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হল। বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে হলে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?



চিত্র ১'৪৩

মনে করি বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\tan\theta = \frac{4\,ms^{-1}}{6\,ms^{-1}} = 0{\cdot}666$$

বা, $\tan\theta = \tan 33{\cdot}7^\circ$

$$\theta = 33{\cdot}7^\circ$$

সুতরাং লোকটিকে উল্লম্ব দিকের সাথে $33{\cdot}7^\circ$ কোণে ছাতা ধরতে হবে।

P,V

২৬। $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$(\vec{B} + \vec{C}) \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{A}$ [ঢা. বো. ২০০০]

$$\vec{A} + \vec{C} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} + 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

বামপক্ষ $= (\vec{B} + \vec{C}) \times \vec{A}$

$$= (3\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-2-9) - \hat{j}(6-3) + \hat{k}(9+1) = -11\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$$

আবার, $\vec{B} \times \vec{A} = (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4+3) - \hat{j}(2+1) + \hat{k}(3-2) = 7\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

এবং $\vec{C} \times \vec{A} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(-6-12) - \hat{j}(4-4) + \hat{k}(6+3) = -18\hat{i} + 9\hat{k}$$

ডানপক্ষ $= (\vec{B} \times \vec{A}) + (\vec{C} \times \vec{A})$

$$= (7\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) + (-18\hat{i} + 9\hat{k})$$

$$= -11\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$$

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

২৭। ভেক্টর $\vec{A} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$-এর উপর ভেক্টর $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$-এর অভিক্ষেপ বের কর।

মনে করি $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$$

সুতরাং $\vec{A}$-এর ওপর $\vec{B}$-এর অভিক্ষেপ

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A}$$

এখানে $\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$$= 6 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times (-2)$$
$$= 12 + 8 - 6$$
$$= 14$$

এবং $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(6)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{49} = 7$

$\vec{A}$ এর উপর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ

$$B\cos\theta = \frac{14}{7} = 2$$

২৮। $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ [কু. বো. ২০০১]

প্রমাণ করতে হবে যে, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$

বামপক্ষ $= \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{A}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})\times(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$

$$= \vec{A}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= \vec{A}\cdot\{\hat{i}\,(4+3)+\hat{j}\,(-3-2)+\hat{k}\,(1-2)\}$

$= (3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(7\hat{i}-5\hat{j}-\hat{k})$

$= 21-10-1 = 10.$

ডানপক্ষ $= (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\times(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})\cdot\vec{C}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{C}$$

$= \{(\hat{i}\,(-6-2)+\hat{j}\,(1+9)+\hat{k}\,(6-2)\}\cdot\vec{C}$

$= (-8\hat{i}+10\hat{j}+4\hat{k})\cdot(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$

$= (-8+10+8)$

$= 10$

সুতরাং বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

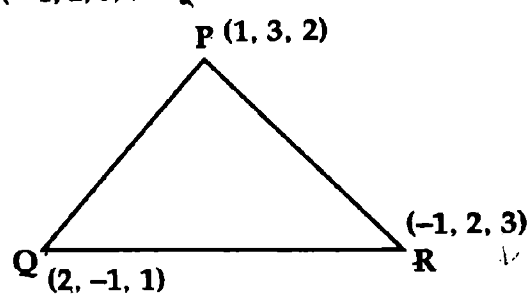
২৯। একটি ত্রিভুজের স্থানাঙ্ক P(1, 3, 2), Q(2, −1, 1), R(−1, 2, 3)। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

$\vec{PQ} = (2-1)\hat{i}+(-1-3)\hat{j}+(1-2)\hat{k}$

$= \hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$

$\vec{PR} = (-1-1)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(3-2)\hat{k}$

$= -2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$



চিত্র ১'৪৪

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{PQ}\times\vec{PR}|$

$= \frac{1}{2}(\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k})\times(-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$= \frac{1}{2}\{(-4-1)\hat{i}+(2-1)\hat{j}+(-1-8)\hat{k}\}$

$= \frac{1}{2}|(-5\hat{i}+\hat{j}-9\hat{k})|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2+(1)^2+(-9)^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{107}$

৩০। $\vec{P} = 4\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৩]

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $|\vec{P}\times\vec{Q}|$

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(4+2)+\hat{j}\,(2+4)+\hat{k}\,(-8+8)$$

$= 6\hat{i}+6\hat{j}+0\hat{k}$

$|\vec{P}\times\vec{Q}| = \sqrt{6^2+6^2+0^2}$

$= \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$

$= 8{\cdot}49$ একক

৩১। একটি কণার উপর $\vec{F} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ হয়। বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। 4 Joule [য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$W = \vec{F}\ \vec{r}$$
$$= (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$
$$= 12 - 6 - 2$$
$$= 4 \text{ Joule}$$

এখানে,

$\vec{F} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N

$\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m

W = ?

৩২। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব।

OQRP একটি রম্বস এবং OR ও QP রম্বসের কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে OR ও QP পরস্পর লম্ব।

চিত্রে OQR ত্রিভুজের

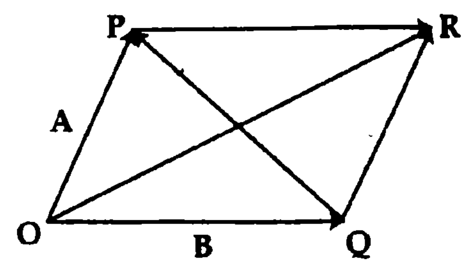
$$\vec{OR} = \vec{OQ} + \vec{QR} = \vec{B} + \vec{A} = \vec{A} + \vec{B}$$

আবার, OQP ত্রিভুজের

$$\vec{OQ} + \vec{QP} = \vec{OP}$$

বা, $\vec{B} + \vec{QP} = \vec{A}$

বা, $\vec{QP} = \vec{A} - \vec{B}$



চিত্র ১.৪৫

এখন, $\vec{OR}.\vec{QP} = (\vec{A} + \vec{B}).(\vec{A} - \vec{B})$

$= A^2 - B^2 = 0$ [∵ রম্বসের সকল বাহু সমান]

অতএব, OR ও QP পরস্পরের উপর লম্ব। (প্রমাণিত)

৩৩। অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$-কে ব্যবকলন করে কিভাবে বেগ ও ত্বরণ পাওয়া যায় ?

[ব. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০১]

এখানে, অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

আমরা জানি, অতি ক্ষুদ্র সময়ে r-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ বলা হয়। সুতরাং

বেগ, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলা হয়।

সুতরাং ত্বরণ, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

৩৪। দুটি ভেক্টর, $\vec{A} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}$ ও $\vec{B} = 5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B})$ ও $\dfrac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B})$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৪]

প্রশ্নানুযায়ী, $\vec{A}.\vec{B} = \{\hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}\}.(5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3)$

$$= 5t^3 - t^2 - (2t+1)t^3$$

BG & JEWEL

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = 15t^2 - 2t - (6t^3 + 3t^2) = -6t^3 + 12t^2 - 2t$$

পুনরায়, $$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & (2t+1) \\ 5t & t & -t^3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -t & (2t+1) \\ t & -t^3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} t^2 & (2t+1) \\ 5t & -t^3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} t^2 & -t \\ 5t & t \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) - \hat{j}(-t^5 - 10t^2 - 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + \hat{j}(5t^4 + 20t + 5) + \hat{k}(3t^2 + 10t)$$

৩৫। একই সময়ে একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টরের মান সমান। দেখাও যে, এদের লব্ধি ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [চ. বো. ২০০৫]

প্রশ্নানুসারে একই সময়ে একই বিন্দুতে ক্রিয়ারত ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান।

ধরি, ভেক্টরদ্বয় $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ α। এদের লব্ধি R, $\vec{P}$ এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে ক্রিয়া করলে, আমরা পাই,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

বা, $$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{Q + Q\cos\alpha} \qquad \Big|\; P = Q$$

$$= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin{}^{\alpha}/_2\cos{}^{\alpha}/_2}{2\cos^2{}^{\alpha}/_2}$$

$$= \tan{}^{\alpha}/_2$$

$$\therefore \quad \theta = {}^{\alpha}/_2$$

অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি বলতে কি বুঝ ? [ঢা. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০০]

২। সমরেখ ভেক্টর এবং বিসদৃশ ভেক্টর কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৪]

৩। একক ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০৪]

৪। ত্রিকোণিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় অবস্থান ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০৪]

৫। একক ভেক্টর কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০৪, ২০০৩]

৬। অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৩]

৭। সীমাবদ্ধ ভেক্টর কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৩]

৮। ব্যাসার্ধ ভেক্টর কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]

৯। আয়ত একক ভেক্টর কাকে বলে ? [ব. বো. ২০০৩]

১০। ভেক্টর রাশির বিভাজন কাকে বলে ? [য. বো. ২০০২]

১১। ভেক্টর রাশির ত্রিভুজের সূত্রটি বিবৃত কর।

১২। ভেক্টর রাশির সামান্তরিকের সূত্রটি বিবৃত কর। [ঢা. বো.২০০০; য. বো. ২০০১; রা.বো. ২০০১;ব. বো. ২০০৪]

১৩। সংজ্ঞা লিখ ঃ

অবস্থান ভেক্টর [ঢা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৫, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৫, ২০০২ ; ব. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০৫, ২০০০]

নাল ভেক্টর [চ. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২]

আয়ত একক ভেক্টর [রা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০১]

একক ভেক্টর [ঢা. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৫, ২০০২ ; সি. বো. ২০০১]

স্বাধীন ভেক্টর [য. বো. ২০০২]

১৪। ভেক্টর গুণন কাকে বলে ? [য. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০৪]

১৫। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণনের সংজ্ঞা দাও। [ব. বো. ২০০২]

১৬। ব্যাবকলনীয় অপারেটর কি ?

১৭। ভেক্টর ডেরিভেটিভ কি ?

১৮। তিনটি ভেক্টরের লব্ধি কখন শূন্য হয় ?

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। দুইটি সদিক রাশির ডট্ গুণন ও ক্রস গুণন চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০০৫]

২। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি অবস্থান ভেক্টরের রাশিমালা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০১]

৩। একক ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টরদ্বয়ের মানের অন্তরফলের সমান। [সি. বো. ২০০৫]

৪। ভেক্টর রাশির ত্রিভুজ সূত্রটি বিবৃত কর। ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে লব্ধির মান নির্ণয় কর।

৫। ভেক্টর রাশির সামান্তরিক সূত্রটি বিবৃত কর। সামান্তরিকের সূত্র প্রয়োগ করে লব্ধির মান নির্ণয় কর।
[ব. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০১]

৬। দেখাও যে, একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান যথাক্রমে রাশিদ্বয়ের মানের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান। [ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]

৭। ভেক্টর রাশির বিভাজন কাকে বলে ? কোন ভেক্টর রাশিকে যে কোন দুটি কোণে বিভাজিত করে বিশ্লিষ্টাংশদ্বয়ের রাশিমালা বের কর। [সি. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০২]

অথবা, ভেক্টর বিভাজন বর্ণনা করে ভেক্টর রাশির অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ–এর মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৬]

৮। দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণন চিত্রসহ বর্ণনা কর। [ঢা. বো. ২০০২ ; চ. বো. ২০০৬; ২০০০ ; কু. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪]

৯। দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$, α কোণে আনত। এদের স্কেলার গুণন ও ভেক্টর গুণন চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর।
[রা. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৪, ২০০২]

১০। ভেক্টর বিয়োগের নিয়মটি ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০০৩]

১১। $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$।

১২। দেখাও যে, ভেক্টর রাশির যোগ বিনিময় ও সংযোজন সূত্র মেনে চলে।

১৩। দেখাও যে, দুটি ভেক্টর রাশির ভেক্টর গুণন বিনিময় সূত্র মানে না ; কিন্তু স্কেলার গুণন বিনিময় সূত্র মানে।

১৪। দেখাও যে, ভেক্টর গুণন বণ্টন সূত্র মেনে চলে।

১৫। যদি $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ এবং $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$ [চ. বো. ২০০৩]

১৬। $\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{C}$ ভেক্টর রাশি হলে প্রমাণ কর যে, $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ [কু. বো. ২০০১]

১৭। প্রমাণ কর ঃ $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

১৮। যদি শূন্য ভেক্টর না হয়, তবে দেখাও যে দুটি ভেক্টর রাশির ডট্ গুণফল শূন্য হলে এরা পরস্পর লম্ব।

১৯। যদি শূন্য ভেক্টর না হয়, তবে দেখাও যে দুটি ভেক্টর রাশির ক্রস গুণফল শূন্য হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল।

২০। প্রমাণ কর যে, $\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$ [চ. বো. ২০০৪]

২১। ভেক্টর ব্যবকলন ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০৪]

গাণিতিক সমস্যাবলি :

১। দুটি দিক রাশির প্রত্যেকটির মান 8 একক। তারা একই বিন্দুতে পরস্পর $120°$ কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। [উঃ 8 একক, $60°$]

২। বায়ু উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হচ্ছে। বেগের উত্তর দিকের অংশক ঘণ্টায় 5 km এবং পূর্ব দিকের অংশক ঘণ্টায় 12 km। লব্ধি বেগের মান ও দিক নির্ণয় কর। [উঃ 13 km/h, $67°30'$]

৩। দুটি ভেক্টরের মান যথাক্রমে 10 এবং 15 একক। তারা পরস্পরের সাথে সমকোণে ক্রিয়া করে। এদের ভেক্টর গুণফলের মান বের কর। [উঃ 150 একক]

৪। একটি বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশের মান যথাক্রমে $60\ ms^{-1}$ ও $80\ ms^{-1}$। বেগটির মান কত ? [উঃ $100\ ms^{-1}$]

৫। দুটি কণা যথাক্রমে $12\ ms^{-1}$ ও $20\ ms^{-1}$ বেগে $120°$ কোণে ক্রিয়া করে কোন একটি বিন্দুকে অতিক্রম করে। 4s পরে তাদের মধ্যকার দূরত্ব কত হবে ? [উঃ 112 m একক]

৬। একটি বস্তু কণার বেগ $6\ ms^{-1}$। তার গতির সাথে $90°$ কোণে $2\ ms^{-2}$ এর একটি ত্বরণ ক্রিয়া করে। 4s পর কণাটির বেগ ও সরণ কত হবে ? [উঃ $10\ ms^{-1}$; 28·84 m]

৭। দুটি ভেক্টর রাশি, $\vec{P} = 8\hat{i} - 4\hat{j}$ এবং $\vec{Q} = \hat{j} - 4\hat{i}$ হলে, (i) $|\vec{P}|$, (ii) $|\vec{Q}|$, (iii) $|(\vec{P} + \vec{Q})|$, (iv) $|\vec{P} - \vec{Q}|$ এবং (v) $|\vec{P} \times \vec{Q}|$ কত ? উঃ (i) $4\sqrt{5}$, (ii) $\sqrt{17}$, (iii) 5, (iv) 13 এবং (v) 8]

৮। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি।

(ক) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর। (খ) $(2\vec{A} + 3\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। [উঃ (ক) 3, 7 ; (খ) $5\sqrt{21}$]

৯। P ও Q দুটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, — 2, 1) ও (3, 1, — 2)। (ক) এদের অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর ; (খ) PQ ভেক্টর রাশি ও এর মান বের কর।

[উঃ (ক) $4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; (খ) $\vec{PQ} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ ও $|\vec{PQ}| = \sqrt{19}$]

১০। যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হয় তবে এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উঃ 101·49°]

১১। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এদের স্কেলার গুণফল ও ভেক্টর গুণফলের মান নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০০] [উঃ 4, $5\sqrt{17}$]

১২। $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ হলে A ও B ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর। [উঃ 90°]

১৩। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এদের লম্ব অভিমুখে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৪] [উঃ $\pm \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}}{5\sqrt{17}}$]

১৪। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$-এর ভেক্টর গুণফল এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উঃ 4 ; 98·69°]

১৫। দেখাও যে, $\vec{A} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

১৬। $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উঃ 98·69°]

১৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$-এর মধ্যবর্তী কোণের সাইনের মান নির্ণয় কর। দেখাও যে, এরা পরস্পর লম্ব। [উঃ $\alpha = 90°$]

১৮। $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। $\vec{A}$-এর সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [উঃ $\frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3}$]

১৯। যদি $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হয়। তবে ভেক্টর $\vec{B}$-এর উপর $\vec{A}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $\vec{A}$-এর উপর $\vec{B}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৪] [উঃ 0 ; 0]

২০। $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 5\hat{j} + 5\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি। দেখাও যে এরা পরস্পর সমান্তরাল। [সি. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)

২১। a-এর মান কত হলে $2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পর লম্ব হবে ? [উঃ 3]

২২। $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=3\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$ দুটি দিক রাশি। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর ভেক্টর গুণন নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এরা পরস্পর সমান্তরাল। [য. বো. ২০০২]

২৩। $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{C}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ হলে প্রমাণ কর যে,

$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}$.

২৪। $\vec{A}=2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ $\vec{B}=\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $(\vec{A}\times\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{A})=0$.

২৫। $\vec{A}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$; $\vec{B}=4\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}$; $\vec{C}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ হলে (i) $\vec{A}-\vec{B}+2\vec{C}$ নির্ণয় কর। [উঃ $\hat{i}+5\hat{j}-5\hat{k}$]

২৬। $\vec{P}=2\hat{i}+m\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=6\hat{i}-3\hat{j}-9\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে m-এর মান নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬] [উঃ $m=-1$]

২৭। a-এর মান কত হলে $\vec{A}=2\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k}$ ও $\vec{B}=2\hat{i}+a\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে। [উঃ $a=-5$]

২৮। একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি (2, 3, 1), (1, 1, 3) এবং (2, 2, 5) হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ বর্গ একক]

২৯। $\vec{A}=\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ ও $B=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ -এর অভিক্ষেপ বা অংশক নির্ণয় কর। [উঃ 4]

৩০। দেখাও যে, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি, $|\vec{A}-\vec{B}|=|\vec{A}+\vec{B}|$ হয়।

৩১। প্রমাণ কর ঃ $(\vec{A}\times\vec{B})^2+(\vec{A}.\vec{B})^2=A^2B^2$

৩২। একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি যথাক্রমে $\vec{A}=\hat{i}-4\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{B}=-2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ । সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ $\sqrt{107}$]

৩৩। একজন লোক স্রোতহীন অবস্থায় 100 মিটার প্রশস্ত একটি নদী 4 মিনিটে সোজাসুজি সাঁতরিয়ে পাড় হতে পারে। কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করতে পারে। স্রোতের গতিবেগ বের কর। [উঃ 15 মিটার/মিনিট]

৩৪। দেওয়া আছে $\vec{A}=4\hat{i}+3\hat{j}$, $\vec{B}=-2\hat{j}+5\hat{k}$। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ 26·25 একক]

৩৫। কোন কণার অবস্থান ভেক্টর, $r=2t\hat{i}+3t^2\hat{j}$ হলে কণাটির বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

[উঃ $\vec{v}=2\hat{i}+6t\hat{j}$ এবং $\vec{a}=6\hat{j}$]

৩৬। কোন কণার অবস্থান ভেক্টর $\hat{r}=[(3·0\ ms^{-1})\,t+4·2\ m]\,\hat{i}+(5·3\ ms^{-1})\,\hat{j}$ হলে বেগ $\hat{v}$ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৪] [উঃ $3·0\ ms^{-1}\ \hat{i}$]

৩৭। একটি কণার উপর $\vec{F}=(6\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})$ N বল প্রয়োগে কণাটির $\hat{r}=(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})m$ সরণ হয়। বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ কত ? [চ. বো. ২০০৪] [উঃ 10 Joule]

৩৮। একটি গতিশীল কণার কোন মুহূর্তের অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}=\hat{i}\cos\omega t+\hat{j}\sin\omega t$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়, এখানে ω একটি ধ্রুবক। কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v}$ ও ত্বরণ $\vec{a}$ নির্ণয় কর এবং আরও দেখাও যে, $\vec{r}\times\vec{v}=$ একটি ধ্রুবক ভেক্টর।[উঃ $\vec{v}=\omega(-\hat{i}\sin\omega t+\hat{j}\cos\omega t)$; $\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$; $\vec{r}\times\vec{v}=\hat{k}\omega$]

২
রৈখিক গতি
LINEAR MOTION

২.১ বলবিদ্যা
Mechanics

আমরা আমাদের চারদিকে যে সমস্ত পদার্থ দেখতে পাই, তাদের মধ্যে কোনটি স্থির, আবার কোনটি গতিশীল। পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখায় বস্তুর স্থিতি ও গতি বিষয়ে আলোচনা করা হয় তাকে বলবিদ্যা বলে। অন্যভাবে বলা যায়, **পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখায় পদার্থের উপর বলের ক্রিয়া আলোচিত হয় তাকে বলবিদ্যা বলে।** বল সেই ব্যাহিক কারণ যা একটি বস্তুর স্থির বা গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটানোর চেষ্টা করে। বলবিদ্যা মূলত দু'প্রকার। যথা–

১। স্থিতি বিদ্যা (Statics) এবং ২। গতিবিদ্যা (Dynamics)।

১। **স্থিতিবিদ্যা :** বলবিদ্যার যে শাখায় স্থিতিশীল বস্তুর উপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করা হয় তাকে স্থিতিবিদ্যা বলে।

২। **গতিবিদ্যা :** বলবিদ্যার যে শাখায় গতিশীল বস্তুর উপর বলের ক্রিয়া আলোচনা করা হয় তাকে গতিবিদ্যা বলে।

গতিবিদ্যা আবার দু'প্রকার। যথা–সৃতিবিদ্যা (Kinematics) এবং চলবিদ্যা (Kinetics)।

সৃতিবিদ্যা : গতিবিদ্যার যে শাখায় শুধুমাত্র গতির প্রকৃতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয় ; কিন্তু গতির কারণ অনুসন্ধান করা হয় না, তাকে সৃতিবিদ্যা বলে।

চলবিদ্যা : গতিবিদ্যার যে শাখায় গতির প্রকৃতি ও গতির কারণ আলোচনা করা হয় ; অর্থাৎ বস্তুর গতির উপর প্রযুক্ত বলের প্রভাব আলোচনা করা হয়, তাকে চলবিদ্যা বলে।

সরলরেখা বরাবর চলমান বস্তুর গতিকে রৈখিক গতি বা একমাত্রিক গতি বলে। এ অধ্যায়ে বস্তুর রৈখিক গতি সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

২.২ স্থিতি ও গতি
Rest and Motion

স্থিতি : সময়ের পরিবর্তনের সাথে যখন কোন বস্তুর পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে স্বীয় অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে না, তখন এর অবস্থাকে স্থিতি বলে এবং ঐ বস্তুকে স্থির বস্তু বলে। যেমন, ঘরবাড়ি, গাছপালা প্রভৃতি স্থির বস্তু।

গতি : সময়ের পরিবর্তনের সাথে যখন কোন বস্তুর পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে স্বীয় অবস্থানের পরিবর্তন ঘটে, তখন এর অবস্থাকে গতি বলে। ঐ বস্তুকে সচল বা গতিশীল বস্তু বলে। যেমন চলন্ত মানুষ, চলন্ত গাড়ি প্রভৃতি গতিশীল বস্তু।

২.৩ গতির প্রকারভেদ
Kinds of motion

গতি পাঁচ প্রকারের হতে পারে ; যথা—

(১) **চলন গতি** (Translatory motion)

(২) **ঘূর্ণন গতি** (Rotatory motion)

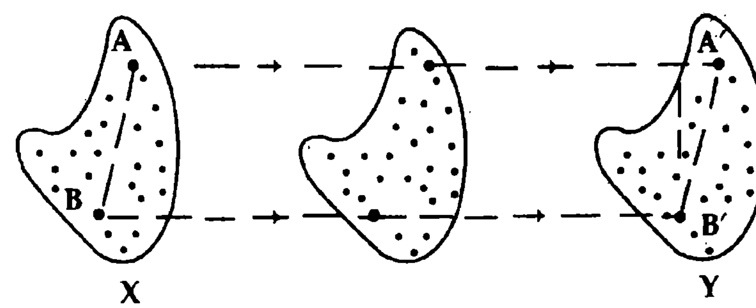
(৩) **চলন-ঘূর্ণন গতি বা জটিল গতি** (Transla-rotatory motion)

(৪) **পর্যাবৃত্ত গতি** (Periodic motion) এবং

(৫) **দোলন গতি** (Vibratory motion)।

(১) চলন গতি ঃ যদি কোন বস্তু এমনভাবে চলতে থাকে যে তার প্রতিটি কণা একই দিকে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে তবে তার এই গতিকে চলন গতি বলে। যেমন একটি পাথরকে কিছু উঁচু হতে মুক্তভাবে অভিকর্ষের টানে পড়তে দিলে তা খাড়া সরলরেখায় নিচের দিকে পড়তে থাকে। সুতরাং পাথরটির গতি চলন গতি।

ধরা যাক একটি দৃঢ় বস্তু চলন গতিতে X অবস্থান হতে Y অবস্থানে পৌঁছল [চিত্র ২'১]। X অবস্থানে ঐ বস্তুর উপর দুটি বিন্দু A ও B। Y অবস্থানে ঐ বিন্দু দুটির অবস্থিতি A′ ও B′। চলন গতির সংজ্ঞানুসারে AA′= BB′। আবার বস্তু দৃঢ় বলে AA′ এবং BB′ পরস্পর সমান্তরাল (অর্থাৎ AA′ ∥ BB′)। সুতরাং, চলন গতিসম্পন্ন কোন বস্তুর যে কোন দুটি বিন্দু যোগ করে যে সরলরেখা পাওয়া যাবে, বস্তুটির বিভিন্ন অবস্থিতিতে তারা পরস্পরের সমান্তরালে অবস্থান করবে।



চিত্র ২'১

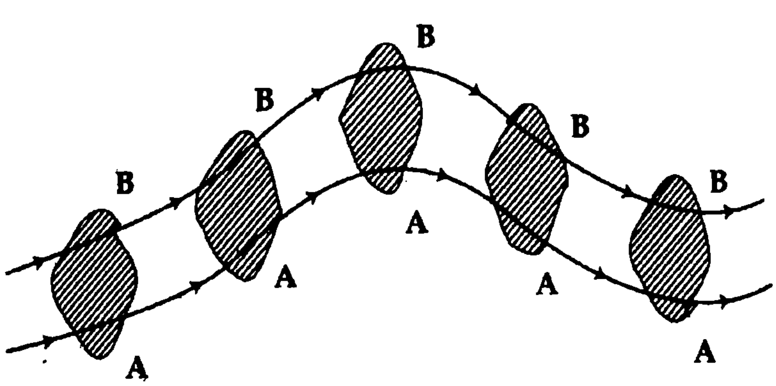
চলন গতি দুই প্রকার ; যথা—

(ক) সরল চলন গতি বা ঋজু গতি (Rectilinear motion) এবং

(খ) বক্র চলন গতি (Curvilinear motion)।

(ক) সরল চলন গতি ঃ যখন কোন বস্তু সরল পথে এমনভাবে চলতে থাকে যে তার প্রতিটি কণা একই দিকে সমপরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করে, তখন এই গতিকে সরল চলন গতি বলে। সরল চলন গতিবিশিষ্ট কোন একটি বস্তুর দুটি বিন্দু যোগ করে যে রেখা পাওয়া যায়, বস্তুটির বিভিন্ন অবস্থানের জন্য তারা পরস্পর সমান্তরাল থাকবে।

চিত্র ২'১-এ বস্তুটির গতি সরল চলন গতি হলে AA′ ও BB′ সমান ও সমান্তরাল হবে। মুক্তভাবে পড়ন্ত অথবা সরল পথ বরাবর বস্তুর গতি সরল চলন গতি।



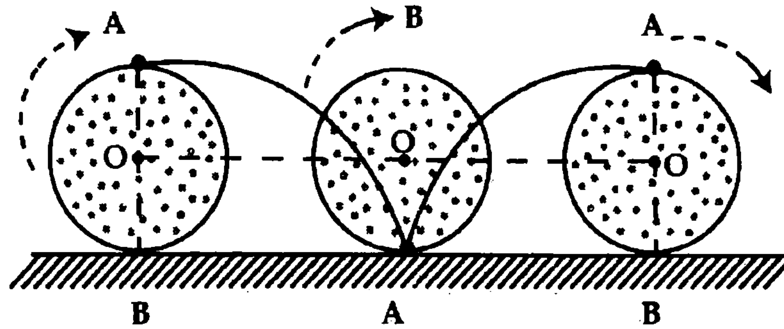
চিত্র ২'২

(খ) বক্র চলন গতি ঃ চলন গতিসম্পন্ন বস্তু যদি বক্রপথে চলে, তবে বস্তুর ঐ গতিকে বক্র চলন গতি বলে। আঁকাবাকা বা বক্রপথে চলন্ত জীপের গতি বক্র চলন গতি।

২'২নং চিত্রে চলন গতিসম্পন্ন একটি দৃঢ় বস্তু বক্রপথে চলছে দেখানো হয়েছে। অতএব তার গতি বক্র চলন গতি। এই গতিতে বস্তুর দুটি কণা A ও B-এর সংযোগকারী রেখা তার বিভিন্ন অবস্থিতিতে পরস্পর সমান্তরাল ও একই অভিমুখী হবে।

(২) ঘূর্ণন গতি ঃ যখন কোন বস্তু একটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা অক্ষের চারদিকে চক্রাকারে পরিভ্রমণ করে, তখন তার গতিকে ঘূর্ণন গতি বলে। যেমন— বৈদ্যুতিক পাখার গতি, ঘড়ির কাঁটার গতি ইত্যাদি।

(৩) **চলন-ঘূর্ণন গতি বা জটিল গতি ঃ যখন কোন বস্তুর চলন ও ঘূর্ণন গতি দুইই থাকে, তখন তার গতিকে চলন-ঘূর্ণন গতি বলে।** এই গতিকে জটিল বা মিশ্র গতিও বলে। যেমন গরুর গাড়ির চাকার গতি, সাইকেলের চাকার গতি ইত্যাদি চলার সময় তার চাকা চলন ও ঘূর্ণন—এই দুই গতিই প্রদর্শন করে [চিত্র ২·৩]।



চিত্র ২·৩

(৪) **পর্যাবৃত্ত গতি ঃ যখন কোন বস্তু একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর একই পথ পরিভ্রমণ করে বার বার একই দিকে চলতে থাকে, তখন তার গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে এবং ঐ নির্দিষ্ট সময়কে উক্ত গতির পর্যায়কাল বলে।** যেমন পৃথিবী 365 দিনে সূর্যের চারদিকে একবার প্রদক্ষিণ করে। সুতরাং সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর গতি পর্যাবৃত্ত গতি এবং এই গতির পর্যায়কাল 365 দিন। ঘড়ির কাঁটার গতি, গাড়ির সিলিন্ডারে পিস্টনের গতি ইত্যাদিও পর্যাবৃত্ত গতির উদাহরণ।

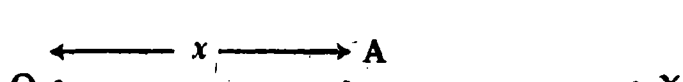
(৫) **দোলন গতি ঃ যখন কোন বস্তু একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর বিপরীতমুখী হয় বা এদিক-ওদিক দোল দেয়, তখন তার গতিকে দোলন গতি বলে।** যেমন দেয়াল ঘড়ির দোলকটি নির্দিষ্ট সময় পর পর তার স্থিতিশীল অবস্থার ডানে ও বামে দোল দেয়। অতএব দেয়াল ঘড়ির গতি দোলন গতি।

২·৪ প্রসঙ্গ বিন্দু ও প্রসঙ্গ কাঠামো
Reference point and reference frame

যখন আমরা বলি, একটি বস্তু স্থির বা গতিশীল, তখন বুঝতে হবে কোন দ্বিতীয় বস্তুর সাপেক্ষেই প্রথম বস্তুটি স্থির আছে অথবা এর অবস্থানের পরিবর্তন হচ্ছে। কোন বস্তুর অবস্থান অপর একটি নির্দেশ বস্তুর সাপেক্ষে জানতে হলে ঐ নির্দেশ বস্তুর সঙ্গে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির পদ্ধতি অনুযায়ী গঠিত একটি স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (co-ordinate system) সংযুক্ত আছে ধরে নিতে হয়। একে প্রসঙ্গ বা নির্দেশ কাঠামো (Reference frame) বলে। সুতরাং বলা যায়, **যে স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার সাহায্যে বস্তুর অবস্থান নির্ণয় করা হয় তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে। প্রসঙ্গ কাঠামোর যে বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুর অবস্থান নির্ণয় করা হয় তাকে প্রসঙ্গ বিন্দু (Reference point) বলে।**

তিন ধরনের প্রসঙ্গ কাঠামো রয়েছে। যথা—(১) একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো, (২) দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো এবং (৩) ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো।

(১) **একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (One dimensional reference frame) ঃ** মনে করি একটি কণা একটি সরলরেখা OX-বরাবর গতিশীল। বিভিন্ন সময়ে কণাটির অবস্থান একটি বিন্দু সাপেক্ষে নির্ণয় করতে হয়। যে বিন্দুর সাপেক্ষে কণাটির অবস্থান নির্ণয় করা হয়, তাকে **প্রসঙ্গ বিন্দু** বা **নির্দেশ বিন্দু** বলে। চিত্রে O-কে প্রসঙ্গ বিন্দু ধরে নেয়া হয়েছে।



চিত্র ২·৪

OX সরলরেখাকে X-অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু O এবং X-অক্ষ নিয়ে গঠিত হয়েছে একটি একমাত্রিক কাঠামো। এ কাঠামোর সাহায্যে কণার যে-কোন সময়ের অবস্থান নির্ণয় করা হয় [চিত্র ২·৪]।

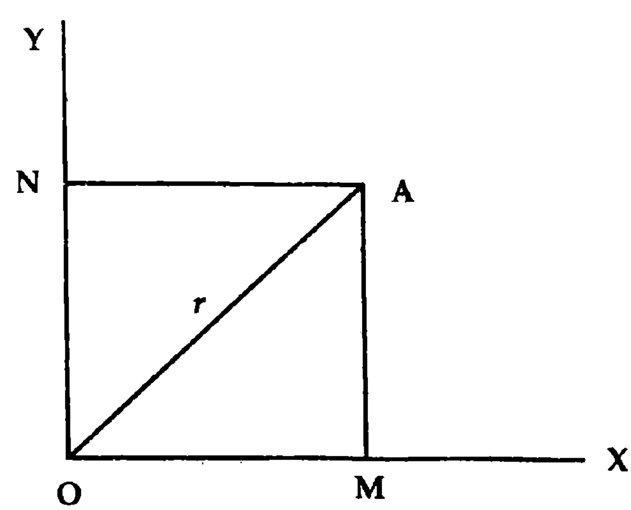
মনে করি একটি নির্দিষ্ট সময়ে কণাটি A অবস্থানে আছে। উক্ত সময়ে O বিন্দু হতে কণাটির দূরত্ব = OA = x। কণাটি স্থিতিশীল হলে x-এর একটিমাত্র মান থাকবে। আর কণাটি গতিশীল হলে x-এর মান বিভিন্ন হবে। এখানে x-কে স্থানাঙ্ক বলা হয়। একটিমাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা কণাটির অবস্থান নির্দেশিত হওয়ায় কণাটি একমাত্রিক স্থানে অবস্থিত। **যে বস্তুর বিভিন্ন কণার অবস্থান একটিমাত্র স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।**

মুক্তভাবে পড়ন্ত একটি বস্তুর গতি আলোচনা করলে দেখা যাবে বিভিন্ন সময়ে বস্তুর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর গতি একটি একমাত্রিক কাঠামো দ্বারা প্রকাশ করা যাবে। যে বিন্দু হতে বস্তুটি পড়তে শুরু করে তাকে **প্রসঙ্গ বিন্দু** বলে এবং এর গতিপথ X-অক্ষ ধরা হবে।

উদাহরণ ঃ একটি দীর্ঘ সরু দণ্ড, একটি দীর্ঘ সরু সূতা, ঝুলন্ত সূতা ইত্যাদি একমাত্রিক বস্তু ভাবা যায়।

(২) দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Two dimensional reference frame) ঃ মনে করি একটি কণা একটি সমতলে অবস্থিত। ধরি কণাটি গতিশীল। সেজন্য বিভিন্ন সময়ে এর অবস্থান বিভিন্ন হবে। এর অবস্থান সূচিত করার লক্ষ্যে পরস্পর দুটি লম্বিক সরলরেখার দরকার। চিত্রে OX ও OY এরূপ দুটি সরলরেখা। এই দুটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। অতএব O হল **প্রসঙ্গ বিন্দু বা মূল বিন্দু** (reference or origin)। এখানে OX-কে X অক্ষ ও OY-কে Y অক্ষ বলা হয়। প্রসঙ্গ বিন্দু এবং অক্ষ দুটি মিলে একটি কাঠামো তৈরি হয়েছে। এর নাম **দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো** [চিত্র ২.৫]।

মনে করি একটি নির্দিষ্ট সময়ে একটি কণা A অবস্থানে আছে। A হতে OX-এর উপর AM এবং OY-এর উপর AN লম্ব টানি। তা হলে OM = AN = x ; AM = ON = y। এখানে A-এর অবস্থান x ও y দুটি স্থানাঙ্ক দ্বারা সূচিত হয়েছে। সোজা কথায় বলা যায় A হল একটি মাত্র বিন্দু যার স্থানাঙ্ক x ও y। অতএব **কোন একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার দুটি স্থানাঙ্ক থাকলে উক্ত বস্তুটিকে দ্বিমাত্রিক বস্তু বলে।** OA যুক্ত করি। OA = r হলে উক্ত রেখার উপর C, D, E, F ইত্যাদি অনেক বিন্দু থাকবে O হতে যাদের দূরত্ব = r হবে।



চিত্র ২.৫

উদাহরণ ঃ ফুটবল খেলার মাঠে একটি গতিশীল ফুটবল দ্বিমাত্রিক স্থানে দৌড়াচ্ছে। পাতলা কাগজ, পাতলা ধাতব পাত ইত্যাদি দ্বিমাত্রিক বস্তু।

(৩) ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো (Three dimensional reference frame) ঃ মনে করি বায়ু ভর্তি কামরার মধ্যে একটি কণা অবস্থিত। কণাটির অবস্থান নির্দেশ করার জন্যে পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত তিনটি সরলরেখার দরকার। ধরি সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে OX, OY এবং OZ। সরলরেখা তিনটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। অতএব O বিন্দু হল **মূল বিন্দু** বা **প্রসঙ্গ বিন্দু**। এখানে OX-কে X অক্ষ, OY-কে Y অক্ষ এবং OZ-কে Z অক্ষ বলা হয়। মূল বিন্দু O এবং তিনটি অক্ষ মিলে যে কাঠামো তৈরি হয়েছে তার নাম **ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ** [illegible] [চিত্র ২.৬]।

মনে করি কোন নির্দিষ্ট সময়ে কণাটি A অবস্থানে আছে। A হতে XY তলের উপর AQ লম্ব টানি। Q হতে OX-এর উপর QR এবং OY-এর উপর QT লম্ব টানি। A হতে OZ-এর উপর AS লম্ব টানি।

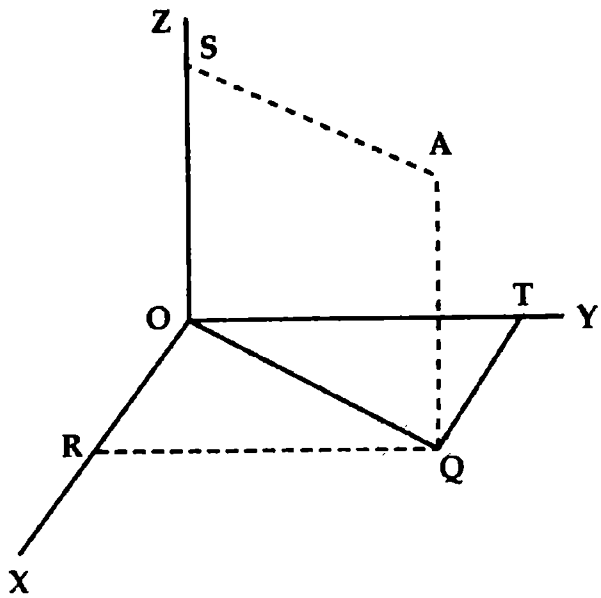
তাহলে $OR = QT = x$

$OT = RQ = y$

এবং $OS = AQ = z$

এখানে A-এর অবস্থান x, y এবং z এই তিনটি স্থানাঙ্ক দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। মূল বিন্দু O এবং এই তিনটি স্থানাঙ্কসহ এই কাঠামোকে ত্রিমাত্রিক কাঠামো বলে। **কোন একটি বস্তুর বিভিন্ন কণা এই কাঠামোয় অবস্থান করলে বস্তুটিকে ত্রিমাত্রিক বস্তু বলে।**

উদাহরণ : টেবিল, চেয়ার, ইট, পাথর ইত্যাদি ত্রিমাত্রিক বস্তু।



চিত্র ২.৬

২.৫ গতি সংক্রান্ত কয়েকটি প্রয়োজনীয় রাশি
Some important terms relating to motion

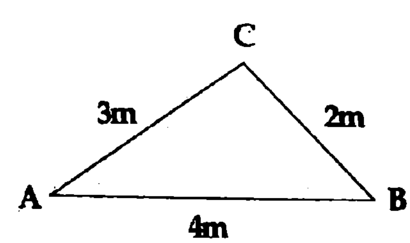
(i) দূরত্ব (Distance) : কোন গতিশীল বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত পথের দৈর্ঘ্যকে দূরত্ব বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি একটি বস্তু A অবস্থান হতে B অবস্থানে গেল। চিত্র ২.৭-এ বস্তুটিকে A হতে B বিন্দুতে যেতে দুটি পথ দেখান হয়েছে। প্রথম পথটি সরাসরি A থেকে B-তে এবং দ্বিতীয় পথটি ACB পথ। প্রথম ক্ষেত্রে দূরত্ব = 4m এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে দূরত্ব = 3m + 2m = 5m

দূরত্ব একটি স্কেলার রাশি।

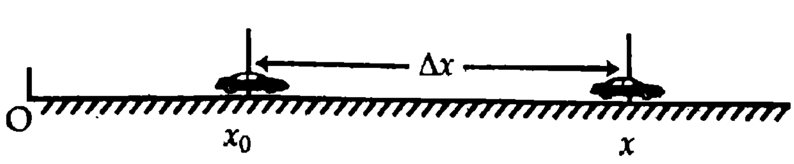
একক : এম. কে. এস. (MKS) বা এস. আই. (SI) পদ্ধতিতে দূরত্বের একক মিটার (metre সংক্ষেপে m)।

দূরত্বের মাত্রা : [দূরত্ব] = [L]।

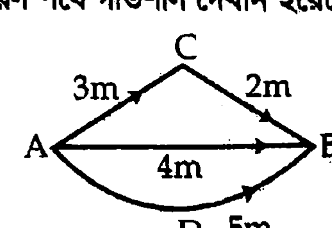


চিত্র ২.৭

(ii) সরণ (Displacement) : একটি বস্তুর গতি বর্ণনা করার জন্য বস্তুটির সকল সময়ের অবস্থান নির্দেশ করা অপরিহার্য। চিত্র ২.৮ (ক)-এ একটি গাড়িকে একমাত্রিক কাঠামোতে সরল পথে গতিশীল দেখান হয়েছে।



(ক)



(খ)

চিত্র ২.৮

ধরা যাক গাড়িটির আদি অবস্থান ভেক্টর $\vec{x_0}$। $\vec{x_0}$-এর দৈর্ঘ্য সুবিধামত একটি মূলবিন্দু O থেকে ধরা হয়েছে। পরবর্তী কোন এক সময় t-এ গাড়িটি নতুন অবস্থানে পৌঁছেছে যার অবস্থান ভেক্টর $\vec{x}$। গাড়িটির সরণ $\vec{\Delta x}$ (ডেল্টা

x 'বা' x-এর পরিবর্তন পড়তে হবে) গাড়িটির আদি ও শেষ অবস্থান হতে অঙ্কন করা হয়েছে। এটি একটি ভেক্টর কেননা এর মান গাড়িটির আদি ও শেষ অবস্থানের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান এবং এর দিক গাড়িটির গতির দিকে।

চিত্র থেকে $\vec{x}$ এবং $\vec{x_0}$ এর সঙ্গে সরণ $\vec{\Delta x}$-এর সম্পর্ক নিম্নরূপ :

$$\vec{x_0} + \vec{\Delta x} = \vec{x}$$

বা $$\vec{x} - \vec{x_0} = \vec{\Delta x} \qquad (1)$$

অতএব সরণ $\vec{\Delta x}$ হল $\vec{x}$ এবং $\vec{x_0}$-এর মধ্যে পার্থক্য। উল্লেখ্য গ্রীক অক্ষর ডেল্‌টা (Δ) যে কোন দুটি রাশির পার্থক্য নির্দেশ করে।

সংজ্ঞা : কোন বস্তুর সরণ একটি ভেক্টর যার মান বস্তুটির গতিপথের শেষ এবং আদি অবস্থানের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব এবং দিক হল আদি থেকে শেষ অবস্থানের দিক।

চিত্র ২·৮ (খ)-এ একটি বস্তুকে A অবস্থান হতে যাত্রা করে B অবস্থানে বিভিন্ন পথে যাওয়ার অবস্থা দেখান হয়েছে। সকল ক্ষেত্রেই বস্তুটির সরণ = $\vec{AB}$ এবং সরণের মান = 4 m।

সরণ এবং দূরত্ব এক নয়। চিত্র ২·৮ (খ)-এ AB পথে দূরত্ব 4 m, ACB পথে 5 m এবং ADB পথে 5 m; কিন্তু সরণের মান ন্যূনতম দূরত্ব অর্থাৎ 4 m।

সমীকরণ (1) ভেক্টররূপে লেখা যায়,

$$\Delta x\hat{i} = x\hat{i} - x_0\hat{i}$$

এখানে $\hat{i}$ হল X অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর। **সাধারণত একমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে $\hat{i}$ ব্যবহার না করলেও ক্ষতি নেই ; শুধুমাত্র রাশির উপর ভেক্টর চিহ্ন দিলেই চলে।**

সরণ যদি বিপরীত দিকে হয় তবে ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন $\Delta\vec{x} = 50$ m এবং $\Delta\vec{x} = -50$ m। **দুটিই সমান মানের সরণ প্রকাশ করে ; কিন্তু একটির দিক অপরটির বিপরীত। অর্থাৎ একটি যদি পূর্ব দিকে গতিশীল হয় তবে অপরটি পশ্চিম দিকে হবে।**

সরণের একক : এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে সরণের একক হল মিটার (m)।

সরণের মাত্রা সমীকরণ : [সরণ] = [L]।

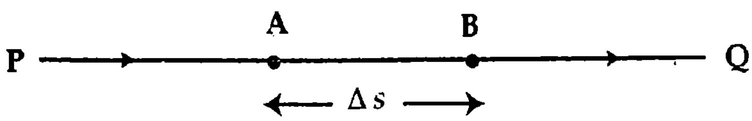
(iii) দ্রুতি (Speed) : সাধারণভাবে, কোন বস্তু একক সময়ে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে দ্রুতি বলা হয়। তবে প্রকৃত অর্থে দ্রুতি জানতে হলে গড় দ্রুতি কাকে বলে জানা দরকার।

গড় দ্রুতি (Average speed) : কোন বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।

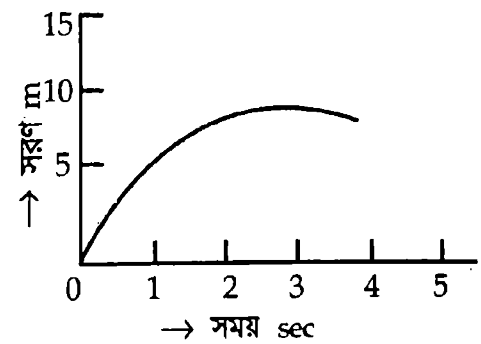
ব্যাখ্যা : মনে করি কোন একটি গতিশীল বস্তু মোট সময় t-এ মোট দূরত্ব s অতিক্রম করল,

$$\text{গড় দ্রুতি } \overline{v} = \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{মোট ব্যয়িত সময়}} = \frac{s}{t}$$

তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি (Instantaneous speed or speed) ঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সংগে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে।



চিত্র ২.৯ (ক)



চিত্র ২.৯ (খ)

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি সরল পথে গতিশীল একটি বস্তু t সময়ে অবস্থান A এবং $(t + \Delta t)$ সময় পর এর অবস্থান B [চিত্র ২.৯ (ক)]।

এখানে Δt অতি ক্ষুদ্র সময়। ধরি AB = ক্ষুদ্র দূরত্ব Δs। অর্থাৎ অতি ক্ষুদ্র সময় Δt-এ বস্তুটি অতি ক্ষুদ্র দূরত্ব Δs অতিক্রম করছে।

গড় দ্রুতি $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ ।

এখানে Δt আরও ক্ষুদ্র হলে, অর্থাৎ $\Delta t'$ শূন্যের কাছাকাছি হলে Δs-ও ক্ষুদ্র হবে। সেক্ষেত্রে B বিন্দুর অবস্থান A বিন্দুর খুবই কাছাকাছি হবে। এ অবস্থায় $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ বস্তুর তাৎক্ষণিক দ্রুতি নির্দেশ করবে।

$$\text{তাৎক্ষণিক দ্রুতি, } v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$\dfrac{ds}{dt}$ -কে বলা হয় সময় সাপেক্ষে দূরত্বের ব্যবকলন (derivative of s with respect to t) ।

অতএব, $v = \underset{\Delta t \to 0}{\text{Lt}} \overline{v}$

সুতরাং, দ্রুতির প্রকৃত সংজ্ঞা হবে—**সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে গড় দ্রুতির সীমান্তিক মান (limiting value) দ্রুতির সমান।**

দ্রুতির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই। অতএব দ্রুতি একটি স্কেলার রাশি।

দ্রুতির একক ঃ এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে দ্রুতির একক মিটার/সেকেন্ড (ms^{-1})

দ্রুতি সাধারণত দুই প্রকার ; যথা–(ক) **সমদ্রুতি** (uniform speed) এবং (খ) **অসম দ্রুতি** (variable speed)।

(ক) সমদ্রুতি ঃ দ্রুতির মান যদি সবসময় ধ্রুব থাকে তবে তাকে সমদ্রুতি বলে। বস্তু সমদ্রুতিতে চললে গড় দ্রুতি ও দ্রুতি একই হয়।

(খ) অসম দ্রুতি ঃ দ্রুতির মান পরিবর্তনশীল হলে অর্থাৎ বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন মানের হলে তাকে অসম দ্রুতি বলে।

(iv) বেগ (velocity) ঃ দ্রুতি দ্বারা গতিশীল বস্তুটির অবস্থান পরিবর্তনের কোন দিক বুঝা যায় না। অর্থাৎ বস্তুটি উত্তরে যাচ্ছে না পূর্বে যাচ্ছে, বা গতিপথে কোন দিক পরিবর্তন করেছে কিনা কিছুই জানা যায় না। শুধুমাত্র পরিমাণ জানা যায়। সুতরাং অবস্থান পরিবর্তনের হার এবং দিক উভয়ই জানার জন্য অপর একটি রাশি ব্যবহার করা

হয়, যার নাম বেগ। বেগের সংজ্ঞা দেয়ার পূর্বে গড়বেগ আলোচনা করা যাক, কেননা আমরা গড়বেগের সাহায্যে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ সংজ্ঞায়িত করা হবে।

গড় বেগ (Average velocity) : যে কোন সময় ব্যবধানে কোন বস্তুর মোট সরণকে ঐ সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড় বেগ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি Δt সময় ব্যবধানে একটি বস্তুর মোট সরণ $\Delta\vec{r}$

গড় বেগ, $\vec{\bar{v}} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

যদি বস্তুটির গতি একমাত্রিক হয় এবং বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হয়, সেক্ষেত্রে বেগের একটিমাত্র উপাংশ থাকে। উপাংশটি হবে—

$\vec{\bar{v}}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i}$ [$\because$ একমাত্রিক কাঠামোতে $\vec{r} = x\hat{i}$]

এবং গড় বেগের মান $\overline{v_x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$।

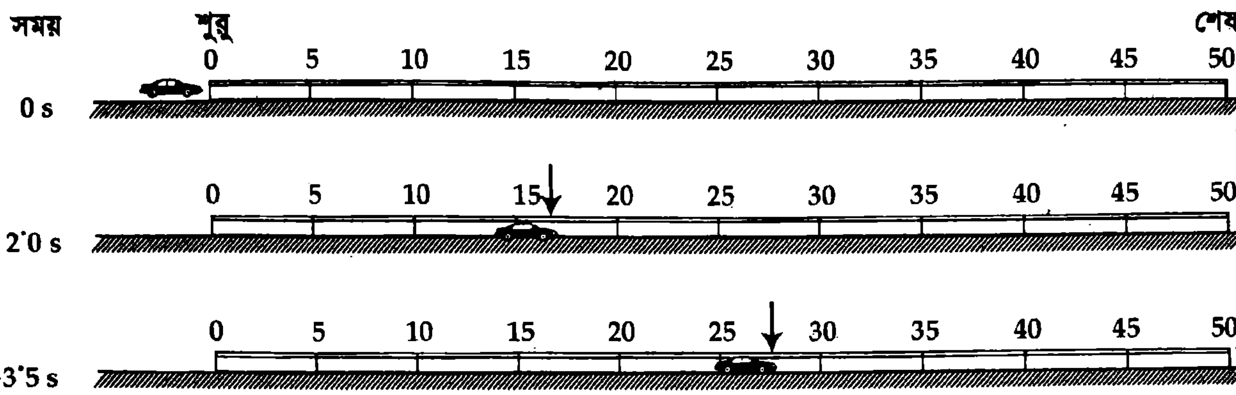
তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ (Instantaneous velocity or velocity) : সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ বলা হয়। তাৎক্ষণিক বেগ বলতে কোন বস্তুর বিশেষ মুহূর্তের বেগ বুঝায়। কোন বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় করতে হলে যে মুহূর্তের বেগ নির্ণয় করতে হবে ঠিক তার পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্তে বস্তুটির অবস্থান জানা প্রয়োজন। পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী মুহূর্ত বা সময়ের ব্যবধান অবশ্যই অত্যন্ত ক্ষুদ্র হতে হবে (প্রায় শূন্যের কাছাকাছি)।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক একটি মোটর গাড়ি 4 ঘণ্টায় 160 km দূরত্ব অতিক্রম করছে। সুতরাং গাড়িটির গড় দ্রুতি (average speed) হবে 160 km/4 hr = 40 km/hr। তবে এটা স্বাভাবিক নয় যে গাড়িটি সারাক্ষণ একই দিকে 40 km/hr স্থির দ্রুতিতে চলেছে। কখনও রাস্তা ফাঁকা পেয়ে গাড়ির দ্রুতি বাড়ানো হয়েছে। আবার কখনও যানজটের কারণে বা পথচারীকে পারাপারের সুযোগ দিতে বা অন্য কোন গাড়িকে আগে যাওয়ার সুযোগ দিতে গতি কমাতে হয়েছে। রাস্তাও যে একেবারে সরল পথে ছিল তাও নয়। কোথাও ডানে আবার কোথাও বায়ে বাঁক নিতে হয়েছে। অর্থাৎ দিকেরও পরিবর্তন হয়েছে। এখন এ পথ যাত্রার সম্পূর্ণ ধারণা পেতে হলে গাড়িটির প্রতিটি মুহূর্তের দ্রুতি ও দিক অর্থাৎ তাৎক্ষণিক বেগ জানা দরকার। তাৎক্ষণিক বেগের ও দ্রুতির পরিপূর্ণ ধারণা পাওয়ার জন্য নিম্নে একটি উদাহরণ দেওয়া হল।

ধরা যাক একটি মোটর গাড়ি সরল পথে স্থির অবস্থা থেকে সঙ্কেত পাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে অসমত্বরণে পশ্চিম দিক থেকে পূর্ব দিকে 50 মিটার পথ অতিক্রম করার জন্য চলা শুরু করল [চিত্র ২.১০] এবং 5 সেকেন্ডে নির্দিষ্ট পথ অতিক্রম করল। সুতরাং এক্ষেত্রে গাড়ির গড় বেগ 50 m/5s = 10 ms^{-1} হবে।

এই 5 সেকেন্ডের মধ্যে গাড়ির বেগ পরিবর্তনের সম্পূর্ণ চিত্র পাওয়ার জন্য গাড়ির চলার শুরু থেকে শেষ পর্যন্ত ধরা যাক প্রতি 0.5 সেকেন্ড পরপর গাড়ির অবস্থানের আলোকচিত্র গ্রহণ করা হল।

গাড়িটি যেহেতু রৈখিক বা একদিকে চলছে সুতরাং বিভিন্ন সময়ে গাড়ির অবস্থানকে x-অক্ষ দ্বারা নির্দেশ রতে পারি।



চিত্র ২·১০

উপরের চিত্রে বিভিন্ন সময়ে গাড়ির অবস্থান x-এর মান লিপিবদ্ধ করা হয়েছে।

সারণি ১ ঃ বিভিন্ন সময়ে গাড়ির অবস্থান এবং দ্রুতি।

t (s)	x (m)	Δx (m)	$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{v}$ (m/s)
0·0	0·0		
		3·0	$\frac{3·0}{0·5} = 6$
0·5	3·0		
		4·0	$\frac{4·0}{0·5} = 8$
1·0	7·0		
		4·5	$\frac{4·5}{0·5} = 9$
1·5	11·5		
		4·0	$\frac{4·0}{0·5} = 8$
2·0	15·5		
		3·5	$\frac{3·5}{0·5} = 7$
2·5	19·0		
		4·0	$\frac{4·0}{0·5} = 8$
3·0	23·0		
		5·0	$\frac{5·0}{0·5} = 10$
3·5	28·0		
		6·0	$\frac{6·0}{0·5} = 12$
4·0	34·0		
		7·5	$\frac{7·5}{0·5} = 15$
4·5	41·5		
		8·5	$\frac{8·5}{0·5} = 17$
5·0	50·0		

সারণী লক্ষ্য করলে দেখা যাবে সে গাড়ি যখন সময় $t = 0$, গাড়ির অবস্থান (x) 0 m, পরবর্তী 0·5 s পরে গাড়ির অবস্থান $x = 3$m সুতরাং এ সময়ে গাড়ির গড় বেগ হবে,

$$\vec{v}_x = \frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} = \frac{\text{অবস্থানের পরিবর্তন}}{\text{পরিবর্তনে ব্যয়িত সময়}} = \frac{3\text{ m} - 0\text{ m}}{0·5\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{3\text{ m}}{0·5\text{ s}} = 6\text{ ms}^{-1}।$$

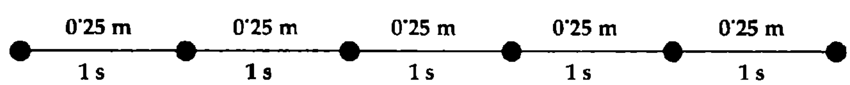
দুটি বস্তু যদি কোন বিন্দু হতে পরস্পরের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে v_0 এবং v সমবেগে চলতে থাকে, তবে v বেগে গতিশীল বস্তুর সাপেক্ষে v_0 বেগে গতিশীল বস্তুর আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় করতে হলে v-এর সমান ও বিপরীত একটি বেগ নিয়ে v_0 এবং এই নতুন বেগ দ্বারা একটি সামান্তরিক অঙ্কন করতে হবে। অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণ দ্বারাই নির্ণেয় আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক নির্দেশ করা যাবে।

বেগের মান ও দিক দুই-ই আছে। সুতরাং, **বেগ একটি ভেক্টর রাশি।**

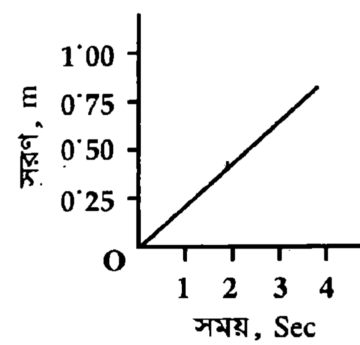
বেগ দুই প্রকার; যথা–**(ক) সমবেগ** (Uniform velocity) এবং **(খ) অসমবেগ** (Variable velocity)।

(ক) সমবেগ ঃ যদি বেগ সব সময় ধ্রুব থাকে তবে তাকে সমবেগ বলে। কাজেই সমবেগসম্পন্ন বস্তুর বেগের মান ও দিক সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে এবং বস্তুর উপর বলের লব্ধি শূন্য।

ব্যাখ্যা ঃ ২.১১ (ক) নং চিত্রে পাঁচটি বিন্দু দ্বারা 1 সেকেন্ড পর পর কোন একটি সরলরেখা বরাবর একই দিকে গতিশীল একটি বস্তুর অবস্থান প্রকাশ করা হয়েছে। এখানে পর পর দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব 0.25m। গতি অনুসারে বস্তুটি একই অভিমুখে প্রতি সেকেন্ড 0.25m দূরত্ব অতিক্রম করছে এবং সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে। কাজেই বস্তুর এ বেগ সমবেগ এবং সমবেগের মান 0.25 ms^{-1}। ২.১১ (খ) নং চিত্রে সরণ বনাম সময় লেখচিত্র দ্বারা সমবেগ দেখান হয়েছে।



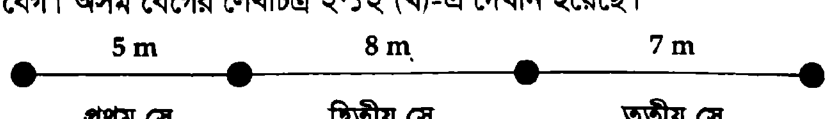
চিত্র ২.১১ (ক)



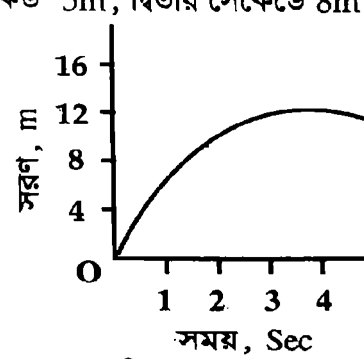
চিত্র ২.১১ (খ)

(খ) অসম বেগ ঃ যদি ভিন্ন ভিন্ন সময়ে বস্তুর বেগ ভিন্ন ভিন্ন হয় তবে তাকে অসম বেগ বলে। কাজেই সময়ের সাথে সরণের হারের মান অথবা দিক অথবা উভয়েই পরিবর্তিত হলে ঐ সরণের হারই অসম বেগ।

ব্যাখ্যা ঃ ধরি, একটি গতিশীল বস্তু কোন একটি দিকে প্রথম সেকেন্ড 5m, দ্বিতীয় সেকেন্ডে 8m এবং তৃতীয় সেকেন্ড 7 m পথ অতিক্রম করল [চিত্র ২.১২ (ক)]। এখানে বস্তু সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করছে না। সুতরাং বস্তুর এই বেগ অসম বেগ। অসম বেগের লেখচিত্র ২.১২ (খ)-এ দেখান হয়েছে।



চিত্র ২.১২ (ক)



চিত্র ২.১২ (খ)

একটি বস্তুর সমবেগ 5 m/s। উক্তিটির অর্থ বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট দিকে প্রতি সেকেন্ডে 5m দূরত্ব অতিক্রম করে চলছে।

২.৯ নং চিত্রানুযায়ী বস্তুটি যদি P বিন্দু হতে Q বিন্দু হয়ে R বিন্দুতে যেতে সর্বমোট 5 সেকেন্ড সময় ব্যয় করে তবে P হতে R অভিমুখে বস্তুটির সমবেগের মান, $\overline{v} = \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}} = 1$ m/s হলে বস্তুটি উক্ত সময়ে P হতে R-এ পৌঁছবে।

ত্বরণ (Acceleratron) ঃ যখনই কোন বস্তুর বেগের পরিবর্তন ঘটে, আমরা বলি বস্তুটি ত্বরিত হয়েছে। বস্তুর ক্রম পরিবর্তনশীল বেগ অর্থাৎ সময়ের সাথে বস্তুটির বেগের হার নির্দেশ করার জন্য যে রাশি ব্যবহার করা হয়

তাই ত্বরণ। সাধারণভাবে **বস্তুর বেগ পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে।** ত্বরণের সংজ্ঞা দেওয়ার পূর্বে আমরা গড় ত্বরণ সংজ্ঞায়িত ও আলোচনা করব।

গড় ত্বরণ (Average acceleration) : কোন একটি গতিশীল বস্তুর বেগের পরিবর্তন এবং ঐ পরিবর্তনের জন্য ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় ত্বরণ বলে।

ব্যাখ্যা : মনে করি t_0 সময়ে কোন একটি বস্তুর বেগ $\vec{v_0}$ এবং পরবর্তী t সময়ে বস্তুটির বেগ $\vec{v}$। এখানে সময়ের পরিবর্তন বা ব্যবধান হল $t - t_0 = \Delta t$ এবং বেগের পরিবর্তন $\vec{v} - \vec{v_0} = \Delta \vec{v}$

অতএব সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির গড় ত্বরণ,

$$\overrightarrow{\bar{a}} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

একমাত্রিক গতি X-অক্ষ বরাবর হলে গড় ত্বরণ হবে,

$$\overrightarrow{\bar{a}_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\,\hat{i}$$

এর মান হবে,

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}।$$

তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ (Instantaneous acceleration or acceleration) : কোন একটি গতিশীল বস্তুর সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বেগ পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা সংক্ষেপে ত্বরণ বলে।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, অত্যন্ত অল্প সময়ে Δt -এ কোন বস্তুর বেগ পরিবর্তন Δv হয়। তাহলে Δv- কে Δt দ্বারা ভাগ করলে তাৎক্ষণিক বেগ পাওয়া যায়। বস্তুটির বেগের পরিবর্তনকে যে খুবই স্বল্প সময়ে এ পরিবর্তন ঘটেছে তা দিয়ে ভাগ দিলে তাৎক্ষণিক ত্বরণ পাওয়া যায়।

অতএব, তাৎক্ষণিক ত্বরণ $\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

সময়ের ব্যবধান Δt এত ক্ষুদ্র হতে হবে (প্রায় শূন্যের কাছাকাছি) যেন ত্বরণের পরিবর্তন ঐ সময় ব্যবধানের মধ্যে খুবই সামান্য হয়।

সুতরাং, কোন বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ

$$\vec{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

আবার $\overrightarrow{\bar{a}} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

$$\bar{a} = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \overrightarrow{\bar{a}}$$

সুতরাং, তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণের সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে, গড় ত্বরণের সীমান্তিক মান ত্বরণের সমান।

ত্বরণের মান হবে,

$$a = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right|$$

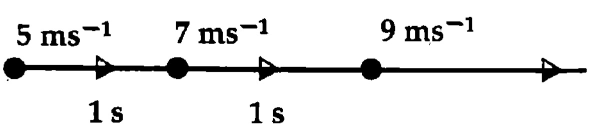
উল্লেখ্য, **কোন বিন্দুতে তাৎক্ষণিক ত্বরণ ঐ বিন্দুতে বস্তুটির বেগের লম্ব বরাবর হবে।**

ত্বরণ দুই প্রকার। যথা–(ক) **সমত্বরণ** (uniform acceleration) ও (খ) **অসমত্বরণ** (variable acceleration)।

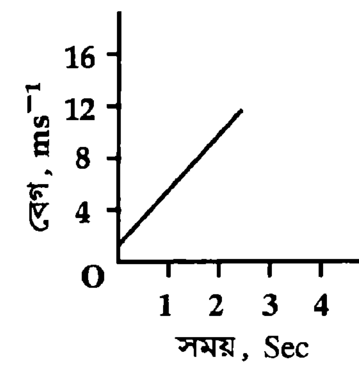
(ক) সমত্বরণ ঃ ত্বরণ যদি সব সময় ধ্রুব হয় তবে তাকে সমত্বরণ বলে। অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ত্বরণ সমত্বরণ। সমত্বরণশীল বস্তুতে সমবল ক্রিয়া করে। সমত্বরণে ত্বরণের মান ও দিক উভয়ই ধ্রুব থাকে।

২.১৩ (ক) চিত্রে একটি সরলরেখা বরাবর বস্তুর পর পর সেকেন্ডের বেগ দেখিয়ে তার ত্বরণের প্রকৃতি নির্দেশ করা হয়েছে। ২.১৩ (খ) চিত্রে লেখচিত্রের সাহায্যে সমত্বরণ দেখানো হয়েছে। এখানে সমত্বরণের মান $2ms^{-2}$। সমত্বরণের ক্ষেত্রে লেখচিত্র সরলরেখা এবং ঢাল সর্বত্র সমান হয়।

একটি বস্তুর সমত্বরণ $10\ ms^{-2}$-এ উক্তি দ্বারা বুঝা যায় একই দিকে বস্তুর বেগ প্রতি সেকেন্ডেই $10\ ms^{-1}$ বৃদ্ধি পাচ্ছে।



(ক) সম ত্বরণ

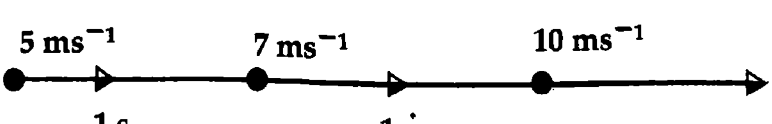


(খ) সম-ত্বরণ

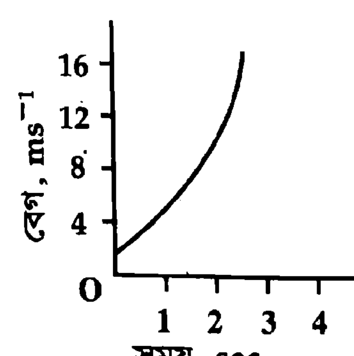
চিত্র ২.১৩

অসম ত্বরণ ঃ সময়ের সাথে যখন ত্বরণ ভিন্ন-ভিন্ন হয় তাকে অসম ত্বরণ বলে। ত্বরণের মান ও দিক, কিংবা মান অথবা দিক পরিবর্তনের জন্য অসম ত্বরণ সৃষ্টি হতে পারে। বাস, ট্রেন, মোটরগাড়ি ইত্যাদির ত্বরণ অসম ত্বরণের উদাহরণ। এক কথায় গতিশীল প্রায় বস্তুর ত্বরণই অসম ত্বরণ।

২.১৪ (ক) ও (খ) চিত্রে যথাক্রমে সরললেখা ও লেখচিত্র দ্বারা অসম ত্বরণ দেখান হয়েছে। লেখচিত্রে বিভিন্ন বিন্দুতে ঢাল ভিন্ন ভিন্ন হয়।



(ক) অসম ত্বরণ



(খ) অসম-ত্বরণ

চিত্র ২.১৪

ত্বরণের একক ঃ আমরা জানি, ত্বরণ ঃ $\frac{\text{বেগ}}{\text{সময়}}$ ঃ বর্গের এস. আই. একক মিটার / সেকেন্ড এবং সময়ের একক সেকেন্ড।

সুতরাং ত্বরণের একক ঃ $\frac{\text{মিটার/ সেকেন্ড}}{\text{সেকেন্ড}} = \frac{\text{মিটার}}{\text{সেকেন্ড}^2} = ms^{-2}$।

ত্বরণের মাত্রা সমীকরণ ঃ ত্বরণ = $\frac{\text{বেগ}}{\text{সময়}}$। বেগের মাত্রা LT^{-1} এবং সময়ের মাত্রা T।

সুতরাং, ত্বরণের মাত্রা = $\frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$

ত্বরণের মাত্রা সমীকরণ, [ত্বরণ] = [LT^{-2}]

মন্দন (Retardation) ঃ কোন গতিশীল বস্তুর বেগ পরিবর্তনের হার ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হতে পারে। বেগ পরিবর্তনের হার ধনাত্মক হলে তাকে ত্বরণ এবং ঋণাত্মক হলে তাকে মন্দন বলে। অর্থাৎ, **ঋণাত্মক ত্বরণকে মন্দন বলে**। বস্তুর বেগ এক সেকেন্ডে যতটুকু হ্রাস পায় তা দ্বারা মন্দন পরিমাপ করা হয়।

মন্দনের একক ও মাত্রা সমীকরণ ত্বরণের অনুরূপ।

[**বিঃ দ্রঃ** এই বই-এ দ্রুতি, বেগ ও ত্বরণ বলতে আমরা তাৎক্ষণিক দ্রুতি, তাৎক্ষণিক বেগ ও তাৎক্ষণিক ত্বরণ বুঝাব]

২.৬ বেগ ও ত্বরণের মধ্যে পার্থক্য
Difference between velocity and acceleration

বেগ ও ত্বরণ দুটি পৃথক রাশি। এদের মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য রয়েছে ঃ

বেগ	ত্বরণ
১। সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে বেগ বলে।	১। সময়ের ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বেগ বৃদ্ধির হারকে ত্বরণ বলে।
৩। এম. কে. এস. ও আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে এর একক মিটার/সে. (ms^{-1})।	৩। এম. কে. এস. ও আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে এর একক মিটার/সে.^{2} (ms^{-2})।
৪। এর মাত্রা সমীকরণ = [LT^{-1}]	৪। এর মাত্রা সমীকরণ = [LT^{-2}]।
৫। গতিশীল বস্তুর উপর বল ক্রিয়া না করলে এটি সরলরেখায় সমবেগে চলে।	৫। গতিশীল বস্তুর উপর বল ক্রিয়া না করলে এর ত্বরণ থাকবে না।

২.৭ গতির সমীকরণ
Equations of motion

পূর্বের অনুচ্ছেদে দূরত্ব, সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি রাশিগুলো সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। এই রাশিগুলো পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। এগুলোকে কয়েকটি সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এই সমীকরণগুলোকে গতির সমীকরণ বলে। সমীকরণগুলো নিম্নে আলোচিত হল।

একমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে বস্তু সরলরেখায় গতিশীল থাকে, তাই গতির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট রাশিগুলো যেমন সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির একটি মাত্র উপাংশ থাকে (X-অক্ষ বরাবর গতশীল হলে শুধুমাত্র X-উপাংশ থাকবে। Y ও Z উপাংশ শূন্য হবে।) নিম্নে রৈখিক গতির সমীকরণগুলো প্রতিপাদন করার সময় বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল ধরা হবে। সেক্ষেত্রে গতি সংক্রান্ত রশির প্রতীকগুলোর সঙ্গে অক্ষ নির্দেশক পদাংক ব্যবহার না করলেও চলে। তাই সাধারণভাবে বেগ v_x কে v এবং a_x কে a দ্বারা প্রকাশ করা হবে।

[**বিঃ দ্রঃ** একমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে যেহেতু একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল থাকে, তাই সরণ ও দূরত্ব, বেগ ও বেগের মান তথা দ্রুতি, ত্বরণ ও ত্বরণের মান একই অর্থ বহন করে।]

(ক) প্রথম সমীকরণ—(i) সমবেগে গতিশীল বস্তুর দূরত্বের সমীকরণ ($s = vt$) বা, $x = x_0 + v_x t$ ঃ
মনে করি একটি বস্তু v সমবেগে চলছে।

সমবেগের সংজ্ঞা হতে আমরা পাই,

বস্তুর 1 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= v \times 1$

সুতরাং " t " " " $= v \times t$

এই t সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব s দ্বারা সূচিত করলে আমরা পাই,

$$s = v \times t \qquad (2)$$

অর্থাৎ **দূরত্ব = সমবেগ × সময়**

X-অক্ষ বরাবর গতিশীল বস্তুর আদি অবস্থান x_0 এবং শেষ অবস্থান x হলে,

$s = x - x_0$ হয়। সেক্ষেত্রে সমীকরণ (2)-কে লেখা যায়,

$$x - x_0 = vt$$

$$\text{বা, } x = x_0 + vt \qquad 2(a)$$

ক্যালকুলাস পদ্ধতি ঃ মনে করি একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে সমবেগে গতিশীল।

ধরি, বস্তুটির সমবেগ $= v$

আদি সরণ $= 0$

t সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

অতি ক্ষুদ্র সময় dt সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব ds হলে

$t + dt$ সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত দুরত্ব $= s + ds$

আমরা জানি,

$$\text{বেগ, } v = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{বা, } ds = vdt \qquad (3)$$

যখন $t = 0$, তখন $s = 0$ এবং $t = t$ তখন $s = s$

সমীকরণ (3)-কে উল্লিখিত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_0^s ds = \int_0^t v\,dt$$

$$\text{বা, } \int_0^s ds = v\int_0^t dt \quad [\because v \text{ ধ্রুবক}]$$

$$\text{বা, } s = v \times t \qquad (4)$$

যদি বস্তুটি X-অক্ষের দিকে গতিশীল হয় এবং গতির শুরুতে অর্থাৎ যখন $t = 0$, তখন $s = x_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $s = x$ এবং বেগ, $v = v_x$ হয়, তবে সমীকরণ (3)-কে উপরোক্ত সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{x_0}^{x} ds = v_x \int_0^{t} dt$$

$$\text{বা, } [s]_{x_0}^{x} = v_x [t]_0^{t}$$

$$\text{বা, } x - x_0 = v_y t$$

$$\text{বা, } x = x_0 + v_x t \qquad (5)$$

(ii) অসম বেগে গতিশীল বস্তুর সরণ, বেগ ও সময়ের সম্পর্ক ঃ বস্তুটি অসম বেগে গতিশীল হলে গড়বেগ নিতে হয়।

মনে করি সময় গণনার শুরুতে অর্থাৎ সময় $t = 0$, তখন বস্তুটির আদি অবস্থান x_0 এবং t সময়ে এর অবস্থান x ।

অতএব, বস্তুর সরণ, $\Delta x = x - x_0$ এবং অতিক্রান্ত সময় $\Delta t = t - 0 = t$ ।

আমরা জানি,

গড় বেগ $\bar{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x - x_0}{t}$

বা, $x - x_0 = \bar{v} t$

বা, $x = x_0 + \bar{v} t$ (6)

শুরুতে বস্তুটি স্থির অবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করলে $x_0 = 0$ হবে,

সেক্ষেত্রে সমীকরণ (5) নিম্নরূপ হবে,

$$x = 0 + \bar{v}t = \bar{v}t \qquad 6(a)$$

(iii) সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর সরণ, বেগ ও সময়ের সম্পর্ক ঃ মনে করি, X-অক্ষ বরাবর a সমত্বরণে একটি বস্তু গতিশীল রয়েছে। Δt সময় ব্যবধানে বস্তুটির সরণ Δx হলে গড়বেগ,

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t} \qquad (7)$$

এখানে $t = 0$ অর্থাৎ শুরুতে বস্তুটির অবস্থান x_0 এবং t সময়ে বস্তুটির অবস্থান x ।

এখন সমত্বরণে গতিশীল কোন বস্তুর গড়বেগ সময় ব্যবধানের শুরু এবং শেষ বেগের মানদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক হয়। অর্থাৎ

$\bar{v} = \dfrac{v_0 + v}{2}$, এখানে v_0 = আদি বেগ ও v = শেষ বেগ

সমীকরণ (7)-এ $\bar{v}$-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\frac{v_0 + v}{2} = \frac{x - x_0}{t}$$

বা, $x - x_0 = \dfrac{1}{2}(v_0 + v)t$

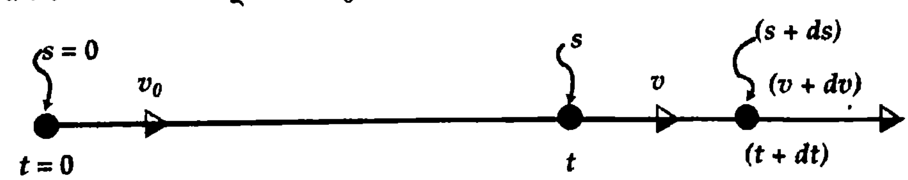
বা, $x = x_0 + \dfrac{1}{2}(v_0 + v)t$ (8)

বস্তুর সরণ $\Delta x = x - x_0 = s$ লিখলে সমীকরণ (8)-কে লেখা যায়

$$\mathbf{s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t} \qquad 8(a)$$

(খ) দ্বিতীয় সমীকরণ—সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর শেষ বেগের সমীকরণ ($v = v_0 + at$ বা $v_x = v_{x0} + a_x t$)

মনে করি, একটি নির্দিষ্ট দিকে একটি বস্তুর আদিবেগ v_0 এবং প্রতিসেকেণ্ডে বস্তুর বেগ a পরিমাণ বৃদ্ধি পায় অর্থাৎ সমত্বরণ a । t সময় পরে বস্তুর বেগ v_0 নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র ২.১৫

বস্তুটির 1 সেকেণ্ডে বেগ বৃদ্ধি $= a$

" t " " " $= at$

এখন, শেষ বেগ = আদিবেগ + বেগ বৃদ্ধি বইঘর.কম

বা, $v = v_0 + at$ (9)

অর্থাৎ, শেষ বেগ = আদি বেগ + ত্বরণ × সময়

যদি বস্তুর আদি বেগ না থাকে অর্থাৎ বস্তু স্থির অবস্থান হতে যাত্রা শুরু করে তবে $v_0 = 0$

সেক্ষেত্রে $v = at$ এবং a ধ্রুব হওয়ায় $v \propto t$

কাজেই **স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর প্রান্ত বেগ সময়ের সমানুপাতিক।**

বস্তু a সমত্বরণের পরিবর্তে a সমমন্দন নিয়ে চললে,

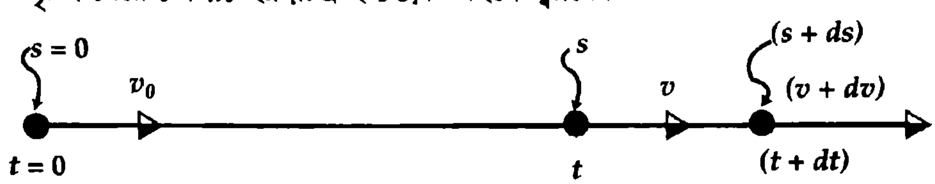
$$v = v_0 - at \tag{10}$$

যদি বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল থাকে এবং $v = v_x$, $u = v_{x_0}$ ও $a = a_x$ ধরা হয়, তবে সমীকরণ (9) ও (10) যথাক্রমে নিম্নরূপে লেখা যায় ঃ

$$v_x = v_{x_0} + a_x t \qquad 9(a)$$

এবং $$v_x = v_{x_0} - a_x t \qquad 10(a)$$

ক্যালকুলাস পদ্ধতি ঃ মনে করি কোন একটি দিকে u আদি বেগ সহ a সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর বেগ অতি অল্প dt সময়ে v হতে বৃদ্ধি পেয়ে $v + dv$ হয় [চিত্র ২·১৬]। তাহলে ত্বরণের



চিত্র ২·১৬

সংজ্ঞা অনুসারে,

ত্বরণ $a = \dfrac{dv}{dt}$

বা, $dv = adt$ (11)

যখন, $t = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $t = t$, তখন $v = v$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (11)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt$$

বা, $$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt$$

বা, $[v]_{v_0}^{v} = a[t]_0^t$

বা, $v - v_0 = at$

বা, $v = v_0 + at$ (12)

বস্তু সম মন্দনে চললে, মন্দন = − ত্বরণ = $-a$ এবং সেক্ষেত্রে

$$v = v_0 - at \qquad \ldots \qquad (13)$$

বিঃ দ্রঃ X অক্ষ বরাবর গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে আদিবেগ v_{x0}, শেষ বেগ v_x এবং ত্বরণ a_x ধরলে সমীকরণ (12) পরিবর্তিত হবে।

$$v_x = v_{x0} + a_x t \tag{14}$$

অনুরূপভাবে, সমীকরণ (13) পরিবর্তিত হবে। Y বা Z অক্ষ বরাবর গতির ক্ষেত্রে x-এর স্থলে যথাক্রমে y ব z ব্যবহার করতে হবে।

(গ) তৃতীয় সমীকরণ—সমত্বরণে বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ $\left(s = v_0t + \frac{1}{2}at^2\right.$ **বা,** $\left. x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_xt^2\right)$ **:**

মনে করি সরলরেখায় একটি গতিশীল বস্তুর আদি বেগ $= v_0$ এবং সমত্বরণ $= a$। t সময় পরে বস্তুর বেগ ধরি $= v$। মনে করি বস্তু উক্ত সময়ে s দূরত্ব অতিক্রম করল। সময়ের সাথে অতিক্রান্ত দূরত্বের সম্পর্কজনিত সমীকরণ প্রতিপাদন করতে হবে।

বস্তুর আদিবেগ $= v_0$ এবং শেষ বেগ $= v$। অতএব এই দুই বেগের

গড় $= \dfrac{v_0 + v}{2}$

যাত্রা শুরু হবার 1 সেকেন্ড পরে বস্তুর বেগ $= v_0 + 1 \times a = v_0 + a$

যাত্রা শেষ হবার 1 সেকেন্ড আগে বস্তুর বেগ $= v - 1 \times a = v - a$

উক্ত দুই সময়ের বস্তুর গড় বেগ $= \dfrac{v_0 + a + v - a}{2} = \dfrac{v_0 + v}{2}$

কাজেই, যাত্রা শুরু হবার n সেকেন্ড পরে বস্তুর বেগ$= v_0 + na$

যাত্রা শেষ হবার n সেকেন্ড আগে বস্তুর বেগ $= v - na$

উক্ত দুই সময়ের বস্তুর গড় বেগ $= \dfrac{v_0 + na + v - na}{2} = \dfrac{v_0 + v}{2}$

অতএব, যাত্রা শুরু হবার যত সময় পর এবং যাত্রা শেষ হবার তত সময় আগের বেগ বিবেচনা করলে প্রতি ক্ষেত্রেই উক্ত দুই সময়ের বস্তুর গড় বেগ $= \dfrac{\text{আদি বেগ + শেষ বেগ}}{2}$

গড় বেগ, $\bar{v} = \dfrac{v_0 + v}{2} = \dfrac{v_0 + v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{1}{2}at$ $[\because v = v_0 + at]$

মনে করি বস্তুর t সময়ের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

t সে.-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s =$ গড় বেগ $\times$ সময় $= \bar{v} \times t = \left(u + \frac{1}{2}at\right) \times t = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

কাজেই, $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ (15)

অতিক্রান্ত দূরত্ব = আদি বেগ $\times$ সময় + $\frac{1}{2}$ $\times$ ত্বরণ $\times$ সময়^{2}

এটিই সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর সময়ের সাথে সরণের সম্পর্ক।

যদি বস্তুটি স্থিতিশীল অবস্থা হতে যাত্রা শুরু করে,

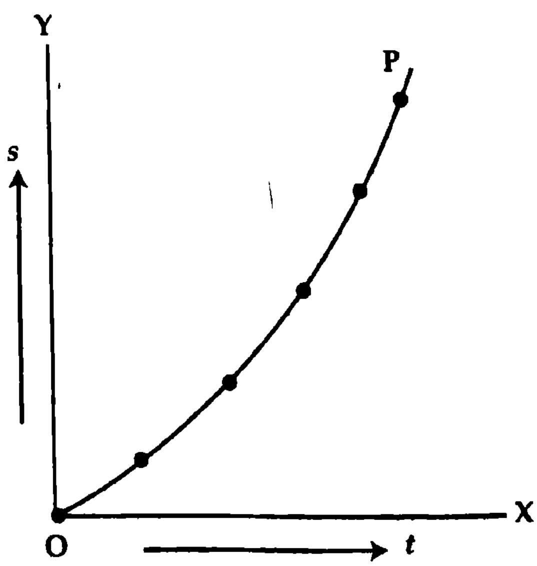
তবে $v_0 = 0$ ও সমীকরণ (15) অনুযায়ী,

$s = \frac{1}{2}at^2$

সমত্বরণের ক্ষেত্রে, $s =$ ধ্রুব $\times\, t^2$

কাজেই, $\boxed{s \propto t^2}$

অর্থাৎ **স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।**



চিত্র ২.১৭

চিত্র ২.১৭-এ সময়ের সঙ্গে সরণের লেখচিত্র দেখানো হয়েছে। বস্তু 'a' সমত্বরণের পরিবর্তে 'a'

সমমন্দনে চললে,

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad (16)$$

যদি বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হয় এবং $t = 0$ সময়ে আদি বেগ v_{x0}, অন্য যে কোন t সময়ে শেষ বেগ v_x ও সমত্বরণ a_x ধরা হয়, তবে সমীকরণ (15) লেখা যায়

$$s = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

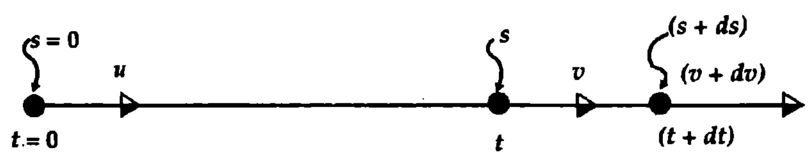
এখন $t = 0$ সময়ে বস্তুটির আদি অবস্থান x_0 এবং t সময়ে এর অবস্থান x হলে, $s = x - x_0$ হবে। সেক্ষেত্রে

$$s = x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\text{বা } x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \text{।} \qquad (17)$$

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি, u আদি বেগসহ একটি বস্তু a সমত্বরণে কোন একটি দিকে গতিশীল থেকে অতি অল্প dt সময়ে ds দূরত্ব অতিক্রম করল [চিত্র ২.১৮]। উক্ত সময়ে বস্তুর বেগ বৃদ্ধি dv হলে, ত্বরণের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\text{ত্বরণ}, a = \frac{dv}{dt} \quad \text{বা}, dv = a \times dt$$



চিত্র ২.১৮

বস্তুটি t সেকেন্ড শেষে v বেগ প্রাপ্ত হলে উক্ত সমীকরণকে সমাকলন এবং সরল করে আমরা পাই,

$v = v_0 + at$ [সমীকরণ (12) দ্রষ্টব্য]

কিন্তু বেগের সংজ্ঞা অনুসারে, $v = \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + at \quad \text{বা}, ds = (v_0 + at)\, dt \quad \text{বা}, ds = v_0 dt + at\, dt \qquad (18)$$

যখন $t = 0$, তখন $s = 0$ এবং যখন $t = t$ তখন $s = s$, এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (18)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_0^s ds = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at.dt$$

$$\text{বা}, \int_0^s ds = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t\,dt$$

$$\text{বা}, s = v_0 [t]_0^t + a \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

$$\text{বা}, s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (19)$$

অর্থাৎ, দূরত্ব = আদি বেগ $\times$ সময় + $\frac{1}{2}$ $\times$ ত্বরণ $\times$ সময়^{2}

বস্তু a সমত্বরণে না চলে a সমমন্দনে চললে, মন্দন = –ত্বরণ = $-a$ সমীকরণ (19) হতে পাই,

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad (20)$$

(ঘ) চতুর্থ সমীকরণ—সমত্বরণে বস্তুর আদি বেগ, শেষ বেগ এবং দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক ($v^2=v_0^2 + 2as$ বা, $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a\,(x - x_0)$ ঃ মনে করি কোন একটি সরলরেখা বরাবর a সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তুর আদি বেগ = v_0 ; t সময় পরে তার শেষ বেগ = v এবং উক্ত সময়ে বস্তুটি s দূরত্ব অতিক্রম করে। v, v_0, a ও s-এর সম্পর্কজনিত সমীকরণ প্রতিপাদন করতে হবে।

১ম পদ্ধতি ঃ সমীকরণ (12) ও (15) হতে পাই,

$v = v_0 + at$ ও $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$।

এখন, $v = (v_0 + at)$-এর বর্গ হতে পাওয়া যায়, $v^2 = (v_0 + at)^2$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2v_0 at + a^2t^2$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2a\left(v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right)$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2as \qquad \left[\; s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\right]$ (21)

এটি আদি বেগ, শেষ বেগ এবং অতিক্রান্ত দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক বা এটি সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর সরণের সাথে বেগের সম্পর্ক।

আদিবেগ $v_0 = 0$ হলে, সমীকরণ (20) হতে পাই,

$v^2 = 2as$

সমত্বরণের ক্ষেত্রে $a =$ ধ্রুব (22)

$v^2 \propto s$

বা, $v \propto \sqrt{s}$

অর্থাৎ, **সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর শেষ বেগ সরণের বর্গমূলের সমানুপাতিক।**

X-অক্ষ বরাবর গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে যদি $u = v_{x0}$, $v = v_x$, $a = a_x$ এবং $s = x - x_0$ ধরা হয়, তবে সমীকরণ (21)-কে লেখা যায়,

$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x\,(x - x_0)$ (23)

এখানে v_{x_0}, v_x, a_x, x ও x_0 যথাক্রমে বস্তুটির আদি বেগ, শেষ বেগ, সমত্বরণ, আদি অবস্থান ও শেষ অবস্থান নির্দেশ করে।

২য় পদ্ধতি ঃ সমত্বরণে গতিশীল কোন বস্তুর ক্ষেত্রে

গড়বেগ, $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$ এখানে $v_0 =$ আদিবেগ ও $v =$ শেষ বেগ।

আবার, $v = v_0 + at$

বা, $at = v - v_0$

বা, $t = \frac{v - v_0}{a}$

$$s = \bar{v} \times t = \frac{v_0 + v}{2} \times \frac{v - v_0}{a}$$

$$= \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

সুতরাং $v^2 = v_0^2 + 2as$

বস্তু স্থিতিশীল অবস্থা হতে সমত্বরণে যাত্রা শুরু করলে, $v_0 = 0$ এবং সমীকরণ (21) অনুসারে,

$v^2 = 2as$

বস্তু a সমত্বরণে না চলে a সমমন্দনে চললে,

$$v^2 = v_0^2 - 2as \tag{24}$$

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি u আদিবেগসহ একটি বস্তু a সমত্বরণে চলে অতি অল্প dt সময়ে ds দূরত্ব অতিক্রম করে ও dv পরিমাণ বেগের পরিবর্তন ঘটে। কিন্তু নির্দিষ্ট দিকে কোন একটি বস্তুর স্থান পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে এবং বেগ, $v = \dfrac{ds}{dt}$ । আবার, কোন একটি বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে ত্বরণ বলে এবং ত্বরণ

$a = \dfrac{dv}{dt}$ বা, $a = \dfrac{dv}{ds} \times \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{dv}{ds} \times v$

$$v.\, dv = a.ds \tag{25}$$

যখন $s = 0$, তখন $v = v_0$ এবং যখন $s = s$ তখন $v = v$, এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (25)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_0^s a ds$$

বা, $\displaystyle\int_{v_0}^{v} v dv = a \int_0^s a ds$

বা, $\left[\dfrac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = a[s]_0^s$ $\quad [\because a = \text{ধ্রুব}]$

বা, $\dfrac{v^2}{2} - \dfrac{v_0^2}{2} = as$

বা, $\dfrac{v^2}{2} = \dfrac{v_0^2}{2} + as$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2\, as$ (26)

বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর গতিশীল হলে, যখন $x = x_0$ এবং যখন $x = x$ তখন $v = v_x$। এই সীমার মধ্যে সমীকরণ (25)-এর উভয় পক্ষকে সমাকলন করে পাই,

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} v dv = \int_{x_0}^{x} a ds$$

বা, $\displaystyle\int_{v_{x0}}^{v_x} v dv = a \int_{x_0}^{x} ds$ $\quad [\because a = \text{ধ্রুব}]$

বা, $\left[\dfrac{v}{2}\right]_{v_{x0}}^{v_x} = a[s]_{x_0}^{x}$

বা, $\dfrac{v_x^2}{2} - \dfrac{v_{x0}^2}{2} = a\,[x - x_0]$

বা, $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a\,(x - x_0)$

সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে এটিই আদি বেগ, শেষ বেগ এবং দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক।

বস্তু a সমত্বরণে না চলে a সম-মন্দনে চললে

$$v^2 = v_0^2 - 2as \tag{27}$$

চতুর্থ সমীকরণ—সমত্বরণে বস্তুর t-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব ঃ

মনে করি, একটি নির্দিষ্ট দিকে a সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তুর আদি বেগ = v_0। গতিশীল থাকা অবস্থায় কোন একটি বিশেষ সেকেন্ডে বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করতে হবে। মনে করি t-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব = s_t। এটি বস্তুর t সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব হতে $(t-1)$ সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্বের বিয়োগফলের সমান হবে।

s_t = t সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব — $(t-1)$ সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - \{v_0(t-1) + \frac{1}{2}a(t-1)^2\}$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - \{v_0 t - v_0 + \frac{1}{2}a(t^2 - 2t + 1)\}$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 - \{v_0 t - v_0 + \frac{1}{2}at^2 - at + \frac{1}{2}a\}$$

$$= at + \frac{1}{2}at^2 - v_0 t + v_0 - \frac{1}{2}at^2 + at - \frac{1}{2}a$$

$$= v_0 + at - \frac{1}{2}a = v_0 + \frac{1}{2}a(2t-1)$$

$$\mathbf{s_t = v_0 + \frac{1}{2}a(2t-1)} \qquad (28)$$

বস্তু স্থিতিশীল অবস্থা হতে যাত্রা শুরু করলে, $v_0 = 0$

$$\therefore s_t = \frac{1}{2}a(2t-1) \qquad (29)$$

বস্তু a সমত্বরণে না চলে a সমমন্দনে চললে, $s_t = v_0 - \frac{1}{2}a(2t-1)$ (30)

২·৮ গতি বিষয়ক কয়েকটি লেখচিত্র
Some graphs relating to motion

উপরোক্ত বিষয় আলোচনা করার আগে আমরা আলোচনা করব লেখ এবং লেখচিত্র বা রেখা চিত্র (Graph) কি ? এর জবাবে বলা হবে **সমতলিক ক্ষেত্রে দুটি চলকের ক্রমজোড় হচ্ছে লেখ এবং ক্রমজোড়গুলো যখন ছক কাগজে স্থাপন করা হয় তখন তাকে লেখচিত্র বলে।**

মনে করি f, x-এর একটি অপেক্ষক (function) অর্থাৎ $f = f(x)$। f বনাম x ছক কাগজে স্থাপন করে যে সরল বা বক্ররেখা পাওয়া যাবে তার নাম **লেখ** (curve) এবং অক্ষ দুটিসহ পুরো চিত্রটিকে **লেখচিত্র** বা **রেখাচিত্র** (Graph) বলা হয়।

এখন কতকগুলো গতিবিষয়ক রাশির লেখচিত্র অঙ্কন করে তা বিশ্লেষণ করা হবে।

১। সমবেগে গতিশীল বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ ঃ

আমরা জানি, $s = s_0 + v \times t$ (31)

এখানে v ধ্রুব রাশি $\quad s \propto t$

এটি একটি একঘাত সমীকরণ। ছক কাগজের X-অক্ষে t এবং Y-অক্ষে s অর্থাৎ দূরত্ব বনাম সময় লেখ অঙ্কন করলে লেখটি একটি সরলরেখা হবে। চিত্র ২.১৯-এ লেখচিত্রটি দেখান হল।

ব্যবহার ঃ উক্ত চিত্র হতে যে-কোন সময়ের বেগ বের করা যায়।

বেগ = ঢাল = $\frac{AB}{AC} = \frac{8m}{4s} = 2ms^{-1}$

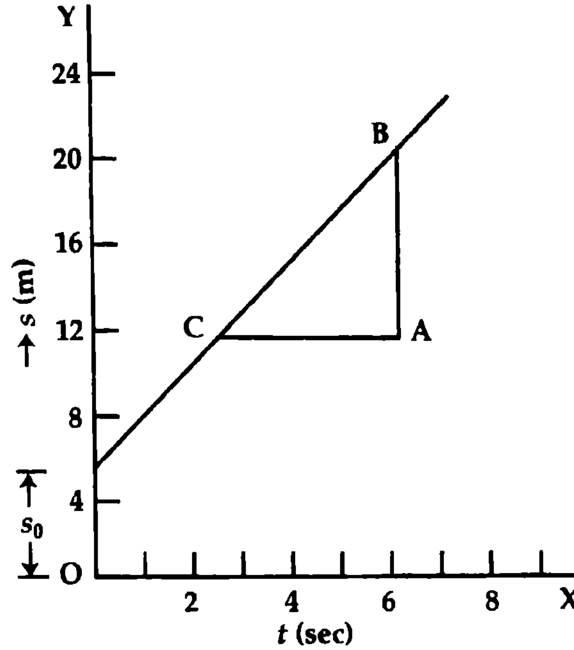
লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ঃ লেখচিত্রটির নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য দেখা যায়।

(ক) s বনাম t লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে।

(খ) বস্তু স্থিরাবস্থা হতে যাত্রা শুরু করলে অর্থাৎ আদি বেগ শূন্য হলে লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী সরল রেখা হবে।

(গ) লেখচিত্রটির Y-অক্ষের ছেদক আদি দূরত্ব প্রকাশ করে।

(ঘ) লেখচিত্রটির ঢাল বেগ প্রকাশ করে।

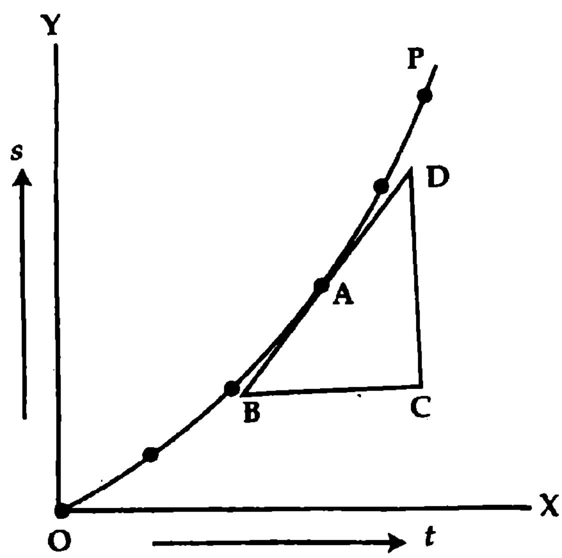


চিত্র ২.১৯

২। সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ ঃ

আমরা জানি $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

এই সমীকরণে দুটি উপাদান রয়েছে, প্রথমটি হল সময় t এবং দ্বিতীয়টি হল s। t-কে X-অক্ষে এবং s-কে Y-অক্ষে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করা হয়। এই লেখচিত্রটি প্যারাবোলা হবে এবং মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে [চিত্র ২.২০]।



চিত্র ২.২০

ব্যবহার ঃ এই লেখচিত্রের সাহায্যে যে-কোন সময়ের ব্যবধানে বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব বের করা যায়।

লেখচিত্রটির বৈশিষ্ট্য ঃ লেখচিত্রটির নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য রয়েছে ঃ

(ক) লেখচিত্রটি একটি প্যারাবোলা হবে।

(খ) লেখচিত্রটি মূলবিন্দু দিয়ে যাবে।

(গ) বস্তুটির আদি বেগ শূন্য হলে $s \propto t^2$ অর্থাৎ অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

(ঘ) এই ধরনের লেখচিত্রের সাহায্যে বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগও বের করা যায়।

তাৎক্ষণিক বেগ নির্ণয় ঃ চিত্র ২.২০-এ A বিন্দুতে একটি স্পর্শক অংকন করে ঐ বিন্দু হতে সমদূরত্বে দুটি রেখাংশ AB ও AD নিয়ে BCD সমকোণী ত্রিভুজ অংকন করি। এখন A বিন্দুতে,

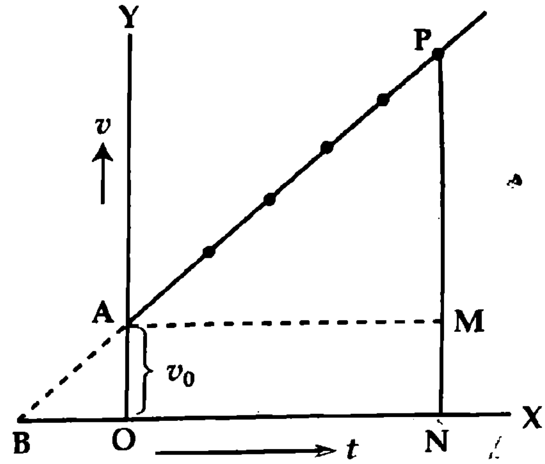
তাৎক্ষণিক বেগ = ঢাল = $\frac{CD}{BC}$ পাওয়া যাবে

A বিন্দুর উপরে বা নিচে বিভিন্ন বিন্দুতে অনুরূপভাবে বেগ নির্ণয় করলে ঐ সমস্ত বিন্দুতে তাৎক্ষণিক বেগ পাওয়া যায় এবং দেখা যাবে যে প্রত্যেকটি বেগ ভিন্নতর।

৩। সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর শেষ বেগের সমীকরণ ঃ

আমরা জানি, $v = v_0 + at$

এই সমীকরণে দুটি উপাদান রয়েছে, প্রথমটি হল সময় t এবং দ্বিতীয়টি হল বেগ v। t-কে X-অক্ষে এবং v-কে Y-অক্ষে স্থাপন করে লেখচিত্রটি টানা হয়। এই লেখচিত্রটিকে v বনাম t লেখচিত্র বলে। লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ২.২১]।



চিত্র ২.২১

ব্যবহার ঃ এই লেখচিত্রের সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধানে বস্তুর বেগ নির্ণয় করা যায়।

লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য ঃ লেখচিত্রটির নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য রয়েছে ঃ

(ক) লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে।

(খ) বস্তুর আদি বেগ শূন্য হলে $v \propto t$ এবং লেখটি মূলবিন্দুগামী হবে।

(গ) লেখচিত্রের Y-অক্ষের ছেদক বস্তুর আদি বেগ প্রকাশ করে।

(ঘ) এটি একটি একঘাত সমীকরণের লেখচিত্র।

লেখচিত্র হতে $v = v_0 + at$ প্রতিপাদন ঃ

v বনাম t লেখচিত্র হতে আমরা $v = v_0 + at$ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারি। চিত্রে P বিন্দু হতে OY অক্ষের উপর PY লম্ব টানি।

মনে করি t সময়ে বস্তুর চূড়ান্ত বেগ $= v = \text{OY}$

এখন, $\text{OY} = \text{OA} + \text{AY}$, অর্থাৎ $v = v_0 + \text{AY}$

আবার রেখাটির ঢাল, $a = \dfrac{\text{PM}}{\text{AM}} = \dfrac{\text{AY}}{\text{AM}} = \dfrac{\text{AY}}{t}$

বা, $\text{AY} = at$ অতএব, $v = v_0 + at$ (প্রমাণিত)

৪। লেখচিত্র হতে $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ প্রতিপাদন ঃ

চিত্র ২.২১ এ v বনাম t লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা। এই লেখচিত্র হতে আমরা $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারি।

চিত্রে $\text{PN} \perp \text{OX}$; $\text{AM} \perp \text{OY}$

ধরি, আদি বেগ $= v_0$, সমত্বরণ $= a$, $\text{ON} = t$ এবং t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

এখন, s = OAPN ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

= OAMN আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AMP ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \text{OA} \times \text{ON} + \frac{1}{2} \times \text{AM} \times \text{PM}$

$= v_0 t + \frac{1}{2} \times \text{AM} \times \text{PM}$

আবার ঢাল, $a = \dfrac{\text{PM}}{\text{AM}} = \dfrac{\text{PM}}{t}$

বা, $\text{PM} = at$

অতএব, $s = v_0 t + \frac{1}{2} t \times at = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ (প্রমাণিত)

২.৯ পড়ন্ত বস্তুর সূত্র
Laws of falling bodies

কোন বস্তুকে অভিকর্ষ বলের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়তে দিলে বস্তুর গতি তিনটি সূত্র মেনে চলে। 1589 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী গ্যালিলিও (Galileo) এই সূত্র তিনটি আবিষ্কার করেন। এগুলোকে পড়ন্ত বস্তুর সূত্র বলা হয়। সূত্রগুলো নিম্নে প্রদত্ত হল ঃ

১ম সূত্র ঃ বায়ুশূন্য স্থানে বা বাধাহীন পথে সকল বস্তুই নিশ্চল অবস্থা হতে যাত্রা করে সমান দ্রুততায় নিচে নামে অর্থাৎ সমান সময়ে সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

ব্যাখ্যা ঃ ছোট, বড় ও বিভিন্ন ওজনের কতকগুলো বস্তু একই উচ্চতা হতে ও স্থিরাবস্থা হতে ছেড়ে দিলে বাধাহীন পথে তারা সমান দ্রুততায় অর্থাৎ ত্বরণে গতিশীল থাকবে এবং একই সময়ে মাটিতে পড়বে।

২য় সূত্র ঃ বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে প্রাপ্ত বেগ ঐ সময়ের সমানুপাতিক। কোন পড়ন্ত বস্তু t সময়ে v বেগ প্রাপ্ত হলে, গাণিতিকভাবে লেখা যায়, $\boxed{v \propto t}$।

ব্যাখ্যা ঃ অভিকর্ষের টানে স্থিরাবস্থা হতে বাধাহীন পথে নিচের দিকে পড়বার সময় কোন বস্তুর বেগ যদি এক সেকেন্ড পরে v হয় তবে তার বেগ দুই সেকেন্ড পরে $v \times 2$, তিন সেকেন্ড পরে $v \times 3$ ইত্যাদি হবে। সাধারণভাবে বলা যায় যে, কোন একটি পড়ন্ত বস্তুর বেগ t_1 ও t_2 সময়ে যথাক্রমে v_1 ও v_2 হলে,

$$\frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} \quad \text{বা}, \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2} \quad \therefore \boxed{v \propto t}$$

৩য় সূত্র ঃ বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব ঐ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। কোন পড়ন্ত বস্তু t সময়ে h দূরত্ব অতিক্রম করলে গাণিতিক নিয়মে লেখা যায়, $h \propto t^2$।

ব্যাখ্যা ঃ অভিকর্ষের টানে স্থিতাবস্থা হতে বাধাহীন পথে নিচের দিকে পড়বার সময় কোন বস্তু যদি প্রথম সেকেন্ডে h দূরত্ব অতিক্রম করে তবে বস্তুটি দুই সেকেন্ডে $2^2 \times h$, তিন সেকেন্ডে $3^2 \times h$ ইত্যাদি দূরত্ব অতিক্রম করবে।

কাজেই বস্তুটি t_1 ও t_2 সেকেন্ডে যথাক্রমে h_1 ও h_2 দূরত্ব অতিক্রম করলে,

$$\frac{h_1}{t_1^2} = \frac{h_2}{t_2^2} \quad \text{বা}, \frac{h_1}{h_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2} \quad \therefore \boxed{h \propto t^2}$$

গিনি ও পালক পরীক্ষা (Guinea and Feather Experiment) ঃ এটা নিউটনের একটি পরীক্ষা। এই পরীক্ষার সাহায্যে তিনি পড়ন্ত বস্তুর প্রথম সূত্রের সত্যতা নিরূপণ করেন। এই পরীক্ষায় একটি গিনি বা স্বর্ণ মুদ্রা এবং একটি পালক ব্যবহার করা হয়েছিল বলে এই পরীক্ষার নাম হয় **গিনি ও পালক পরীক্ষা।**

যন্ত্রের বর্ণনা ঃ এই পরীক্ষায় এক মিটার লম্বা দুই মুখ খোলা মোটা ফাঁপা একটি শক্ত কাচ নল M নেয়া হয়। নলের এক প্রান্তে একটি ধাতব টুপি C থাকে। নলের অপর প্রান্তে একটি স্টপ-কক S লাগানো আছে যাতে নলটিকে একটি বায়ু নিষ্কাশন যন্ত্রের সাথে যুক্ত করা যেতে পারে [চিত্র ২·১৮]।

কার্য পদ্ধতি ঃ প্রথমে ধাতব টুপি C খুলে একটি গিনি ও একটি পালককে নলের মধ্যে ঢুকানো হয়। নলের অপর প্রান্ত বায়ু নিষ্কাশন পাম্পের সাথে যুক্ত করে স্টপ-কক S খুলে দিয়ে নলের মধ্য হতে সমস্ত বায়ু বের করে নিয়ে স্টপ-ককটি বন্ধ করা হয়। এ অবস্থায় নলটিকে হঠাৎ উল্টিয়ে ধরলে দেখা যাবে গিনি এবং পালক নলের অপর প্রান্তে একই সঙ্গে উপনীত হয়েছে। পুনরায় বাতাস ঢুকিয়ে নলটিকে উল্টিয়ে ধরলে গিনিটিকে পালকের পূর্বেই নলের অপর প্রান্তে উপনীত হতে দেখা যাবে। এ থেকে প্রমাণিত হয় যে, বায়ুশূন্য স্থানে সকল বস্তুই নিশ্চল অবস্থা হতে যাত্রা করে সমান দ্রুততায় নিচে নামে। অতএব প্রথম সূত্রটি প্রমাণিত হল।

চিত্র ২·২২

২·১০ উল্লম্ব পতন বা উত্থানশীল বস্তুর গতির সমীকরণ
Equations of motion of a vertically falling or ascending body

বাধাহীন পথে কোন বস্তুকে প্রাথমিক বেগ v_0 সহকারে সোজা উপরের দিকে বা নিচের দিকে নিক্ষেপ করলে অথবা একটি বস্তুকে অভিকর্ষের টানে পড়তে দিলে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে রৈখিক গতির সমীকরণসমূহ (অনুচ্ছেদ ২·৭

দ্রষ্টব্য) প্রয়োগ করা যায়। পড়ন্ত বস্তুর উপর যে ত্বরণ হয়, তা অভিকর্ষের টানে হয়ে থাকে। এই ত্বরণকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে [বিস্তারিত সপ্তম অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে]। একে 'g' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ভূ-পৃষ্ঠ হতে উপরের দিকে এর মান কমে। তবে ভূ-পৃষ্ঠের কাছাকাছি অঞ্চলে এর মান $9·8\ ms^{-2}$, যা প্রায় ধ্রুব থাকে।

পড়ন্ত বস্তুর গতির ক্ষেত্রে রৈখিক গতির সমীকরণগুলো ব্যবহারের সময় ত্বরণ 'a' এর পরিবর্তে অভিকর্ষজ ত্বরণ g এবং দূরত্ব 's' এর পরিবর্তে উচ্চতা h ধরলে গতির সমীকরণগুলো নিম্নরূপ হয়।

(ক) খাড়া নিচের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতির সমীকরণ

t সময় পর বস্তুর বেগ, $v = v_0 + gt$ (32)

t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$ (33)

h দূরত্ব অতিক্রমান্তে বেগ, $v^2 = v_0^2 + 2gh$ (34)

t-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত উচ্চতা, $h_t = v_0 + \frac{1}{2}g(2t - 1)$ (35)

(খ) পড়ন্ত বস্তুর গতির সমীকরণ

পতনশীল বস্তুর আদি বেগ, $v_0 = 0$

উপরোক্ত সমীকরণগুলো হতে আমরা পাই,

t সময় পর বেগ, $v = gt$ (36)

t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $h = \frac{1}{2}gt^2$ (37)

h দূরত্ব অতিক্রমান্তে বেগ, $v^2 = 2gh$ (38)

t-তম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত উচ্চতা, $h_t = \frac{1}{2}g\ (2t - 1)$ (39)

(গ) খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতির সমীকরণ

t সময় পর বেগ, $v = v_0 - gt$ (40)

t সময়ে অতিক্রান্ত উচ্চতা, $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ (41)

h উচ্চতা অতিক্রমান্তে বেগ, $v^2 = v_0^2 - 2gh$ (42)

t-তম সেকেন্ড অতিক্রান্ত উচ্চতা, $h_t = v_0 - \frac{1}{2}g\ (2t - 1)$ (43)

এ ক্ষেত্রে বস্তু অভিকর্ষীয় বলের বিপরীত দিকে যাওয়ায় g ঋণ রাশি।

মনে রাখতে হবে বস্তু যখন সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছায়, তখন তার শেষ বেগ, $v = 0$

আরও প্রয়োজনীয় কতকগুলো সমীকরণ নিয়ে আলোচিত হল :

সর্বাধিক উচ্চতায় সমীকরণ :

মনে করি, সর্বাধিক উচ্চতা = h

আমরা পাই, $v^2 = v_0^2 - 2gh$ [$\because$ সর্বাধিক উচ্চতায় $v = 0$]

বা, $0 = v_0^2 - 2gh$

বা, $2gh = v_0^2$

বা, $\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g}}$ (44)

এখানে v_0 = আদি বেগ বা নিক্ষিপ্ত বেগ ও g = অভিকর্ষীয় ত্বরণ।

নির্দিষ্ট উচ্চতায় পৌঁছতে অতিবাহিত সময় : মনে করি কোন সর্বাধিক উচ্চতায় পৌঁছতে ব্যয়িত সময় $= t$

আমরা পাই, $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

বা, $\frac{1}{2}gt^2 - v_0t + h = 0$

$$t = \frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} \quad (45)$$

বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছতে অতিবাহিত সময় : মনে করি সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছতে ব্যয়িত সময় = t

আমরা পাই, $v = v_0 - gt$

বা, $0 = v_0 - gt$ বা, $gt = v_0$

$$t = \frac{v_0}{g} \quad (46)$$

এখানে, v_0 = বস্তুর আদি বেগ ও g = অভিকর্ষীয় ত্বরণ।

বস্তুর উত্থান-পতনে অতিবাহিত সময় : মনে করি, বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতায় পৌছার পরবর্তী মূহূর্ত হতে ঐ একই দূরত্ব নিচে নামতে t_1 সময় অতিবাহিত হয়। তা হলে,

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g} \times h} = \sqrt{\frac{2}{g} \times \frac{v_0^2}{2g}} = \frac{v_0}{g} = t$$

কাজেই, পতনে অতিবাহিত সময় = উত্থানে অতিবাহিত সময়।

যাওয়া-আসা বা উত্থান-পতনে অতিবাহিত সময় বা ভ্রমণ কাল

$$T = t + t_1 = t + t = 2t$$

$$\text{বা, } \boxed{T = \frac{2v_0}{g}} \quad (47)$$

এখানে, u = আদি বেগ ও g = অভিকর্ষীয় ত্বরণ।

কোন নির্দিষ্ট উচ্চতায় বস্তুর বেগ : মনে করি কোন নির্দিষ্ট উচ্চতায় বস্তুর বেগ = v

আমরা পাই, $v^2 = v_0^2 - 2gh$

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad (48)$$

স্মরণিকা

স্থিতি : সময়ের প্রেক্ষিতে এবং পারিপার্শ্বিক বস্তুর সাপেক্ষে যদি কোন বস্তু তার অবস্থানের পরিবর্তন না ঘটায় তবে তার অবস্থাকে স্থিতি বলে।

গতি : সময়ের প্রেক্ষিতে এবং পারিপার্শ্বিক বস্তুর সাপেক্ষে যদি কোন বস্তু তার অবস্থানের পরিবর্তন ঘটায় তবে তার অবস্থাকে গতি বলে।

প্রসঙ্গ কাঠামো : যে দৃঢ় বস্তু বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোন স্থানে অন্য বিন্দু বা বস্তুকে নির্দিষ্ট করা হয়, তাকে প্রসঙ্গ কাঠামো বলে।

সরণ : কোন বস্তুর সরণ একটি ভেক্টর যার মান বস্তুটির শেষ এবং আদি অবস্থানের মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব এবং দিক হল আদি থেকে শেষ অবস্থানের দিকে।

গড় দ্রুতি : কোন বস্তু কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং মোট ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় দ্রুতি বলে।

তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর দূরত্বের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক দ্রুতি বা দ্রুতি বলে।

গড় বেগ : যে কোন সময় ব্যবধানে কোন বস্তুর মোট সরণকে ঐ সময় ব্যবধান দিয়ে ভাগ করলে যে রাশি পাওয়া যায় তাকেই বস্তুটির গড় বেগ বলে।

তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সঙ্গে বস্তুর সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ বলে।

গড় ত্বরণ : কোন একটি গতিশীল বস্তুর বেগের বৃদ্ধি এবং ঐ বৃদ্ধির জন্য ব্যয়িত সময়ের ভাগফলকে গড় ত্বরণ বলে।

তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কোন একটি গতিশীল বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ বলে।

গতির সমীকরণ : গতিবিষয়ক সংকেতগুলোকে কতকগুলো সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এদেরকে গতির সমীকরণ বলে।

পড়ন্ত বস্তুর সূত্র : পড়ন্ত বস্তুর তিনটি সূত্র রয়েছে। সূত্রগুলো নিম্নে বিবৃত হল।

১ম সূত্র : বায়ুশূন্য স্থানে সকল বস্তুই স্থির অবস্থান হতে যাত্রা করে সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করে।

২য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের প্রাপ্ত বেগ ঐ সময়ের সমানুপাতিক।

৩য় সূত্র : বাধাহীন পথে পড়ন্ত বস্তুর নির্দিষ্ট সময়ের অতিক্রান্ত দূরত্ব ঐ সময়ের বর্গের সমানুপাতিক।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

গড় দ্রুতি, $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (1)

তাৎক্ষণিক দ্রুতি, $v = \dfrac{ds}{dt}$ (2)

গড় বেগ, $\vec{\bar{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ (3)

তাৎক্ষণিক বেগ, $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ (4)

$\vec{v}_x = v_x = \dfrac{dx}{dt}$ (4a)

মধ্য বেগ, $\dfrac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}$ (5)

গড় ত্বরণ, $\vec{\bar{a}} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (6)

$\bar{a}_x = \dfrac{\Delta v_x}{dt}$ 6(a)

তাৎক্ষণিক ত্বরণ, $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ (7)

$a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$ 7(a)

সমবেগে গতিশীল বস্তুর দূরত্বের সমীকরণ :

$s = vt$ (8)

$x = x_0 + v_x t$ 8(a)

সমত্বরণে[1] গতিশীল বস্তুর গতির সমীকরণ :

$v = v_0 + at$ (9)

$v_x = v_{x_0} + a_x t$ 9(a)

$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ (10)

$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ 10(a)

$v^2 = v_0^2 + 2as$ (11)

$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a(x - x_0)$ 11(a)

$s_t = v_0 + \frac{1}{2} a(2t - 1)$ (12)

পড়ন্ত বস্তুর গতির সমীকরণ :

$v = gt$ (13)

$h = \frac{1}{2} gt^2$ (14)

$v^2 = 2gh$ (15)

$h_t = \frac{1}{2} g(2t - 1)$ (16)

খাড়াভাবে[2] নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতির সমীকরণ :

$v = v_0 \pm gt$ (17)

$v^2 = v_0^2 \pm 2gh$ (18)

$h = v_0 t \pm \frac{1}{2} gt^2$ (19)

$h_t = v_0 + \frac{1}{2} g(2t - 1)$ (20)

[1] বস্তুটি সম-মন্দনে গতিশীল হলে 'a' এর পরিবর্তে '$-a$' হবে।

[2] খাড়া নিচের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে g ধনাত্মক এবং খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ক্ষেত্রে g ঋণাত্মক হবে।

$\boxed{\text{সর্বাধিক উচ্চতার ক্ষেত্রে ঃ } h = \frac{v_0^2}{2g} \text{ ও } t = \frac{v_0}{g}}$ (21)

$\boxed{\text{উত্থানে ব্যয়িত সময় = পতনে ব্যয়িত সময় এবং ভ্রমণকাল } T = \frac{2v_0}{g}}$ (22)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হতে $2\ ms^{-2}$ সমত্বরণে চলতে থাকে।
(ক) 5s পরে বেগ কত হবে ?
(খ) প্রথম 5s পরে গড় বেগ কত হবে ?
(গ) প্রথম 5s-এ কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ?
(ঘ) কতক্ষণ পরে বেগ $40\ ms^{-1}$ হবে ?
(ঙ) 5ম s-এ কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ?

প্রশ্নানুযায়ী $v_0 = 0$ এবং $a = 2\ ms^{-2}$

(ক) $t = 5s$ পরে বেগ, $v = v_0 + at = 0 + 2\ ms^{-2} \times 5s = 10\ ms^{-1}$

(খ) প্রথম 5s-এর গড় বেগ, $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0 + 10\ ms^{-1}}{2} = 5\ ms^{-1}$

(গ) প্রথম $t = 5$ s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = \bar{v} \times t = 5\ ms^{-1} \times 5s = 25\ m$

(ঘ) t s পরে বেগ $v = 40\ ms^{-1}$ হলে, $t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{40 - 0}{2} = 20\ s$

(ঙ) মনে করি 5ম সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব = s_5

আমরা পাই,

$$s_5 = v_0 + \frac{1}{2} a\,(2t - 1)$$

$$s_5 = 0 + \frac{1}{2} \times 2\ ms^{-2} (2 \times 5\ s - 1) = 9\ m$$

এখানে,
$v_0 = 0$
$a = 2\ ms^{-2}$
$t = 5\ s$

২। একটি বিমান প্রতি ঘণ্টায় 360 km বেগে মাটি স্পর্শ করে 1 km দূরত্ব অতিক্রমান্তে থেমে যায়। মন্দন ও মন্দনের ক্রিয়া কাল নির্ণয় কর।

$v_0 = 100\ m/s$

আমরা পাই, $v^2 = v_0^2 + 2as$

ও $v = v_0 + at$

$$\therefore a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{0 - (100\ ms^{-1})^2}{2 \times 1000\ m} = -5\ m/s^2$$

$$\text{ও } t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 100\ ms^{-1}}{-5\ ms^{-2}} = 20\ s$$

এখানে,
$v_0 = 360\ kmh^{-1} = \frac{360 \times 1000}{60 \times 60}\ ms^{-1} = 100\ ms^{-1}$
$v = 0$
$s = 1\ km = 1000\ m$

৩। $20\ ms^{-1}$ বেগে গতিশীল একটি বস্তুর বেগ প্রতি সেকেন্ডে $3\ ms^{-1}$ হারে হ্রাস পায়। থেমে যাওয়ার আগে বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ? [য. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$
$$0 = (20)^2 - 2 \times 3 \times s$$
$$s = \frac{(20)^2}{6} = 66{\cdot}67\ m$$

এখানে,
$v_0 = 20\ ms^{-1}$
$a = 3\ ms^{-2}$
$v = 0$
$s = ?$

৪। একটি বস্তু সমত্বরণে চলছে। এটি দ্বাদশ সেকেন্ডে 0·72 মিটার এবং ষোড়শ সেকেন্ডে 0·96 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করল। বস্তুটির ত্বরণ ও আদি বেগ নির্ণয় কর।

$a = \frac{S_{t_2} - S_{t_1}}{t_2 - t_1} = \frac{.96 - .72}{4} = 0.06$

ধরি বস্তুটির বেগ = v_0 এবং ত্বরণ = f

আমরা পাই, $s_t = v_0 + \frac{1}{2} f (2t - 1)$

$$0{\cdot}72 = v_0 + \left(\frac{2 \times 12 - 1}{2}\right) f = v_0 + \frac{23}{2} f \quad (1)$$

$$\text{এবং } 0{\cdot}96 = v_0 + \left(\frac{2 \times 16 - 1}{2}\right) f = v_0 + \frac{31}{2} f \quad (2)$$

BG & JEWEL

সমীকরণ (2) হতে সমীকরণ (1) বিয়োগ করে পাওয়া যায়, $0.24 = 4f$

$$f = \frac{0.24}{4} = 0.06\ \text{m/s}^2$$

এখন f-এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$0.72 = v_0 + \frac{23}{2} \times 0.06 = v_0 + 0.69$$

$$\therefore v_0 = 0.03\ \text{m/s}$$

৫। একটি ট্রেন $10\ \text{ms}^{-1}$ আদিবেগে এবং $3\ \text{ms}^{-2}$ সমত্বরণে চলছে। যখন $60\ \text{m}$ পথ অতিক্রম করবে তখন ট্রেনটির বেগ কত ? [ঢা. বো. ২০০২ ; রা. বো. ২০০৪]

v_0 a s

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$
$$= (10)^2 + 2.3.60$$
$$= 100 + 360 = 460$$
$$v = \sqrt{460}$$
$$= 21.45\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
$v_0 = 10\ \text{ms}^{-1}$
$a = 3\ \text{ms}^{-2}$
$s = 60\ \text{m}$
$v = ?$

৬। একটি বস্তু স্থির অবস্থান হতে যাত্রা আরম্ভ করে প্রথম সেকেন্ডে $1\ \text{m}$ দূরত্ব অতিক্রম করে। পরবর্তী $1\ \text{m}$ দূরত্ব অতিক্রম করতে বস্তুটির কত সময় লাগবে বের কর। [রা. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৪]

আমরা জানি, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

বা, $1 = 0 \times t + \frac{1}{2}a(1)^2$

বা, $a = 2\ \text{ms}^{-2}$

এখানে,
$v_0 = 0$
$t = 1\ \text{sec}$
$s = 1\ \text{m}$

আবার,

$$v' = v_0 + at$$
$$v' = 0 + 2.(1) = 2\ \text{ms}^{-1}$$
$$s' = v't' + \frac{1}{2}at'^2$$

বা, $1 = 2.t' + \frac{1}{2} \times 2 \times t'^2$

বা, $1 = 2t' + t'^2$

বা, $t'^2 + 2t' - 1 = 0$

$$t' = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
$$= -1 \pm \sqrt{2}$$

$t' = -1 + \sqrt{2}$ অথবা, $t' = -1 - \sqrt{2}$

$= 0.41\ \text{sec}$ অথবা $= -2.41\ \text{sec}$

এখানে,
$v_0 = 0$
$a = 2\ \text{ms}^{-2}$
$v' = 2\ \text{ms}^{-1}$
$s' = 1\ \text{m}$
$t = ?$

কিন্তু ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore t' = 0.41\ \text{sec}$

৭। স্থিরাবস্থা হতে চলতে আরম্ভ করে $625\ \text{m}$ দূরত্ব অতিক্রম করলে একটি বস্তুর বেগ $125\ \text{ms}^{-1}$ হল। ত্বরণ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০২]

$V_0 = 0$ s v a

আমরা জানি, $v^2 = v_0^2 + 2as$

বা, $v^2 = 2as$

বা, $a = \frac{v^2}{2s}$

$$= \frac{(125)^2}{2 \times 625} = 12.5\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,
$v_0 = 0$
$v = 125\ \text{ms}^{-1}$
$s = 625\ \text{m}$
$a = ?$

বইঘর.কম

2.2

৮। 50 kg ভরের এক ব্যক্তি 950 kg ভরের একটি গাড়ি স্থির অবস্থান থেকে 10 s সমত্বরণে চালান। অতঃপর 10 min সমবেগে চালানোর পর ব্রেক চেপে 5 s সময়ের মধ্যে গাড়ি থামান। যাত্রা শুরুর 2 s পর গাড়ির বেগ 4 ms^{-1} হলে গাড়ি কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব কত ? [ব. বো. ২০০২]

স্থির অবস্থান থেকে যাত্রা শুরুর পর যে ত্বরণে চলে গাড়িটি 2 s-এ 4 ms^{-1} বেগ অর্জন করে সেই ত্বরণে প্রথম 10 s চলে। এই ত্বরণ a হলে,

আমরা জানি,

$$v = v_0 + at$$
$$4 = 0 + a \times 2$$
$$a = \frac{4}{2} = 2\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,
আদিবেগ, $v_0 = 0$
সময়, $t = 2\text{s}$
শেষ বেগ, $v = 4\ \text{ms}^{-1}$
ত্বরণ, $a = ?$

এই ত্বরণে প্রথম 10 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$$
$$= 0 + \frac{1}{2} \times 2 \times (10)^2$$
$$= 100\ \text{m}$$

এখানে,
আদিবেগ, $v_0 = 0$
ত্বরণ, $a = 2\ \text{ms}^{-2}$
সময়, $t_1 = 10$ s
দূরত্ব, $s_1 = ?$

এই 10 s পরে বেগ v হলে সেই বেগে পরবর্তী 10 min চলবে। এখন

$$v_1 = v_0 + a t_1$$
$$= 0 + 2 \times 10 = 20\ \text{ms}^{-1}$$

এই বেগে 10 min-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব s_2 হলে,

$$s_2 = v_1 t_2 = 20 \times 10 \times 60$$
$$= 12000\ \text{m}$$

এখানে,
$v_1 = 20\ \text{ms}^{-1}$
সময়, $t_2 = 10\ \text{min} = 10 \times 60$ s
দূরত্ব, $s_2 = ?$

শেষ 5 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব s_3 হলে,

$$s_3 = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) t_3 = \left(\frac{20 + 0}{2}\right) \times 5$$
$$= 50\ \text{m}$$

এখানে,
আদিবেগ, $v_1 = 20\ \text{ms}^{-1}$
শেষ বেগ, $v_2 = 0$
সময়, $t_3 = 5$ s
দূরত্ব, $s_3 = ?$

অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব s হলে,

$$s = s_1 + s_2 + s_3$$
$$= 100\ \text{m} + 12000\ \text{m} + 50\ \text{m}$$
$$= 12150\ \text{m}$$

৯। একটি রাইফেলের গুলি একটি তক্তাকে ঠিক ভেদ করতে পারে। যদি গুলির বেগ চার গুণ করা হয়, তবে অনুরূপ কয়টি তক্তা ভেদ করতে পারবে ? [চ. বো. ২০০১]

মনে করি, একটি তক্তার পুরুত্ব = x

প্রথম ক্ষেত্রে, আদি বেগ = v_0
শেষ বেগ = 0
ত্বরণ = a
সরণ = x

$$v^2 = v_0^2 - 2as \text{ [সূত্র অনুসারে]}$$
$$0 = v_0^2 - 2ax$$

বা, $$a = \frac{v_0^2}{2x}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, তক্তার সংখ্যা n ধরলে মোট পুরুত্ব = nx

আদি বেগ = $4v_0$
শেষ বেগ = 0
ত্বরণ = $\frac{v_0^2}{2x}$

এখন, $0 = (4v_0)^2 - 2\times\frac{v_0^2}{2x}\times nx$

বা, $nv_0^2 = 16v_0^2$

বা, $n = 16$

∴ তক্তার সংখ্যা = 16

১০। ভূমির সাথে 30° কোণে আনত একটি মসৃণ তল বরাবর একটি বস্তু অভিকর্ষের টানে স্থিরাবস্থা হতে সরল চলন গতিতে 9·8 m দূরত্ব অতিক্রম করার পর কত বেগ লাভ করবে ?

আমরা পাই, $v^2 = v_0^2 + 2as$

নির্ণেয় বেগ, $v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$

$= \sqrt{0 + 2\times 4{\cdot}9\ \text{ms}^{-2}\times 9{\cdot}8\ \text{m}}$

$= 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-1}$

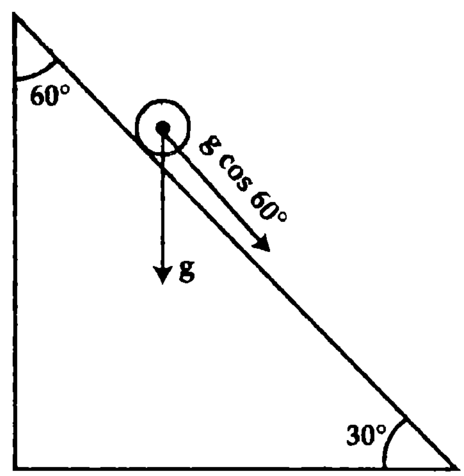
এখানে, $v_0 = 0$

$s = 9{\cdot}8\ \text{m}$

$a = g\cos(90°-30°)$

$= 9{\cdot}8\times\frac{1}{2}\ \text{ms}^{-2}$

$= 4{\cdot}9\ \text{ms}^{-2}$



চিত্র ঃ ২·২৩

১১। একটি গাড়ি চলা শুরু করার 4 s পরের বেগ 8 ms⁻¹ ও 7 s পরের বেগ 23 ms⁻¹। গড় ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে করি গড় ত্বরণ = $\bar{a}$

আমরা পাই, $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে নির্ণেয় ত্বরণ $\bar{a} = \frac{15\ \text{ms}^{-1}}{3\ \text{s}}$

$= 5\ \text{ms}^{-2}$

এখানে, $\Delta v = (23-8)\ \text{ms}^{-1}$

$= 15\ \text{ms}^{-1}$

$\Delta t = (7-4)\ \text{s} = 3\ \text{s}$

১২। X-অক্ষে গতিশীল একটি বস্তুকণার ts-এর অবস্থান $x = \left(\frac{t^2}{2} - 2\right)$ দ্বারা নির্দেশ করা যায়, এখানে s-এ সময় t ও মিটারে অবস্থানাঙ্ক x দ্বারা প্রকাশিত।

(ক) 2 s পরে কণাটির তাৎক্ষণিক বেগ,

(খ) 2 s ও 3 s অবকাশে গড় বেগ ও

(গ) 3 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, (ক) t s পরে তাৎক্ষণিক বেগ,

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2} - 2\right) = t$$

$t = 2$ s পরে তাৎক্ষণিক বেগ, $v = 2\ \text{ms}^{-1}$

(খ) 2s ও 3 s শেষে কণার অবস্থান যথাক্রমে,

$x_2 = \left(\frac{2^2}{2} - 2\right)\text{m} = 0$ এবং

$$x_3 = \left(\frac{3^2}{2} - 2\right) m = 2{\cdot}5 m$$

2 s ও 3 s অবকাশে গড় বেগ,

$$\bar{v} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{(2{\cdot}5 - 0)m}{(3-2)s} = 2{\cdot}5 \text{ ms}^{-1}$$

(গ) $t = 0$ s শেষে অবস্থান, $x_0 = \left(\frac{0^2}{2} - 2\right) m = -2 m$

$t = 3$ s শেষে অবস্থান, $x_1 = \left(\frac{3^2}{2} - 2\right) m = -2{\cdot}5 m$

কণাটি যাত্রা শুরুর পর হতে 3 s সময়ের মধ্যে ঋণ x-অক্ষের দিক হতে 2 m অতিক্রম করে শূন্য অবস্থানে এসে x-অক্ষের দিকে 2·5 m অগ্রসর হয়।

?✓ ∴ 3 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব $= (2 + 2{\cdot}5)$ m $= 4{\cdot}5$ m

১৩। একটি মটর গাড়ি ঘণ্টায় 90 km বেগে চলে। ব্রেক চেপে একে 1 min-এ থামিয়ে দেয়া হল। মন্দন এবং স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর।

এখানে,

$v_0 = 90$ km/hr $= \frac{90 \times 1000}{1 \times 60 \times 60} = 25 \text{ ms}^{-1}$

$t = 1$ min $= 1 \times 60 = 60$ s

$v = 0$

মনে করি, মন্দন $= a$ এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$

আমরা পাই,

$v = v_0 - at$ (1)

এবং $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$ (2)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$0 = 25 - a \times 60$

বা, $a = \frac{25}{60} = \frac{5}{12} \text{ ms}^{-2}$

পুনঃ সমীকরণ (2) হতে পাই,

$s = 25 \times 60 - \frac{1}{2} \times \frac{5}{12} \times 60 \times 60$

$= 750$ m

?✓

১৪। একটি বন্দুকের গুলি একটি দেওয়ালের মধ্যে 3 cm ভেদ করার পর বেগ অর্ধেক হারায়। গুলিটি দেওয়ালের মধ্যে আর কতদূর ভেদ করবে ? [রা. বো. ২০০৫]

এখানে,

১ম ক্ষেত্রে, ধরি,

আদি বেগ $= v_0$

শেষ বেগ $= \frac{v_0}{2}$

দূরত্ব, $s = 3$ cm $= 0{\cdot}03$ m

মন্দন, $a = ?$

২য় ক্ষেত্রে

আদি বেগ $= \frac{v_0}{2}$

শেষ বেগ $= 0$

মন্দন, $a = \frac{v_0^2}{0{\cdot}08}$

দূরত্ব, $s = ?$

$u = \frac{1}{3}$

১ম ক্ষেত্রে,

$v^2 = v_0^2 - 2as$

বা, $\frac{v_0^2}{2^2} = v_0^2 - 2a \times 0{\cdot}03$

বা, $\frac{v_0^2}{4} - v_0^2 = -0{\cdot}06a$

বা, $0{\cdot}06a = \frac{4v_0^2 - v_0^2}{4} = \frac{3v_0^2}{4}$

বা, $a = \frac{3v_0^2}{0{\cdot}24} = \frac{v_0^2}{0{\cdot}08}$

$a = \frac{v_0^2}{0{\cdot}08}$

২য় ক্ষেত্রে,

$v^2 = v_0^2 - 2as$

বা, $0^2 = \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - 2\frac{v_0^2}{0{\cdot}08}s$

বা, $0 = \frac{v_0^2}{4} - \frac{v_0^2 s}{0{\cdot}04}$

বা, $\frac{v_0^2 s}{0{\cdot}04} = \frac{v_0^2}{4}$

বা, $s = \frac{0{\cdot}04}{4}$

$s = 0{\cdot}01$ m

১৫। একটি বন্দুকের গুলি কোন দেয়ালের মধ্যে 0·04 m প্রবেশ করার পর অর্ধেক বেগ হারায়। গুলিটি দেয়ালের মধ্যে আর কত দূর প্রবেশ করতে পারবে ? [ঢা. বো. ২০০১; য. বো. ২০০০]

১ম ক্ষেত্রে

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

$$\Rightarrow \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = v_0^2 - 2 \times a \times \cdot 04$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{4} = v_0^2 - \cdot 08\, a$$

$$\Rightarrow \cdot 08a = \frac{3v_0^2}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3v_0^2}{\cdot 32} = 9\cdot 375 v_0^2$$

২য় ক্ষেত্রে

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - 2 \times 9\cdot 375\, v_0^2 s$$

$$\Rightarrow 18\cdot 75\, v_0^2 .\ s = v_0^2/4$$

$$\Rightarrow s = \frac{v_0^2}{4 \times 18\cdot 75\, v_0^2}$$

$$= 0\cdot 0133 \text{ m}$$

১ম ক্ষেত্রে
ধরি,
আদিবেগ $= v_0$
∴ শেষ বেগ $= v_0/2$
দূরত্ব, s $= \cdot 04$ m
মন্দন, a $= ?$
২য় ক্ষেত্রে
আদিবেগ $= v_0/2$
শেষ বেগ $= 0$
মন্দন, a $= 9\cdot 375$ ms^{-2}
দূরত্ব, s $= ?$

১৬। একটি বস্তু প্রথম 2s-এ 30 m এবং পরবর্তী 4 s-এ 150 m দূরত্ব গেল। বস্তুটির ত্বরণ কত ? ত্বরণ স্থির থাকলে বস্তুটি এরপর 1s-এ কত পথ অতিক্রম করবে ?

মনে করি আদি বেগ $= v_0$ এবং ত্বরণ $= a$

১ম 2s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1)$$

এখানে $s = 30$ m
$t = 2$ s

সমীকরণ (1) হতে পাই

$$30 = v_0 \times 2 + \frac{1}{2} a\,(2)^2$$

বা, $v_0 + a = 15$ (2)

১ম 2s এবং পরিবর্তী 4 s অর্থাৎ (2 + 4) = 6s-এর অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s_2 = v_0 \times 6 + \frac{1}{2} a\,(6)^2 = 30 + 150 = 180$$

বা, $v_0 + 3a = 30$ (3)

(2) এবং (3) হতে পাই

$$v_0 + 3a = 30$$
$$v_0 + a = 15$$

বিয়োগ করে $2a = 15$

$$a = \frac{15}{2} = 7\cdot 5 \text{ ms}^{-2}$$

এখন (2)-এ a-এর মান বসিয়ে পাই,

$$v_0 + 7\cdot 5 = 15$$

$$v_0 = 15 - 7\cdot 5 = 7\cdot 5 \text{ ms}^{-1}$$

এখন ১ম হতে শেষ পর্যন্ত অর্থাৎ মোট (2 + 4 + 1) = 7s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব

$$s_3 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$= 7\cdot 5 \times 7 + \frac{1}{2} \times 7\cdot 5 \times (7)^2 = 236\cdot 25 \text{ m}$$

∴ শেষোক্ত সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব ঃ

$$s_4 = 236\cdot 25 - (30 + 150)$$

$$= 236\cdot 25 - 180 = 56\cdot 25 \text{ m}$$

P.

(১৭) একটি ট্রেন স্থির অবস্থান হতে $10ms^{-2}$ ত্বরণে চলতে আরম্ভ করল। একই সময়ে একটি গাড়ি $100ms^{-1}$ সমবেগে ট্রেনের সমান্তরালে চলা শুরু করল। ট্রেন গাড়িটিকে কখন পিছনে ফেলবে ? [ঢা. বো. ২০০৫]

মনে করি, ট্রেনটি t সময় পরে s দূরত্বে গাড়িটিকে পিছনে ফেলবে।

এখন, ট্রেনের ক্ষেত্রে,

$$s = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2$$

বা, $s = 0 + \frac{1}{2} \times 10 \times t^{-2}$

বা, $s = 5t^2$ (1)

এখানে,
ট্রেনের আদিবেগ, $v_{01} = 0$
ট্রেনের ত্বরণ, $a_1 = 10\ ms^{-2}$
গাড়ির আদিবেগ, $v_{02} = 100\ ms^{-1}$
গাড়ির ত্বরণ, $a_2 = 0$

এবং গাড়ির ক্ষেত্রে,

$$s = v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2$$

বা, $s = 100t + 0$
$= 100t$ (2)

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$5t^2 = 100t$

বা, $t = \frac{100}{5} = 20s$

2.

(১৮) এক খণ্ড প্রস্তরকে $98\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে—
(ক) কতক্ষণ ধরে এটি উপরে উঠবে ?
(খ) 4 s পরে এর বেগ কত হবে ?
(গ) যাত্রাস্থানে ফিরে আসতে এর কত সময় লাগবে ?

(ক) মনে করি নির্ণেয় সময় = t

আমরা পাই $t = \frac{v_0}{g}$ (1)

$t = \frac{98\ ms^{-1}}{9{\cdot}8\ ms^{-2}}$ বা, $t = 10s$

এখানে, $v_0 = 98\ ms^{-1}$
এবং $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

(খ) মনে করি নির্ণেয় বেগ = v

$v = v_0 - gt$ (2)

বা, $v = 98\ ms^{-1} - 9{\cdot}8\ ms^{-2} \times 4s$

বা, $v = 58{\cdot}8\ ms^{-1}$

(গ) মনে করি নির্ণেয় সময় = T

$$T = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \times 98\ ms^{-1}}{9{\cdot}8\ ms^{-2}} = 20s$$

(১৯) একটি বস্তুকে 180 m উচ্চ একটি মিনারের চূড়া হতে ফেলে দেয়া হল। একই সময়ে অন্য একটি বস্তুকে $60\ ms^{-1}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। কখন এবং কোথায় তারা মিলিত হবে ?

মনে করি নিক্ষিপ্ত হবার t সময় পর ভূমি হতে h উচ্চতায় তারা মিলিত হবে।

$t = \frac{h}{v_1+v_2}$

১ম বস্তুর ক্ষেত্রে আমরা পাই

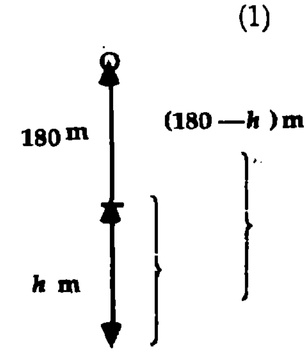
উচ্চতা $= v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

বা, $(180 - h) = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$ (1) [$v_0 = 0$]

২য় বস্তুর ক্ষেত্রে

উচ্চতা $= v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

বা, $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ (2)



এখন সমীকরণ (1) এবং (2) যোগ করে পাই

$v_0t = 180$ (3)

সমীকরণ (3) হতে পাই

এখানে, $v_0 = 60\ \mathrm{ms^{-1}}$

$60\ \mathrm{ms^{-1}} \times t = 180\ \mathrm{m}$

বা, $t = \dfrac{180\ \mathrm{m}}{60\ \mathrm{ms^{-1}}}$

$t = 3\ \mathrm{s}$

এখন t -এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই,

$180 - h = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8\ \mathrm{ms^{-2}} \times (3\mathrm{s})^2$

বা, $180 - h = 44{\cdot}1$

বা, $h = 180 - 44{\cdot}1 = 135{\cdot}9\ \mathrm{m}$

∴ নিক্ষিপ্ত হবার 3 s পর ভূমি হতে 135·9 m উপরে তারা মিলিত হবে।

২০। একটি মিনারের শীর্ষদেশ হতে একটি বন্ধুকের গুলি অনুভূমিকভাবে 980 $\mathrm{ms^{-1}}$ বেগে ছোঁড়া হল এবং এটি 2s পরে ভূমি স্পর্শ করল। মিনারের উচ্চতা এবং মিনারের পাদদেশ হতে যে স্থানে গুলি ভূমি স্পর্শ করল তার দূরত্ব বের কর।

মনে করি মিনারের পাদদেশ হতে নির্ণেয় দূরত্ব = s

আমরা পাই

$s = v \times t$ (1)

এখানে, $v = 980\ \mathrm{ms^{-1}}$
$t = 2\ \mathrm{s}$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$s = 980\ \mathrm{ms^{-1}} \times 2\mathrm{s} = 1960\ \mathrm{m}$

মনে করি মিনারের উচ্চতা = h

$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ (2)

এখানে, $v_0 = 0$
$g = 9{\cdot}8\ \mathrm{ms^{-2}}$
$t = 2\mathrm{s}$

সমীকরণ (2) হতে পাই,

$h = 0 + \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8\ \mathrm{ms^{-2}} \times (2\ \mathrm{s})^2$

বা, $h = 19{\cdot}6\ \mathrm{m}$

২১। একজন লোক 48·0 $\mathrm{ms^{-1}}$ বেগে একটি বল খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করে। বলটি কত সময় শূন্যে থাকবে এবং সর্বোচ্চ কত উপরে উঠবে ? [রা. বো. ২০০০]

আমরা জানি,

$$T = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \times 48}{9{\cdot}8} = 9{\cdot}795\ \mathrm{s}$$

এখানে,
আদি বেগ, $v_0 = 48{\cdot}0\ \mathrm{ms^{-1}}$
শেষ বেগ, $v = 0$
আঃ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ \mathrm{ms^{-2}}$
নির্ণেয় সময়, $T = ?$
সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = ?$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \dfrac{v_0^2}{2g} = \dfrac{(48)^2}{2 \times 9{\cdot}8} = 117{\cdot}55\ \mathrm{m}$

২২। একটি বস্তুকে 98 $\mathrm{ms^{-1}}$ বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে দেখাও যে, 3s এবং 17s সময়ে বস্তুর বেগদ্বয়ের মান সমান কিন্তু দিক বিপরীতমুখী। [সি. বো. ২০০১]

আমরা জানি, প্রথম ক্ষেত্রে,

$$\begin{aligned} v &= v_0 \sin\theta_0 - gt \\ &= 98 \times \sin 90° - 9{\cdot}8 \times 3 \\ &= 98 - 29{\cdot}4 \\ &= 68{\cdot}6\ \mathrm{ms^{-1}} \end{aligned}$$

এখানে,
$v_0 = 98\ \mathrm{ms^{-1}}$
$\theta_0 = 90°$
$t = 3\ \mathrm{s}$
$t' = 17\ \mathrm{s}$

আবার, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

$$\begin{aligned} v &= 98 \times \sin 90° - 9{\cdot}8 \times 17 \\ &= 98 - 166{\cdot}6 \\ &= -68{\cdot}6\ \mathrm{ms^{-1}} \end{aligned}$$

সুতরাং 3 s এবং 17 s সময়ে বস্তুর বেগদ্বয়ের মান সমান কিন্তু দিক বিপরীতমুখী থাকে। (প্রমাণিত)

P.V

২৩। $9.2 ms^{-1}$ বেগে একটি ক্ষুদ্র বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এটি কত সময় পরে ভূ-পৃষ্ঠে ফিরে আসিবে ? ($g = 9.8 ms^{-2}$)। [কু. বো. ২০০২]

মনে করি, বস্তুটির ভ্রমণকাল = T

আমরা জানি,

$$T = \frac{2v_0}{g}$$

$$T = \frac{2 \times 9.2}{9.8} = 1.878 \text{ s}$$

এখানে,
$v_0 = 9.2 \text{ ms}^{-1}$
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$
$T = ?$

P.V

২৪। একটি বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে $50 ms^{-1}$ বেগে নিক্ষেপ করা হল। বস্তুটি যখন 100m উঁচুতে থাকবে তখন এর বেগ কত হবে ?

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$
$$v^2 = (50)^2 - 2 \times 9.8 \times 100$$
$$= 2500 - 1960 = 540$$
$$v = \pm 7.3 \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
আদি বেগ, $v_0 = 50 \text{ ms}^{-1}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$
উচ্চতা, $h = 100 \text{ m}$

[বেগের দুটি মান রয়েছে। এর অর্থ হল উপরে উঠার সময় 100m উচ্চতায় বেগ $7.3 ms^{-1}$ এবং নিচে নামার সময় ঐ উচ্চতায় বেগ $-7.3 ms^{-1}$]

P.V

২৫। সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে, $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ সমীকরণ হতে ক্যালকুলাসের সাহায্যে দেখাও যে, $v = v_0 + at$।

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

আমরা জানি,
$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$= \frac{d}{dt}\left\{ v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right\}$$
$$= \frac{d}{dt}(v_0 t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} a t^2\right)$$
$$= v_0 \frac{d(t)}{dt} + \frac{1}{2} a \times \frac{d}{dt}(t^2) \quad [\because v_0 \text{ ও } a \text{ ধ্রুবক }]$$
$$= v_0 + \frac{1}{\cancel{2}} a \times \cancel{2}t$$
$$= v_0 + at$$

বা, $v = v_0 + at$ (প্রমাণিত)।

P.V

২৬। $s = \frac{1}{3} t^3 + 3t$ সূত্রানুসারে একটি বস্তু সরলরেখায় চলছে। 2s পরে এর বেগ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৩]

মনে করি, গতিবেগ = v

আমরা জানি, $v = \frac{ds}{dt}$

এখন, $s = \frac{1}{3} t^3 + 3t$

s-কে সময় t-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} t^3 + 3t\right)$$

বা, $v = \frac{1}{3} \times 3t^2 + 3 = t^2 + 3$

2s পরে বস্তুটির বেগ

$v = (2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$ একক

এখানে,
$t = 2 \text{ s}$
$v = ?$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন :

১। স্থিতি ও গতি বলতে কি বুঝ ?
২। মধ্য বেগ কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৪]
৩। তাৎক্ষণিক ত্বরণ কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৪]
৪। ব্যবকলনের সাহায্যে তাৎক্ষণিক বেগের সংজ্ঞা দাও। [য. বো. ২০০৪]
৫। সরণ, বেগ ও ত্বরণের একক ও মাত্রা সমীকরণ লিখ।
৬। ব্যবকলনের সাহায্যে তাৎক্ষণিক ত্বরণের সংজ্ঞা দাও। [য. বো. ২০০৪]
৭। গড় বেগ কাকে বলে ? গড় বেগ থেকে কিভাবে তাৎক্ষণিক বেগ পাওয়া যায় ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০০৫, ২০০৩ ; চ. বো. ২০০০]

৮। সুষম ত্বরণ বলতে কি বুঝ ? [ঢা. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০২]
৯। তাৎক্ষণিক বেগ ও তাৎক্ষণিক ত্বরণ চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০০]
১০। সংজ্ঞা দাও ঃ
তাৎক্ষণিক বেগ [য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০১ ; চ. বো. ২০০৩]
সমবেগ [রা. বো. ২০০১]
গড় বেগ [রা. বো. ২০০১]
সরণ, ত্বরণ [সি. বো. ২০০৫], পর্যাবৃত্ত গতি, চলন গতি।
১১। আপেক্ষিক বেগ কাকে বলে ?
১২। বিভিন্ন মাত্রার প্রসঙ্গ কাঠামো বলতে কি বুঝ ?

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। দেখাও যে, স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের বর্গের সমানুপাতিক। [ঢা. বো. ২০০৪]
২। দেখাও যে, $v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$, এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।
[চ. বো. ২০০৬, ২০০১ ; রা. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২ ; ব. বো. ২০০১]
৩। প্রমাণ কর যে, $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ব. বো. ২০০৩]
৪। X-অক্ষ বরাবর সমত্বরণে গতিশীল একটি কণার দরুন প্রমাণ কর যে, $x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t$, প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত। [সি. বো. ২০০৫]
৫। সমত্বরণের ক্ষেত্রে প্রতিপাদন কর ঃ
$v = v_0 + at$ এবং $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$, এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [রা. বো. ২০০১]
৬। ক্যালকুলাসের সাহায্যে গতির নিম্নোক্ত সমীকরণটি প্রতিপাদন কর ঃ
$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$. এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ব. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০১]
৭। স্থির অবস্থান হতে সমত্বরণে চলমান বস্তুর জন্য দেখাও যে, বস্তুর প্রান্তবেগ সরণের বর্গমূলের সমানুপাতিক।
৮। পড়ন্ত বস্তুর সূত্রগুলো বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর।
৯। দ্রুতি ও বেগের মধ্যে পার্থক্য কর।
১০। বেগ ও ত্বরণের মধ্যে পার্থক্য কর।
১১। ক্যালকুলাস পদ্ধতিতে $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণটি প্রতিপাদন কর, যেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ঢা. বো. ২০০৫]
১২। বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হতে $v = v_0 + at$ সমীকরণ প্রতিপাদন কর।
১৩। বেগ বনাম সময় লেখচিত্র হতে $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ সমীকরণটি প্রতিপাদন কর। [য. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১]
১৪। খাড়াভাবে উপর দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর সর্বাধিক উচ্চতার রাশিমালা বের কর।
১৫। খাড়াভাবে উপর দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর উত্থান-পতনের রাশিমালা বের কর।

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। কোন একটি বস্তুর সরলরেখায় 10 s-এর অতিক্রান্ত দূরত্ব 8 m। গড় বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 0·8 ms^{-1}]
২। একটি বস্তু স্থিতিশীল অবস্থা হতে যাত্রা করে 2 ms^{-2} সমত্বরণে চলতে লাগল।
(ক) 5 s পর বস্তুর বেগ কত ?
(খ) 5s-এ বস্তু কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ?
(গ) কতক্ষণ পর এর বেগ 50 ms^{-1} হবে ?
(ঘ) 5th s-এ এটি কত দূরত্ব যাবে ? [উঃ (ক) 10 ms^{-1}, (খ) 25 m, (গ) 25 s (ঘ) 9 m]
৩। ঘণ্টায় 40 km বেগে চলন্ত একটি গাড়িকে 6s যাবত 1·5 ms^{-2} হারে ত্বরিত করা হল, এর শেষ বেগ কত হবে এবং ত্বরণকালে এটি কত দূর চলবে ? [উঃ 20·11 ms^{-1}, 93·66 m]
৪। একটি বস্তু স্থিতিশীল অবস্থা হতে যাত্রা করে 5 ms^{-2} সমত্বরণে চলতে লাগল। 5s -এ বস্তু কত পথ অতিক্রম করবে নির্ণয় কর। [উঃ 62·5 m]
৫। একটি বস্তু স্থিতিশীল অবস্থা হতে যাত্রা করে 5 ms^{-2} সমত্বরণে চলতে লাগল। কতক্ষণ পর এর বেগ 396 km/h হবে বের কর। [উঃ 22 s]
৬। একটি বস্তুর প্রথম 4s এর গড় বেগ 30 cm s^{-1} এবং পরবর্তী 4s-এর গড় বেগ 10 cms^{-1}। বস্তুটি সমমন্দনে গতিশীল আছে ধরে এর আদি বেগ এবং মন্দন বের কর। [উঃ 5 cms^{-2} ; 40 cms^{-1}]
৭। একটি গাড়ি 50 ms^{-1} বেগে চলছিল। গাড়ির চালক ব্রেক চেপে 5 ms^{-2} মন্দন সৃষ্টি করল।
(ক) এর বেগ 8 s পর কত হবে ?
(খ) এই 8 s এ গাড়ি কত গড় বেগে চলবে ?
(গ) 8 s-এ গাড়ি কত দূরে যাবে ?
(ঘ) 8th s-এর শুরুতে তাৎক্ষণিক বেগ কত হবে ? [উঃ (ক) 10 ms^{-1}, (খ) 30 ms^{-1}, (গ) 240 m, (ঘ) 15 ms^{-1}]

৮। একটি মটর গাড়ি ঘণ্টায় 316·8 km বেগে চলে। ব্রেক চেপে একে 2 min-এ থামিয়ে দেয়া হল। মন্দন এবং স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব বের কর। [উঃ $\frac{11}{15}$ ms^{-2}; 5280 m]

৯। একটি কণা স্থির অবস্থা হতে 5 ms^{-2} সমত্বরণে চলতে থাকলে 5th সেকেন্ডে এটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে বের কর। [উঃ 22·5 m]

১০। একটি বস্তু 5th সেকেন্ডে 50 m এবং 10th সেকেন্ডে 100 m দূরত্ব অতিক্রম করে। বস্তুটির (ক) ত্বরণ, (খ) আদি বেগ এবং (গ) 20 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [উঃ (ক) 10 ms^{-2}, (খ) 5 ms^{-1}, (গ) 2100 m]

১১। সরলরেখায় চলে কোন একটি বস্তু প্রথম 4s-এ 160 m এবং পরবর্তী 4 s-এ 320 m দূরত্ব অতিক্রম করে। বস্তুটির সমত্বরণ ধরে এর আদি বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর। [উঃ 10 ms^{-2}, 20 ms^{-1}]

১২। 98 m উঁচু একটি মিনারের চূড়া হতে একটি বস্তুকে ছেড়ে দেয়া হল। একই সময়ে অন্য একটি বস্তুকে ভূমি হতে 24·5 ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। কখন এবং কোথায় বস্তু দুটি মিলিত হবে ? [উঃ 4 s, 19·6 m]

১৩। একটি ট্রেন স্থির অবস্থান হতে 5ms^{-2} ত্বরণে চলতে শুরু করল। একই সময়ে একটি গাড়ি 50ms^{-1} সমবেগে ট্রেনের সমান্তরালে চলা শুরু করল। ট্রেন গাড়িটিকে কখন পিছনে ফেলবে ? [উত্তর ঃ 20s]

১৪। একটি বন্দুকের গুলি কোন দেয়ালের মধ্যে 0·08m প্রবেশ করার পর অর্ধেক বেগ হারায়। গুলিটি দেয়ালের মধ্যে আর কতদূর প্রবেশ করতে পারবে ? [কু. বো. ২০০৫] [~~উত্তর ঃ 0·1m~~]

১৫। একটি বন্দুকের গুলি কোন দেয়ালের মধ্যে 0·06m প্রবেশ করার পর অর্ধেক বেগ হারায়। গুলিটি দেয়ালের মধ্যে আর কতদূর প্রবেশ করতে পারবে ? [ব. বো. ২০০৫] [উত্তর ঃ 0·02 m]

১৬। একটি রাইফেলের গুলি নির্দিষ্ট পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারে। ঐরূপ 16টি তক্তা ভেদ করতে হলে এর বেগ কতগুণ হতে হবে ? [উঃ 4 গুণ]

১৭। 20 ms^{-2} মন্দন সৃষ্টিকারী বল প্রয়োগ করে একটি গাড়িকে 40 m দূরে থামানো হলে গাড়িটির আদি বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 40 ms^{-1}]

১৮। দুটি মোটরগাড়ি 16 ms^{-1} এবং 12 ms^{-1} বেগে একই সময়ে যাত্রা শুরু করে এবং একই সময়ে গন্তব্যে পৌঁছায়। গাড়ি দুটির ত্বরণ যথাক্রমে 5 ms^{-2} এবং 4 ms^{-2} হলে তাদের গন্তব্যে পৌঁছতে কত সময় লেগেছিল এবং গন্তব্যের দূরত্ব কত ছিল ? [উঃ 8 s, 256 m, 128 m]

১৯। একটি মোটরগাড়ি সরলরেখা বরাবর 20 ms^{-1} বেগে চলছে। গাড়ির চালক 100 m দূরে 36 kmh^{-1} গতিসীমা নির্দেশক চিহ্ন দেখতে পেলেন। ব্রেক কষে গাড়িটিতে কত মন্দন সৃষ্টি করলে ঐ স্থানে গাড়িটি নির্দেশিত বেগ প্রাপ্ত হবে এবং ঐ নির্দেশ চিহ্ন পর্যন্ত পৌঁছতে গাড়িটির কত সময় লাগবে ? [উঃ 1·5 ms^{-2}, 6·67 s]

২০। একটি মোটরগাড়ি 30 ms^{-1} বেগে চলছে। এ অবস্থায় ব্রেক কষায় গাড়িটির বেগ সমত্বরণে কমে 5 sec পরে 12 ms^{-1} হল। (ক) গাড়িটির ত্বরণ ও (খ) পঞ্চম সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [উঃ — 3·6 ms^{-2}; 13·8 m]

২১। একটি বস্তু 50 m উপর হতে অভিকর্ষের টান পড়ে 3 m পুরু বালু ভেদ করার পর বেগ অর্ধেক হয়। বস্তুটি বালির আর কত গভীরে যেতে পারবে ? [উঃ 1 m]

২২। একটি বাঘ 8 m মিটার সম্মুখে একটি হরিণকে দেখতে পেয়ে স্থিরাবস্থা হতে 1ms^{-2} ত্বরণে তার পেছনে দৌড়াতে থাকে। হরিণটি টের পেয়ে 3 ms^{-1} সমবেগে চলতে থাকলে কতক্ষণ পরে ও কত দূরত্ব অতিক্রমে বাঘটি হরিণটিকে ধরতে পারবে? [উঃ 8s ও 32m]

২৩। একটি বস্তুকে খাড়া উপরের দিকে 100 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করা হল। বস্তুটি যখন 300m উঁচুতে থাকবে তখন এর বেগ কত ? [উত্তর ঃ ± 64·2ms^{-1}]

২৪। 50m উপর হতে একটি বস্তু ছেড়ে দেয়া হল। ঐ স্থানে $g = 9·8$ms^{-2} হলে বস্তুটির মাটিতে পৌঁছবার প্রাক্কালে বেগ কত হবে ? মাটিতে পড়তে কত সময় লাগবে ? [উত্তর ঃ 31·3ms^{-1} ; 3·19 s]

২৫। 1kg ভরের একটি বস্তুকে পৃথিবীর টানে মুক্তভাবে পড়তে দেয়া হল। কত সেকেন্ড পর এর বেগ 95ms^{-1} হবে ? [উত্তর ঃ 9·7s]

২৬। একটি প্রস্তর খণ্ডকে 30 ms^{-1} বেগে খাড়াভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল। এটি কত উপরে উঠবে এবং ঐ উচ্চতায় উঠতে কত সময় লাগবে? [$g = 10$ ms^{-2}] [উঃ 45 m , 3s]

২৭। কত বেগে একটি প্রস্তর খণ্ডকে খাড়াভাবে উপরে নিক্ষেপ করলে এটি 20 m উচ্চে উঠবে ? [$g = 10$ ms^{-2}] [উঃ 20 ms^{-1}]

২৮। একটি ক্রিকেট বলকে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হল এবং এটি 6 সেকেন্ডে ওঠা-নামা করে। সর্বাধিক উচ্চতায় উঠতে কত সময় লাগবে এবং এই উচ্চতা কত হবে নির্ণয় কর। [$g = 10$ ms^{-2}] [উঃ 3s, 45 m]

২৯। 150 m উঁচু হতে একটি পাথর ভূমিতে পতিত হয়। (ক) ভূমিতে পৌঁছতে এর কত সময় লাগে ? এবং (খ) ভূমি স্পর্শ করার মুহূর্তে এর বেগ কত ? [$g = 9·8$ ms^{-2}] [উঃ 5·53 s, 54·2 ms^{-1}]

৩
দ্বিমাত্রিক গতি
TWO DIMENSIONAL MOTION

৩.১ সূচনা
Introduction

দ্বিতীয় অধ্যায়ে সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রকাশ করা হয়েছে এবং সেগুলো সরলরৈখিক গতি বর্ণনায় ব্যবহার করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে ঐ রাশিগুলো দ্বিমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোতে প্রকাশ করা হবে এবং গতির সমীকরণ প্রতিপাদন করা হবে। উল্লেখ্য যে, ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো হতে সহজেই একটি উপাংশ বাদ দিয়ে দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোতে রূপান্তর করা যায়।

কোন বস্তুর গতি দ্বিমাত্রিক তলে বিবেচনা করলে তাকে দ্বিমাত্রিক গতি বলে। নিক্ষিপ্ত বস্তু বা প্রাসের গতি, বৃত্তাকার গতি প্রভৃতি দ্বিমাত্রিক গতির উদাহরণ। এ অধ্যায়ে প্রাসের গতি, বৃত্তাকার গতি, কৌণিক সরণ ও কৌণিক বেগ, রৈখিক বেগ ও ত্বরণের সঙ্গে যথাক্রমে কৌণিক বেগ ও ত্বরণের সম্পর্ক আলোচনা করা হবে। এ ছাড়া কৌণিক গতি বিষয়ক সমীকরণ প্রতিপাদন করা হবে।

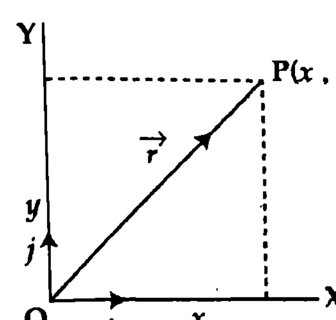
৩.২ দ্বিমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোয় গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশির ভেক্টর রূপ
Necessary terms in vector form relating motion in two and three dimenstional reference frame

(ক) অবস্থান ভেক্টর

প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। [দ্বিতীয় অধ্যায়ে অবস্থান ভেক্টর সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে]।

ব্যাখ্যা ঃ একটি কণার অবস্থান যদি $\vec{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে দ্বিমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামো ব্যবস্থায় আমরা লিখতে পারি,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (1)$$



চিত্র ৩.১

এখানে, $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ যথাক্রমে X ও Y–অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর এবং x ও y হচ্ছে $\vec{r}$–এর উপাংশের মান।

ত্রিমাত্রিক কাঠামোয় লেখা যায়, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

এখানে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$ যথাক্রমে X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর এবং x, y ও z হল $\vec{r}$-এর উপাংশের মান।

(খ) সরণ ঃ কোন একটি গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টর পরিবর্তনকে ঐ বস্তুর সরণ বলে। বস্তুটি যে পথেই আদি অবস্থান হতে শেষ অবস্থানে যাক না কেন এই অবস্থানের ন্যূনতম দূরত্ব হবে সরণের পরিমাণ এবং আদি অবস্থান হতে শেষ অবস্থানের দিকই হবে সরণের দিক। অতএব অবস্থানের পরিবর্তন দ্বারা সরণ প্রকাশ করা যায়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে একটি কণার আদি অবস্থান P এবং শেষ অবস্থান Q। আদি অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{r_1}$ এবং শেষ অবস্থান ভেক্টর, $Q = \overrightarrow{r_2}$ [চিত্র ৩·২] ।

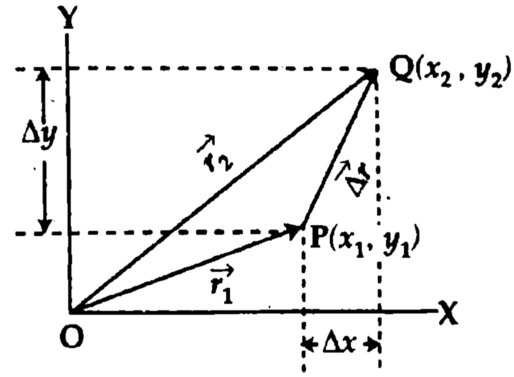
P ও Q-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$।

এখন, ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে,

$$\overrightarrow{r_1} + \Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2}$$

বা, $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ (2)

$\Delta\overrightarrow{r}$ হল কণাটির সরণ।



চিত্র ৩·২

দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে Δr, $\overrightarrow{r_1}$ ও $\overrightarrow{r_2}$-এর উপাংশ

$$\Delta\overrightarrow{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

$$\overrightarrow{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$$

এবং $\overrightarrow{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$

অতএব, $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ লেখা যায়,

$$\Delta\overrightarrow{r} = (\Delta x)\hat{i} + (\Delta y)\hat{j} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j})$$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} \quad (3)$$

বামপক্ষে ও ডানপক্ষে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$-এর সহগ সমান।

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

এবং $\Delta y = y_2 - y_1$

Δx ও Δy হচ্ছে যথাক্রমে X ও Y–অক্ষ বরাবর $\Delta\overrightarrow{r}$-এর উপাংশ।

ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে : ত্রিমাত্রিক কাঠামোয় P ও Q এর স্থানাঙ্ক $P(x_1, y_1, z_1)$ ও $Q(x_2, y_2, z_2)$।

কণাটির সরণ, $\Delta\overrightarrow{r} = (\Delta x)\hat{i} + (\Delta y)\hat{j} + (\Delta z)\hat{k}$ (4)

Δx, Δy ও Δz যথাক্রমে X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর $\Delta\overrightarrow{r}$-এর উপাংশ।

(গ) তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ বলে।

ধরা যাক, একটি কণার অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{r}$ এবং ক্যালকুলাসের নিয়ম অনুসারে,

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}} \quad (5)$$

(ক) দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে

দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$$\text{বেগ, } \overrightarrow{v} = \frac{d}{dv}(x\hat{i} + y\hat{j}) = \left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{j}$$

$$= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad (6)$$

এখানে, v_x ও v_y যথাক্রমে X ও Y-অক্ষ বরাবর $\overrightarrow{v}$-এর উপাংশ।

(ii) ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে :

ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে অবস্থান ভেক্টর,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\text{বেগ, } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{j} + \left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k}$$

$$= v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad (7)$$

এখানে, v_x, v_y ও v_z যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{v}$-এর উপাংশ।

ত্বরণ বা তাৎক্ষণিক ত্বরণ : সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর বেগ বৃদ্ধির হারকে ত্বরণ বা তাৎক্ষণিক ত্বরণ বলে। একে 'a' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটি একটি ভেক্টর রাশি। ত্বরণের সাধারণ সমীকরণ হল $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$। নিম্নে বিভিন্ন প্রসঙ্গ কাঠামোতে উপাংশের মাধ্যমে ত্বরণ প্রকাশ করা হল।

একমাত্রিক প্রসঙ্গ কাঠামোর ক্ষেত্রে :

X-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে

$$\vec{a} = a_x\hat{i}$$

অনুরূপভাবে, Y ও Z-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে যথাক্রমে $\vec{a} = a_y\hat{j}$ ও $\vec{a} = a_z\hat{k}$

দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে :

একটি বস্তু বা কণা XY তলে গতিশীল হলে,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \qquad (8)$$

এখানে a_x, a_y হচ্ছে X ও Y অক্ষ বরাবর $\vec{a}$-এর উপাংশ।

অনুরূপভাবে, XZ ও YZ তলে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে যথাক্রমে,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_z\hat{k} \text{ ও } \vec{a} = a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে :

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায়,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad (9)$$

এখানে, a_x, a_y, a_z হচ্ছে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{a}$-এর উপাংশ।

৩·৩ সরণ ও বেগের উপাংশগুলোর মধ্যে সম্পর্ক
Relation among the components of displacement and velocity

আমরা জানি,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \qquad (10)$$

$\vec{v}$-কে উপাংশে প্রকাশ করা যায়,

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \qquad (11)$$

উভয় পক্ষের $\hat{i}$ $\hat{j}$ ও $\hat{k}$-এর সহগগুলো সমান, অতএব

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (12)$$

v_x, v_y, v_z হল যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{v}$-এর উপাংশ।

৩·৪ গতির সমীকরণ (ভেক্টর রূপ)
Equations of motion (Vector form)

সূচনা ঃ গতি সংক্রান্ত সংকেতগুলোর মধ্যে যে সম্পর্ক রয়েছে তাকে গতির সমীকরণ বলে। সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর তাৎক্ষণিক ত্বরণ যে কোন সময় ব্যবধান বা অবকাশের গড় ত্বরণের সমান থাকে। এই ত্বরণ = $\vec{a}$। আরো ধরা হয় যে, এই গতির প্রাথমিক ও মূল শর্তাদি হল সময় গণনার শুরুতে সময় $t = 0$, আদি অবস্থান ভেক্টর = $\vec{r}_0$ এবং আদি বেগ = $\vec{v}_0$।

(ক) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$ অর্থাৎ t সময় অবকাশে দ্বিমাত্রিক তলে সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তুর শেষ বেগের সমীকরণ প্রতিপাদন।

সমত্বরণে একটি গতিশীল বস্তু বিবেচনা করি।

ধরি X-অক্ষ বরাবর এর আদি বেগ v_{x0}, ত্বরণ a_x, যাত্রা কাল = t এবং t সময় পর বস্তুটির বেগ v_x [চিত্র ৩·৩]।

আমরা জানি, $v = v_0 + at$

উক্ত সমীকরণ অনুসারে X-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে পাই,

$$v_x = v_{x0} + a_x t \qquad (13)$$

অনুরূপভাবে Y-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে পাই,

$$v_y = v_{y0} + a_y t \qquad (14)$$

Z-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে পাই,

$$v_z = v_{z0} + a_z t \qquad (15)$$

চিত্র ৩৩

বস্তুটি কোন দিকে গতিশীল থাকলে, তার বেগের উপাংশসমূহ সমীকরণ (13), (14) এবং (15) হতে পাওয়া যায়। সুতরাং t সময়ে বস্তুটির বেগ

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

বা, $$\vec{v} = (v_{x0} + a_x t)\hat{i} + (v_{y0} + a_z t)\hat{j} + (v_{z0} + a_z t)\hat{k}$$

বা, $$\vec{v} = (v_{x0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j} + v_{z0}\hat{k}) + (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\,t$$

বা. $$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \qquad (16)$$

এখানে $\vec{v}_0$ বস্তুটির আদিবেগ এবং $\vec{a}$ বস্তুটির ত্বরণ।

(খ) $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}\, t + \frac{1}{2}\, \vec{a}\, t^2$ অর্থাৎ t সময় অবকাশে সমত্বরণে গতিশীল একটি বস্তু কর্তৃক দ্বিমাত্রিক তলে অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ প্রতিপাদন।

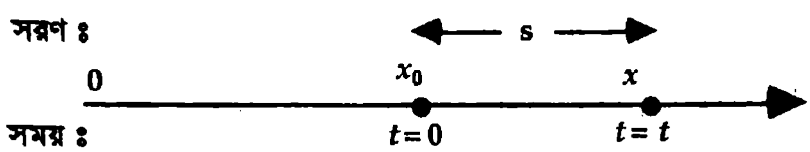
সমত্বরণে একটি গতিশীল বস্তু বিবেচনা করি। ধরি X-অক্ষ বরাবর এর আদি বেগ v_{x0}, যাত্রার শুরুতে অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে সরণ = x_0 , ত্বরণ = a_x , t সময়ের সরণ = x। উক্ত সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব = s। এখন s-এর মান নির্ণয় করি। উল্লেখ্য আদি অবস্থায় সরণ ভেক্টর অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে $\vec{r} = \vec{r_0}$

আমরা জানি, $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, অতএব শর্তানুসারে, X-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে লেখা যায়

$$s = x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

বা, $$x - x_0 = v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

বা, $$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad (17)$$



চিত্র ৩·৪

অনুরূপভাবে Y-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে লেখা যায়

$$y = y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad (18)$$

একইভাবে Z-অক্ষে গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে পাওয়া যায়

$$z = z_0 + v_{z0} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \qquad (19)$$

অতএব কোন একটি বস্তু কোন দিকে গতিশীল থাকলে তার সরণের উপাংশসমূহও সমীকরণ (16) , (17) এবং (18) হতে পাওয়া যায়। সুতরাং বস্তুটির সরণ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

বা, $$\vec{r} = (x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2)\hat{i} + (y_0 + v_{y0} t + \frac{1}{2} a_y t^2)\hat{j} + (z_0 + v_{z0} t + \frac{1}{2} a_z t^2)\hat{k}$$

বা, $$\vec{r} = (x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}) + (v_{x0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j} + v_{z0}\hat{k})t + \frac{1}{2}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})t^2$$

বা, $$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0} t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \qquad (20)$$

এখানে, $\vec{r_0}$, $\vec{v_0}$ ও $\vec{a}$ যথাক্রমে বস্তুটির আদি অবস্থায় ভেক্টর, আদি বেগ ও ত্বরণ নির্দেশ করছে।

(গ) $\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v_0} \cdot \vec{v_0} + 2\vec{a} \cdot \vec{s}$ বা, $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{s}$ বা, $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0})$ অর্থাৎ দ্বিমাত্রিক তলে সমত্বরণে গতির ক্ষেত্রে সময় নিরপেক্ষ দূরত্বের সমীকরণ প্রতিপাদন।

মনে করি দ্বিমাত্রিক তলে কোন একটি বস্তু সমত্বরণে চলছে। এর আদি বেগ = $\vec{v_0}$ এবং সম-ত্বরণ = $\vec{a}$ । বস্তুর যাত্রা কাল t। ধরি t সময় পর এর বেগ = $\vec{v}$ এবং সরণ = $\vec{s}$ । s-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

বস্তুটির আদি অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_0}$ এবং t সময়ে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ হলে, সরণ

$$s = \Delta r = \vec{r} - \vec{r_0}$$ ।

আমরা জানি, $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,t$

উক্ত সমীকরণের উভয় পার্শ্বকেই স্কেলার বা ডট্ গুণ করে পাই,

$$\vec{v}\,.\vec{v} = (\vec{v_0} + \vec{a}\,t).(\vec{v_0} + \vec{a}\,t)$$

বা, $\vec{v}\,.\vec{v} = \vec{v_0}.\vec{v_0} + \vec{v_0}.\vec{a}\,t + (\vec{a}\,t).\vec{v_0} + (\vec{a}\,t).(\vec{a}\,t)$

বা, $\vec{v}\,.\vec{v} = \vec{v_0}.\vec{v_0} + 2\,\vec{v_0}.\vec{a}\,t + \vec{a}\,.\vec{a}\,t^2$

বা, $\vec{v}\,.\vec{v} = \vec{v_0}.\vec{v_0} + 2\,\vec{a}\,.(\vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2)$

$$\vec{v}\,.\vec{v} = \vec{v_0}.\vec{v_0} + 2\,\vec{a}\,.\vec{s} \qquad (21)$$

$$= \vec{v}\,.\vec{v} + 2\vec{a}\,.(\vec{r} - \vec{r_0}) \qquad [\because \vec{s} = \vec{r} - \vec{r_0}]$$

বা, $v^2 = v_0^2 + 2\,\vec{a}\,.\vec{s}$ (21a) $[\because \vec{v}\,.\vec{v} = v^2$ এবং $\vec{v_0}\,.\,\vec{v_0} = v_0^2]$

বা, $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2\,\vec{a}\,\,(\vec{r} - \vec{r_0})}$ (21b)

এটিই হল সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর সময় নিরপেক্ষ অতিক্রান্ত দূরত্বের সমীকরণ।

৩·৫ গতির ভেক্টর সমীকরণসমূহের বিভিন্ন উপাংশে পৃথককরণ বা বিভাজন

Resolution of vector equations of motions

ভেক্টরে প্রকাশিত গতির বিভিন্ন সমীকরণ সহজেই উপাংশে পৃথককরণ বা বিভাজন করা যায়। এই অধ্যায়ে যেহেতু দ্বিমাত্রিক গতি আলোচনা করা হচ্ছে, তাই যে কোন তলে উপাংশে বিভাজন আলোচনা করা হবে। ধরা যাক, XY তলে দ্বিমাত্রিক গতি বিবেচনা করা হচ্ছে।

(ক) $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,t$ সমীকরণের উপাংশে বিভাজন

X ও Y অক্ষ বরাবর শেষ বেগ $\vec{v}$, আদিবেগ $\vec{v_0}$ এবং ত্বরণ $\vec{a}$-এর উপাংশ যথাক্রমে $\vec{v_x}$ ও $\vec{v_y}$, $\vec{v_{0x}}$ ও $\vec{v_{0y}}$ এবং $\vec{a_x}$ ও $\vec{a_y}$ হলে,

$$\vec{v_0} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \text{ এবং}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

এই উপাত্তগুলো $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,t$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} + a_xt\hat{i} + a_yt\hat{j}$$

$$= (v_{0x} + a_xt)\,\hat{i} + (v_{0y} + a_yt)\,\hat{j}$$

উপরের সমীকরণের উভয় পার্শ্বের একক ভেক্টর $\hat{i}$ ও $\hat{j}$-এর সহগগুলো সমান।

অতএব, $v_x = v_{0x} + a_xt$ (22)

$$\boxed{v_y = v_{0y} + a_yt} \qquad (23)$$

(খ) $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ সমীকরণের উপাংশে বিভাজন

X ও Y অক্ষ বরাবর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$, আদি অবস্থান ভেক্টর $\vec{r_0}$, আদিবেগ $\vec{v_0}$ এবং ত্বরণ $\vec{a}$-এর উপাংশে যথাক্রমে $\vec{x}$ ও $\vec{y}$, $\vec{x_0}$ ও $\vec{y_0}$, $\vec{v_{0_x}}$ ও $\vec{v_{0_y}}$ এবং $\vec{a_x}$ ও $\vec{a_y}$ হলে,

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$
$$\vec{r_0} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$$
$$\vec{v_0} = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j} \text{ এবং}$$
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

এখন, এই উপাংশগুলো $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$x\hat{i} + y\hat{j} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + v_{0x}\hat{i}t + v_{0y}\hat{j}t + \frac{1}{2}a_x\hat{i}t^2 + \frac{1}{2}a_y jt^2$$
$$= (x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2)\hat{i} + (y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2)\hat{j}$$

উপরের সমীকরণের উভয় পার্শ্বের একক ভেক্টর $\hat{i}$ ও $\hat{j}$-এর সহগগুলো সমান।

অতএব, $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2$ (24)

এবং $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2$ (25)

(গ) $v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}.\vec{s}$ বা $\vec{v}.\vec{v} = \vec{v_0}.\vec{v_0} + 2\vec{a}.(\vec{r} - \vec{r_0})$ সমীকরণের উপাংশে বিভাজন

আমরা জানি,

$$v^2 = v_0^2 + 2\vec{a}.\vec{s}$$

বা, $\vec{v}.\vec{v} = \vec{v_0}.\vec{v_0} + 2\vec{a}.(\vec{r} - \vec{r_0})$

বা, $(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}).(v_x\hat{i} + v_y\hat{j}) = (v_{x_0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j}).(v_{x_0}\hat{i} + v_{y0}\hat{j}) +$
$2(a_x\hat{i} + a_y\hat{j}).[(\vec{x} - \vec{x_0})\hat{i} - (y - y_0)\hat{j}]$

বা, $v_x^2 + v_y^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + 2a_x(x - x_0) + 2a_y(y - y_0)$

$[\because \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ এবং $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0]$

যেহেতু X ও Y অক্ষ পরস্পর নির্ভরশীল নয়,

সুতরাং, উভয় পক্ষের X উপাংশগুলো সমান এবং Y উপাংশগুলোও সমান।

$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$ (26)

এবং $v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$ (27)

৩.৬ নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি
Projectile Motion

কোন একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রক্ষেপক বা প্রাস (Projectile) বলে। নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিকে প্রাসের গতি বলে। তির্যকভাবে নিক্ষিপ্ত ঢিল বা বন্দুকের গুলির গতি প্রাস গতির উদাহরণ।

কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা (Some necessary definitions) :

(ক) নিক্ষেপণ বেগ (Velocity of projection) : যে আদি বেগে কোন একটি নিক্ষিপ্ত বস্তুকে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হয়, তাকে নিক্ষেপণ বেগ বলে।

(খ) নিক্ষেপণ কোণ (Angle of projection) : নিক্ষেপণ বেগ এবং অনুভূমিক তলের মধ্যবর্তী কোণকে নিক্ষেপণ কোণ বলে। একে সাধারণত α বা θ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(গ) সঞ্চার বা বিচরণ পথ (Trajectory) : যে পথে নিক্ষিপ্ত বস্তুটি গমন করে তাকে সঞ্চার বা বিচরণ পথ বলে।

(ঘ) নিক্ষেপণ বিন্দু (Point of projection) : যে বিন্দু হতে একটি বস্তুকে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হয়, তাকে নিক্ষেপণ বিন্দু বলে।

(ঙ) বিচরণ কাল বা ভ্রমণ কাল (Time of flight) : নিক্ষেপের মুহূর্ত হতে সমতলে ফিরে আসতে নিক্ষিপ্ত বস্তুর যে সময় লাগে তাকে ভ্রমণ কাল বা বিচরণ কাল বলে। একে সাধারণত T দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(চ) পাল্লা (Range) : নিক্ষেপণ বিন্দু ও বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী রৈখিক দূরত্বকে পাল্লা বলে। একে সাধারণত R দ্বারা সূচিত করা হয়।

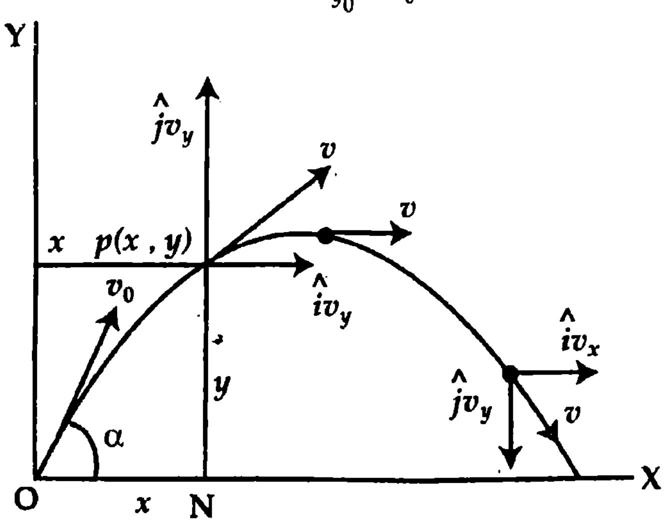
৩.৬ তির্যকভাবে বাধাহীন পথে উপর দিকে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতির সমীকরণ

Equation of motion of a freely moving body thrown obliquely vertically upward or motion of a projectile

মনে করি, একটি বস্তু কণাকে O বিন্দু হতে v_0 আদি বেগে অনুভূমিকের সাথে α কোণে তির্যকভাবে নিক্ষেপ করা হল। নিক্ষেপ করার মুহূর্তে $x_0 = 0$, $y_0 = 0$। গতি বিষয়ক আলোচনায় বাতাসের বাধাকে উপেক্ষা করা হয়। O বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরে অনুভূমিক ও উলম্ব বরাবর X ও Y অক্ষ বিবেচনা করি। আদি বা প্রাথমিক বেগকে অনুভূমিক ও উলম্ব দুটি অংশে বিভক্ত করি। অতএব $t = 0$ সময়ে x-অক্ষ বরাবর বেগের অনুভূমিক অংশক

$$v_{x_0} = v_0 \cos \alpha$$

এবং উল্লম্ব অংশক, $v_{y_0} = v_0 \sin \alpha$



চিত্র ৩.৫

মনে করি, t সময় পরে বস্তুকণাটি p স্থানে পৌঁছল। এখন এর বেগ $= \vec{v}$। p বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) অর্থাৎ X-অক্ষ হতে এর দূরত্ব y এবং Y-অক্ষ হতে এর দূরত্ব x।

এখন কণাটি $\vec{v_0}$ আদি বেগে g অভিকর্ষীয় ত্বরণের প্রভাবে গমন করছে। এক্ষেত্রে ভূমির সমান্তরালে g এর কোন প্রভাব নেই। সুতরাং বেগের অনুভূমিক উপাংশ অপরিবর্তিত থাকবে, কেননা g খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে।

$\vec{v}$ কে দুটি উপাংশে ভাগ করা যায়, আদি বেগ v-এর অনুভূমিক উপাংশ $v_{x_0} = v_0 \cos \alpha$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $v_{y_0} = v_0 \sin \alpha$।

গতির সমীকরণ (13) হতে পাই,

$$v_x = v_{x_0} + a_x t \qquad \text{এখানে} \quad a_x = 0$$

$$v_x = v_{x_0} = v_0 \cos \alpha$$

সুতরাং t সময়ে ভূমির সমান্তরালে কণাটির সরণ

$$x = ON = v_0 \cos\alpha \times t$$

বা, $$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \qquad (28)$$

এখন বেগের খাড়া উপাংশ (সমীকরণ 14)

$v_y = v_{y_0} + a_y t$, সমীকরণে

$a_y = -g$

এবং $v_{y_0} = v_0 \sin\alpha$ বসিয়ে পাওয়া যাবে

[চিত্রানুসারে a_y উপরের দিকে ধনাত্মক। কিন্তু g-এর দিক খাড়া নিচের দিকে হওয়ায়, g ঋণাত্মক।]

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt$$

অতএব, t সময়ে কণাটির উল্লম্ব সরণ

$$y = PN = y_0 + v_{y_0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad \text{[সমীকরণ (25) হতে]}$$

$$= 0 + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$= v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (29)$$

সমীকরণ (28) হতে t-এর মান সমীকরণ (29)-এ বসিয়ে আমরা পাই,

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2$$

$$= x \tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$= x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \qquad (30)$$

সমীকরণ (30)-এ α, g এবং v_0 ধ্রুবক। সুতরাং

$$\left.\begin{array}{r} \tan\alpha = b \\ \text{এবং } \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} = c \end{array}\right\} \text{ ধ্রুবক ধরে}$$

সমীকরণ (30)-কে লেখা যায়,

$$y = bx - cx^2 \qquad (31)$$

এই সমীকরণটি অধিবৃত্তের একটি সাধারণ সমীকরণ।

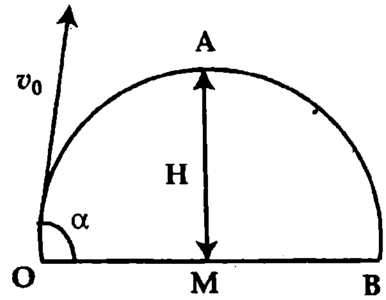
সুতরাং সিদ্ধান্ত করা যায় যে, **বাধাহীন পথে উপরের দিকে তির্যকভাবে নিক্ষিপ্ত একটি বস্তু কণার বা প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত বা প্যারাবোলা (parabola)।**

(i) নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের সর্বোচ্চ অতিক্রান্ত উচ্চতা (Greatest height attained by a projectile)

মনে করি O বিন্দু হতে v_0 আদি বেগে ভূমির সাথে α কোণে উপর দিকে বস্তুটি নিক্ষেপ করা হল। বিচরণ পথের সর্বোচ্চ বিন্দু A। A হতে AM খাড়া রেখা O বিন্দুগামী অনুভূমিক M বিন্দুতে ছেদ করে। বিচরণ শেষে প্রক্ষিপ্ত বস্তুটি অনুভূমিক তলের B বিন্দুতে পতিত হল। মনে করি AM সর্বোচ্চ উচ্চতা = H। H-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি,

(সর্বোচ্চ বিন্দুতে বেগের উল্লম্ব উপাংশ)^2 = (আদি বেগের উল্লম্ব উপাংশ)^2 — $2gH$



চিত্র ৩·৬

এখানে খাড়া উপরের দিকে আদি বেগ v_0-এর উল্লম্ব উপাংশ = $v_0 \sin\alpha$। সর্বোচ্চ বিন্দুতে বস্তুর খাড়া বেগ শূন্য হবে। অতএব উপরের সমীকরণ হতে পাই,

$$0 = (v_0 \sin\alpha)^2 - 2gH$$

বা, $2gH = v_0^2 \sin^2\alpha$

বা, $$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \qquad (32)$$

এখন v_0, α এবং g-এর মান জেনে H-এর মান বের করা যায়। $\alpha = 90°$ হলে

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \qquad (32\ a)$$

(ii) সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছার সময় (Time to reach the greatest height)

মনে করি, সময় $= t$, অতএব আমরা পাই

শেষ বেগ = আদি বেগ — gt ; এখানে খাড়া উপরের দিকে আদি বেগ v_0-এর উল্লম্ব উপাংশ = $v_0 \sin\alpha$। সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছলে বস্তুর শেষ বেগ শূন্য হয়। অতএব উপরের সমীকরণ হতে পাই,

$$0 = v_0 \sin\alpha - gt$$

বা, $gt = v_0 \sin\alpha$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (33)$$

v_0, α এবং g-এর মান জেনে t-এর মান বের করা যায়।

(iii) বিচরণকাল বা ভ্রমণকাল (Time of flight)

মনে করি বিচরণকাল = T

কিন্তু আমরা জানি, সর্বোচ্চ বিন্দুতে আরোহণ কাল = সর্বোচ্চ বিন্দু হতে অবতরণ কাল।

$$T = t + t = 2t$$

বা, $$T = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (34) \qquad \left[\ t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\ \right]$$

v_0, α এবং g-এর মান জেনে T-এর মান বের করা যায়।

(iv) অনুভূমিক পাল্লা (Horizontal range)

প্রক্ষিপ্ত বিন্দু ও বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী অনুভূমিক দূরত্বকে অনুভূমিক পাল্লা বলে অথবা T সময়ে প্রাসটি অনুভূমিক দিকে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাই অনুভূমিক পাল্লা। একে R দ্বারা সূচিত করা হয় এখানে O প্রক্ষিপ্ত বিন্দু এবং B বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দু।

R = আদি বেগের অনুভূমিক উপাংশ × বিচরণ কাল

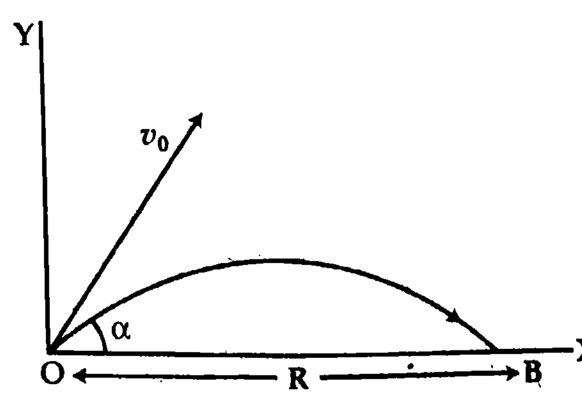
বা, $R = v_0 \cos\alpha \times T$

বা, $R = v_0 \cos\alpha \times \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$

বা, $R = \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$

বা, $$R = v_0^2 \cdot \frac{\sin 2\alpha}{g} \qquad (35)$$

v_0, α এবং g-এর মান জেনে R-এর মান নির্ণয় করা হয়।



চিত্র ৩·৭

(v) সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা (Maximum horizontal range)

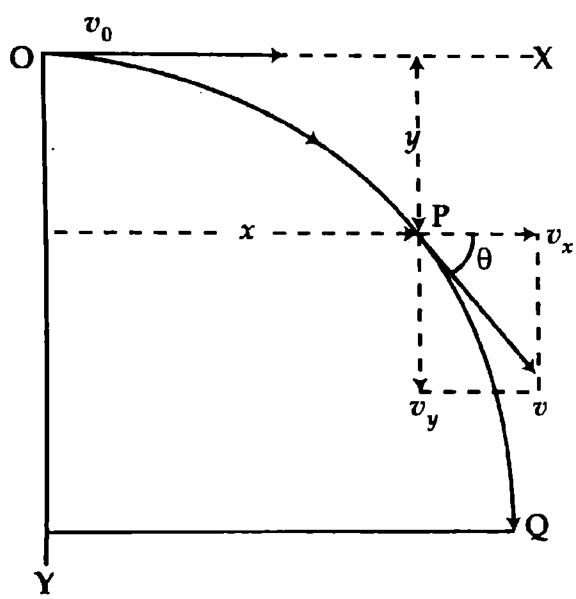
কোন স্থানে একটি নির্দিষ্ট বেগে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক হবে যদি $\sin 2\alpha$ সর্বোচ্চ এবং $\sin 2\alpha = 1$ বা $\alpha = 45°$। কাজেই সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g} \qquad (36)$$

সিদ্ধান্ত ঃ বায়ুর বাধা না থাকলে একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তার অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক হবে।

৩.৮ অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতির সমীকরণ
Equation of motion of a horizontal projectile

ধরি একটি বস্তুকে O বিন্দু হতে v_0 বেগে অনুভূমিক দিকে নিক্ষেপ করা হল [চিত্র ৩.৮]। বায়ুর বাধা ও উচ্চতার সাথে g-এর পরিবর্তন অগ্রাহ্য করলে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতিপথের যে কোন বিন্দুতে অনুভূমিক বেগ অভিন্ন এবং v_0 হবে। কিন্তু নিক্ষিপ্ত বস্তুর বেগের খাড়া উপাংশ না থাকায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের দরুন খাড়া নিচের দিকে বস্তুর বেগ সময়ের সমানুপাতে বৃদ্ধি পাবে। ধরি t সেকেন্ড পরে বস্তুটি অনুভূমিক দিকে x দূরত্ব ও খাড়া নিচের দিকে y দূরত্ব অতিক্রম করে P বিন্দুতে এল এবং P বিন্দুতে বস্তুটির বেগ v ও v-এর অনুভূমিক ও উল্লম্ব অংশকের মান যথাক্রমে v_x ও v_y। তা হলে,



চিত্র ৩.৮

$$v_x = v_0 = v \cos\theta$$

ও $v_y = 0 + gt = gt = v \sin\theta$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

এখানে অনুভূমিকের সাথে v-এর কৌণিক ব্যবধান θ.

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

আবার, $x = v_0 \times t$ (37) [∵ অনুভূমিক দিকে ত্বরণ = 0]

ও $y = \frac{1}{2} gt^2$ (38) [∵ উল্লম্ব দিকে আদি বেগ = 0]

সমীকরণ (37) হতে t-এর মান সমীকরণ (38)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়—

$$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \qquad (39)$$

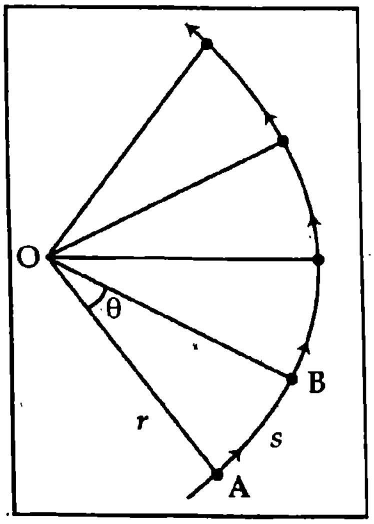
$$x^2 = \frac{2v_0^2}{g} y$$

উপরের সমীকরণে $\frac{2v_0^2}{g} = 4A$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$x^2 = 4Ay \qquad (40)$$

এটি একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ। কাজেই বাধাহীন পথে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর বা প্রাসের গতিপথ প্যারাবোলা (Parabola) বা অধিবৃত্ত রচনা করে।

৩.৯ বৃত্তাকার গতি
Circular motion



চিত্র ৩.৯

সংজ্ঞা ঃ কোন বস্তুকণা যদি কোন অক্ষ বা বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে, তবে বস্তুকণার এই গতিকে বৃত্তাকার গতি বলে। বৃত্তাকার গতি এক ধরনের ঘূর্ণন গতি এবং বস্তু যে অক্ষের চারদিকে ঘুরে তাকে ঘূর্ণন অক্ষ (axis of rotation) বলে।

উদাহরণ ঃ একটি ছোট পাথরকে একটি সুতা দিয়ে বেঁধে সুতার অপর প্রান্ত হাতে ধরে পাথরটিকে ঘুরাতে থাকলে দেখা যাবে যে, পাথরটি একটি বৃত্তাকার পথে ঘুরছে [চিত্র ৩.৯]। যথার্থ বলতে পাথরের প্রতিটি কণা এক একটি আলাদা বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। চলন্ত গাড়ির চাকার গতি, বৈদ্যুতিক পাখার গতি, গ্রামোফোন রেকর্ড-এর গতি ইত্যাদি একই রকমের। বস্তুর এই গতিই বৃত্তাকার গতি।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর ঃ বৃত্তপথে ঘূর্ণনরত বস্তুর কেন্দ্র ও কণার মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। চিত্র ৩.৯-এ কণাটি যখন A অবস্থানে তখন এর ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$; এর মান, ব্যাসার্ধ $OA = r$.

বৃত্তাকার গতির প্রকারভেদ (Kinds of rotational motion)

বৃত্তাকার গতি দুই প্রকারের ; যথা— (১) **সম-বৃত্তাকার গতি** (Uniform circular motion) ও **(২) অসম-বৃত্তাকার গতি** (Non-uniform circular motion)

(১) সম-বৃত্তাকার গতি ঃ যদি কোন বস্তুকণা কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে সমান সময়ে সমান কোণ উৎপন্ন করে ঘুরতে থাকে, তবে সেই গতিকে সম-বৃত্তাকার গতি বলে।

(২) অসম-বৃত্তাকার গতি ঃ যদি কোন বস্তুকণা কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে নির্দিষ্ট সময়ে ভিন্ন ভিন্ন কোণ উৎপন্ন করে ঘুরতে থাকে, তবে সেই গতিকে অসম বৃত্তাকার গতি বলে।

৩.১০ কৌণিক সরণ ও কৌণিক বেগ
Angular displacement and angular velocity

কৌণিক সরণ ঃ কোন বস্তু বা কণা কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরার সময় যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে উক্ত বস্তু বা কণার কৌণিক সরণ বলে।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি, t সময়ে একটি কণা A হতে B অবস্থানে গেল [চিত্র ৩.৯]। তাহলে ঐ সময়ে কণাটির কৌণিক সরণ $= \angle AOB = \theta$। কৌণিক সরণের একক রেডিয়ান। তবে কখনও কখনও θ-কে ডিগ্রী বা গ্রেডিয়ানে প্রকাশ করা হয়।

ধরা যাক, একটি কণা t সময়ে A অবস্থান হতে B অবস্থানে গেল। এতে কণাটির বৃত্তের পরিধির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= s$ এবং কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ θ।

এখন রেডিয়ানের সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\theta \text{ (রেডিয়ান)} = \frac{\text{বৃত্তচাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \frac{s}{r} \qquad (41)$$

সমীকরণ (41)-এ $s = r$ হলে, $\theta = 1$ রেডিয়ান হয়। সুতরাং 1 রেডিয়ানের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা ঃ কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে 1 রেডিয়ান বলে। কণাটি বৃত্তাকার পথে যদি একবার সম্পূর্ণ ঘুরে আসে তবে কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ হবে

$$\theta = \frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ রেডিয়ান} = 360^\circ \text{ (ডিগ্রী)}$$

অতএব, 1 বার ঘূর্ণন = 2π রেডিয়ান = $360°$

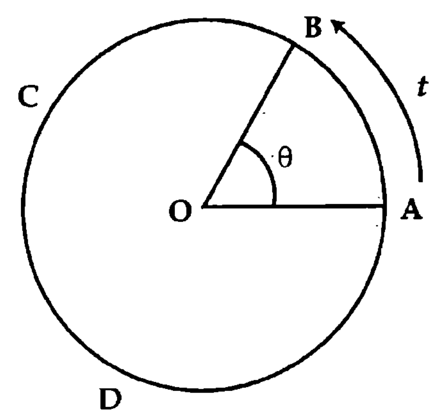
$$\therefore \boxed{1 \text{ রেডিয়ান } = \frac{360°}{2\pi} = 57.3° \text{ (প্রায়)}}$$

$$\boxed{\text{অন্যভাবে, } 1° = \frac{2\pi}{360°} = 0.0175 \text{ রেডিয়ান।}}$$

কৌণিক বেগ ঃ যদি কোন বস্তুকণা একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে ঘুরে, তা হলে কণাটি একক সময়ে যে নির্দিষ্ট কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে তার কৌণিক বেগ বলে। একে ω (ওমেগা) দ্বারা সূচিত করা হয়। একে সাধারণত রেডিয়ান/সে. এককে পরিমাপ করা হয়।

উল্লেখ্য, বৃত্তের চারদিক একবার ঘুরে আসতে বস্তুকণার যে সময়ের প্রয়োজন তাকে কণাটির পর্যায়কাল এবং প্রতি সেকেণ্ডে বৃত্তের চারদিকে যতবার ঘুরে তাকে কণাটির কম্পাঙ্ক বলে। পর্যায়কালকে T দ্বারা ও কম্পাঙ্ককে n দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

মনে করি, A একটি বস্তুকণা [চিত্র ৩.১০]। বস্তুকণাটি O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ABCD বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করছে এবং অতি অল্প t সময় ব্যবধানে তা A বিন্দু হতে B বিন্দুতে উপনীত হল। বস্তুকণার এই দুই অবস্থান বিন্দুকে বৃত্তের কেন্দ্রের সাথে সংযুক্ত করলে যে কোণ উৎপন্ন হবে, তাই উক্ত সময়ে বস্তুকণা কর্তৃক অতিক্রান্ত কৌণিক সরণ। ধরি তা θ সুতরাং



চিত্র ৩.১০

$$\text{কৌণিক বেগ} = \frac{\text{কৌণিক সরণ}}{\text{সময়}}$$

$$\boxed{\text{বা, } \omega = \frac{\theta}{t}} \quad (42)$$

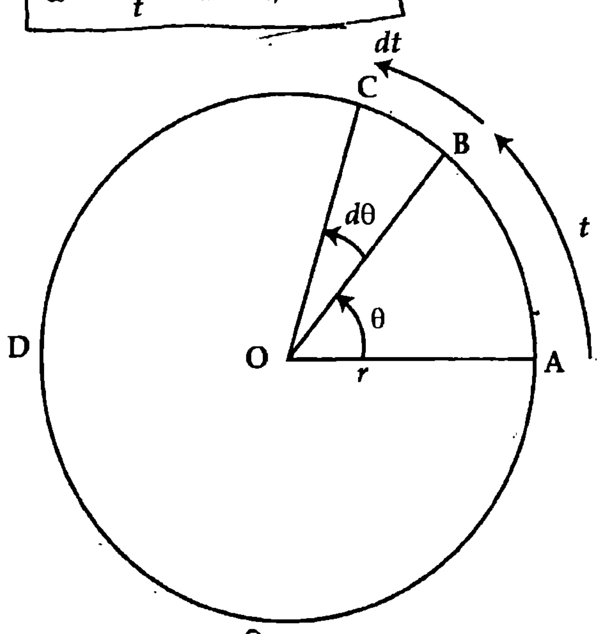
বস্তুকণাটি যদি T সেকেণ্ডে বৃত্তের চারদিকে একবার ঘুরে আসে, তবে

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ রেডিয়ান/সে.}} \quad (43)$$

এখানে, T হল বৃত্তপথে কণাটির পর্যায়কাল।

আবার, বস্তুকণাটি যদি t সেকেণ্ডে বৃত্তের চারদিকে N বার ঘুরে, তবে

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi N}{t} \text{ রেডিয়ান/সে.}} \quad (44)$$



চিত্র ৩.১১

বস্তুকণাটি প্রতি সেকেণ্ডে বৃত্তের চারদিকে n সংখ্যক বার ঘুরে এলে, অর্থাৎ কম্পাঙ্ক n হলে কৌণিক বেগ হবে,

$$\omega = 2\pi n \text{ রেডিয়ান/সে.।} \quad (45)$$

এখন সমীকরণ (43) এবং সমীকরণ (45) হতে আমরা পাই,

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

$$\text{বা, } \frac{1}{T} = n$$

$$\boxed{\therefore \; n = \frac{1}{T}} \quad (46)$$

এটিই হল পর্যায়কাল এবং কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক।

গড় কৌণিক বেগ ঃ যদি বস্তুকণার গতি অসম বৃত্তাকার গতি হয় তবে সেক্ষেত্রে কৌণিক সরণ এবং অতিবাহিত সময়ের অনুপাতকে **গড় কৌণিক বেগ** বলে।

অতি ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান Δt -এর মধ্যে কৌণিক সরণ $\Delta\theta$ হলে গড় কৌণিক বেগ হবে

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (47)$$

তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ ঃ কোন নির্দিষ্ট মুহূর্তে কৌণিক বেগ জানতে হলে সময় ব্যবধান ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর করতে হয়। অবশেষে যখন সময় ব্যবধানের সীমাস্থ মান প্রায় শূন্য হয় তখন ঐ সময় ব্যবধানের জন্য যে গড় কৌণিক বেগ পাওয়া যাবে, তা-ই **তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ** বা **কৌণিক বেগ**। সুতরাং তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ,

$$\omega = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (48)$$

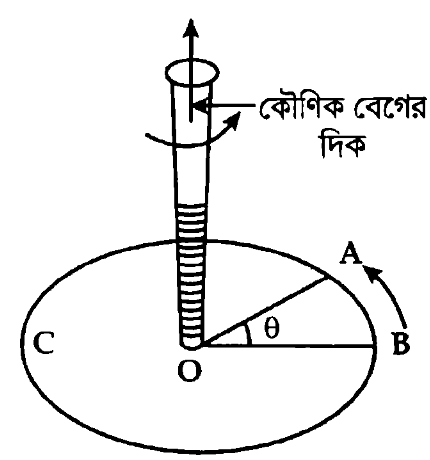
উপরের সমীকরণ হতে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগের সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ

সংজ্ঞা ঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ বলে।

কৌণিক বেগের দিক (ভেক্টর রূপ)

কৌণিক বেগ একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক দুই-ই আছে। একটি ডান পাকের স্ক্রুর সাহায্যে এর দিক নির্দেশ করা যায়।

একটি কণা ABC বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকলে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র O-এ একটি ডান পাকের স্ক্রুর অগ্রভাগ বৃত্ত-তলের অভিলম্বভাবে স্থাপন করে কণাটির ঘূর্ণনের সাথে এবং কণাটি যে ক্রমে ঘুরছে সেই ক্রমে স্ক্রুটিকে ঘুরালে তার গতির দিকই হবে কণাটির কৌণিক বেগের দিক [চিত্র ৩.১২]।



চিত্র ৩.১২

কৌণিক বেগের একক (Units of angular velocity)

কৌণিক বেগ একটি পরিমাণমূলক রাশি। অতএব এর একক আছে। নিম্নে এর একক আলোচিত হল।

আমরা জানি, কৌণিক বেগ $= \dfrac{\text{কৌণিক সরণ}}{\text{সময়}}$

অর্থাৎ, $\omega = \dfrac{\theta}{t}$

এখন কোণকে **তিনটি** এককে প্রকাশ করা হয় হেতু কৌণিক বেগের **তিনটি** একক আছে। এরা যথাক্রমে **রেডিয়ান/সে., ডিগ্রি/ সে.** এবং **গ্রেডিয়ান/সে.**। তবে এই তিনটি এককের মধ্যে **রেডিয়ান/সে.**-ই কৌণিক বেগের প্রচলিত একক।

কৌণিক বেগের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of angular velocity)

কৌণিক বেগের সংজ্ঞা হতেই এর মাত্রা সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। অতএব কৌণিক বেগের মাত্রা সমীকরণ,

$$[\omega] = \frac{\theta}{t} = \frac{[\text{কোণ}]}{[\text{সময়}]} = \frac{[\text{বৃত্তচাপ/ব্যাসার্ধ}]}{[\text{সময়}]} = \frac{[\text{বৃত্তচাপ}]}{[\text{ব্যাসার্ধ}]\times[\text{সময়}]}$$

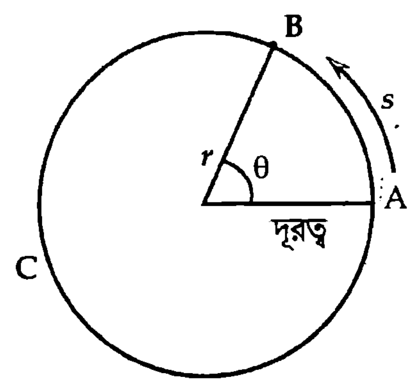
$$= \frac{[L]}{[L]\times[T]}$$

$$= [T^{-1}]$$

৩.১১ কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular velocity and linear velocity

আমরা জানি, রৈখিক পথে নির্দিষ্ট দিকে কোন একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের রৈখিক সরণই রৈখিক বেগ এবং বৃত্তাকার পথে কোন একটি বস্তুর প্রতি সেকেন্ডের কৌণিক সরণই কৌণিক বেগ। রৈখিক বেগকে v_0 অথবা v এবং কৌণিক বেগকে ω দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রৈখিক বেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্কজনিত সমীকরণটি এখন প্রতিপাদন করা হবে।

মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধি বরাবর ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে [চিত্র ৩.১৩]। যদি T সেকেন্ডে কণাটি বৃত্তের সম্পূর্ণ পরিধি একবার ঘুরে আসে তবে কৌণিক বেগের সংজ্ঞানুসারে,



চিত্র ৩.১৩

$$\omega = \frac{\text{কৌণিক দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{2\pi}{T}$$

বা, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (49)

এখন যদি বৃত্তাকার পথে না ঘুরে কণাটি v বেগে একই সময়ে সরলরেখায় বৃত্তের পরিধির সমান পথ T সময়ে অতিক্রম করে, তবে

$$v = \frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে সময়}} = \frac{2\pi r}{T}$$

বা, $T = \dfrac{2\pi r}{v}$ (50)

সমীকরণ (49) এবং সমীকরণ (50) হতে আমরা পাই, $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi r}{v}$

বা, $\dfrac{1}{\omega} = \dfrac{r}{v}$

বা, $\boxed{v = \omega r}$ (51)

বিকল্প পদ্ধতি (ক্যালকুলাসের সাহায্যে) ঃ মনে করি বস্তুকণাটি t সময়ে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের s বৃত্তচাপ অতিক্রম করে এবং কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে।

সুতরাং সমীকরণ (41) হতে পাই,

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$

বা, $\boxed{s = r\theta}$

এখন উভয় পক্ষকে t-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$\dfrac{ds}{dt} = r\dfrac{d\theta}{dt}$, এখানে r ধ্রুবক।

কিন্তু $\dfrac{ds}{dt}$ = রৈখিক বেগ = v এবং $\dfrac{d\theta}{dt}$ = কৌণিক বেগ = ω

$v = r\omega$

অর্থাৎ **রৈখিক বেগ = কৌণিক বেগ × বৃত্তের ব্যাসার্ধ।** $V = \omega r$

উল্লেখ থাকে যে, বৃত্তীয় গতি যদি অসম হয়, তবুও যে কোন বিন্দুতে $v = \omega r$। বস্তুটি সমকৌণিক বেগে চললে ω = ধ্রুবক। অতএব $v \propto r$ অর্থাৎ রৈখিক বেগ ঘূর্ণন অক্ষ হতে দূরত্বের সমানুপাতিক।

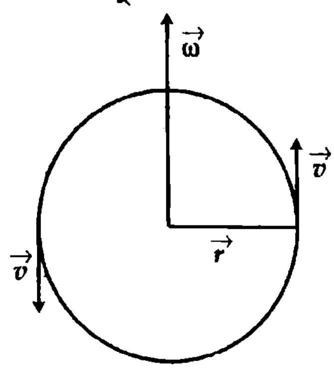
উদাহরণ—ধান মাড়াইয়ের চাতালে দূরবর্তী গরুকে সবচেয়ে বেশি বেগে হাঁটতে হয়।

$v = \omega \times r$ সমীকরণের ভেক্টর রূপ

Vector form of the equation $v = \omega \times r$

আমরা জানি, $\vec{\omega}$ একটি ভেক্টর রাশি এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ বা ব্যাসার্ধ ভেক্টরও একটি ভেক্টর রাশি। অতএব রাশি দুটির ক্রস গুণফলও (cross product) একটি ভেক্টর রাশি হবে।

ধরি ক্রস গুণফল = $\vec{c}$



চিত্র ৩·১৪

$$\therefore \quad \vec{c} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{(i)}$$

বা, $\vec{c}$ ভেক্টরের মান

$c = \omega r \cdot \sin 90^\circ \qquad [\because \vec{\omega} \perp \vec{r}]$

বা, $c = \omega r$

ক্রস গুণনের নিয়মানুসারে $\vec{c}$ ভেক্টরের মান এবং $\vec{v}$ ভেক্টরের মান এক। পুনঃ $v = \omega \times r$। অতএব মান ও দিক বিবেচনা করলে $\vec{c}$ এবং ভেক্টর $\vec{v}$ একই।

$$\vec{c} = \vec{v} \qquad \text{(ii)}$$

সমীকরণ (i) এবং (ii) হতে আমরা পাই,

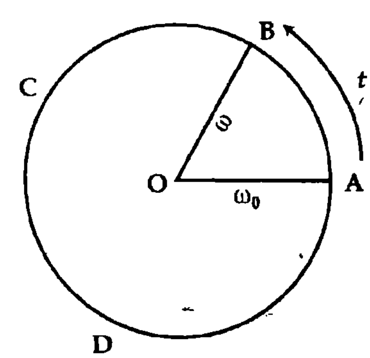
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \text{(iii)}$$

এটিই হল রৈখিক বেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্কের ভেক্টর রূপ।

৩·১২ কৌণিক ত্বরণ
Angular acceleration

সংজ্ঞা ঃ অসমকৌণিক বেগে গতিশীল কোন একটি বস্তুর কৌণিক বেগ পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বলে। বস্তুর কৌণিক বেগ একক সময়ে যে পরিমাণ বৃদ্ধি হয় তা দ্বারা কৌণিক ত্বরণ পরিমাপ করা হয়। একে α দ্বারা সূচিত করা হয়।

মনে করি একটি বস্তুকণা বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। ধরি A অবস্থানে এর কৌণিক বেগ ω_0 এবং t সেকেন্ড পরে B অবস্থানে এর কৌণিক বেগ ω [চিত্র ৩·১৫]।



চিত্র ৩·১৫

$$\text{কৌণিক ত্বরণ, } \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} \qquad (52)$$

যদি Δt সময় ব্যবধানে কণাটির কৌণিক বেগের পরিবর্তন $\Delta\omega$ হয়, তবে গড় কৌণিক ত্বরণ $\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ 52(a)

তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বা কৌণিক ত্বরণ,

$$\alpha = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad 52(b)$$

আমরা জানি, কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad 52\ (c)$$

সমীকরণ 52(b) হতে কৌণিক ত্বরণ বা তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়—

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বা তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বলে।

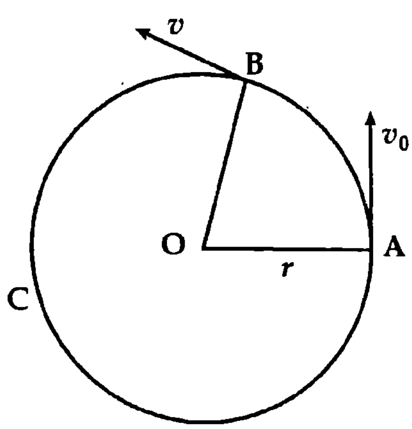
কৌণিক ত্বরণের একক : কৌণিক ত্বরণের একক হল রেডিয়ান / সেকেন্ড² (rad s^{-2}) বা ডিগ্রী / সেকেন্ড² (deg s^{-2})

কৌণক ত্বরণের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of angular accelaration)

কৌণিক ত্বরণের মাত্রা হচ্ছে $\dfrac{\text{কৌণিক বেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$ এর মাত্রা।

$$\text{মাত্রা সমীকরণ, } [\alpha] = \frac{[\text{কৌণিক বেগ}]}{[\text{সময়}]} = \left(\frac{T^{-1}}{T}\right) = \boxed{[T^{-2}]}$$

৩·১৩ কৌণিক ত্বরণ ও রৈখিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular accelaration and linear accelaration



চিত্র ৩·১৬

ধরি একটি বস্তুকণা O-কে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পথের পরিধি ABC বরাবর অসম গতিতে চলে অতি অল্প সময় t-এ A হতে B-তে পৌঁছল [চিত্র ৩·১৬]। A ও B বিন্দুতে কণাটির রৈখিক বেগ যথাক্রমে v_0 ও v এবং কৌণিক বেগ যথাক্রমে ω_0 ও ω হলে রৈখিক ত্বরণের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\text{রৈখিক ত্বরণ, } a = \frac{v - v_0}{t}$$
$$= \frac{\omega r - \omega_0 r}{t} \quad [\because v = \omega r]$$
$$= \left(\frac{\omega - \omega_0}{t}\right) r$$

কিন্তু কৌণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে কৌণিক ত্বরণ $\boxed{\alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t}}$

$$\boxed{a = \alpha r} \qquad (53)$$

বিকল্প পদ্ধতি (ক্যালকুলাসের সাহায্যে) : মনে করি একটি বস্তুকণা r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট [চিত্র ৩·১৬] বৃত্তের পরিধি বরাবর অসম বৃত্তাকার গতিতে আবর্তন করছে। বস্তুকণাটির t সময়ে রৈখিক বেগ = v, কৌণিক বেগ = ω, রৈখিক ত্বরণ = a এবং কৌণিক ত্বরণ = α।

আমরা জানি,

$$v = \omega r \qquad 53\text{ (a)}$$
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$
$$\text{এবং } a = \frac{dv}{dt}$$

সমীকরণ 53 (a)-এর উভয়পক্ষকে t-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাই,

$$\frac{dv}{dt} = \omega\frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt}r = \frac{r\,d\omega}{dt} \quad [\; r = \text{ধ্রুবক}\,]$$

$$\text{বা, } a = \alpha r \quad \left[\because \frac{d\omega}{dt} = \alpha\right]$$

অর্থাৎ **রৈখিক ত্বরণ = কৌণিক ত্বরণ × ব্যাসার্ধ**

৩.১৪ কৌণিক গতি বিষয়ক সমীকরণ
Equations relating angular motion

সমকৌণিক ত্বরণে বৃত্তাকার পথে গতিশীল বস্তুর কৌণিক গতির সমীকরণ সরলরেখায় সমত্বরণে গতিশীল বস্তুর রৈখিক গতির সমীকরণের অনুরূপ। নিচে সংক্ষেপে কৌণিক গতির সমীকরণগুলো প্রতিপাদন করে দেখান হল :

১। সমকৌণিক ত্বরণে গতিশীল বস্তুর সময়ের সাথে কৌণিক বেগের সম্পর্ক :

ধরা যাক ω_0 আদি কৌণিক বেগসহ α সমকৌণিক ত্বরণে বৃত্তাকার পথে আবর্তনরত একটি ক্ষুদ্র বস্তুর অতি অল্প dt সময়ের কৌণিক বেগের পরিবর্তন $d\omega$। তা হলে কৌণিক ত্বরণের সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

t সেকেন্ড শেষে বস্তুকণার কৌণিক বেগ ω হলে, 0 ও t সময় সীমার মধ্যে উক্ত সমীকরণটিকে সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt$$

বা, $[\,\omega\,]_{\omega_0}^{\omega} = \alpha\, [\,t\,]_0^t$

বা, $\omega - \omega_o = \alpha t$

$$\therefore\ \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (54)$$

এটিই সমকৌণিক ত্বরণে গতিশীল বস্তুর সময়ের সাথে কৌণিক বেগের সম্পর্কজনিত সমীকরণ।

সমকৌণিক মন্দনের ক্ষেত্রে অনুরূপ সমীকরণ, $\omega = \omega_0 - \alpha t$ (55)

২। সমকৌণিক ত্বরণে গতিশীল বস্তুর কৌণিক সরণের সাথে সময় বা কৌণিক বেগের সম্পর্ক :

ধরা যাক একটি ক্ষুদ্র বস্তুর আদি কৌণিক বেগ ω_0 ও সমকৌণিক ত্বরণ α। অতি অল্প dt সময়ের ব্যবধানে কৌণিক বেগের পরিবর্তন $d\omega$ ও কৌণিক সরণের পরিবর্তন $d\theta$। তাহলে কৌণিক ত্বরণের সংজ্ঞানুসারে কোন মুহূর্তের তাৎক্ষণিক ত্বরণ,

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \text{ ও } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

কাজেই $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d\omega}{d\theta} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \dfrac{d\omega}{d\theta}$

বা, $\omega d\omega = \alpha d\theta$

ধরি t সেকেন্ড শেষে কণাটির কৌণিক সরণ θ ও কৌণিক বেগ ω। তা হলে 0 ও t সময় সীমার মধ্যে সমাকলন করে পাওয়া যায়,

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega .\, d\omega = \alpha \int_0^{\theta} d\theta$$

বা, $\left[\dfrac{\omega^2}{2}\right]_{\omega_0}^{\omega} = \alpha\left[\ \theta\ \right]_0^{\theta}$

বা, $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad (56)$$

এটিই সমকৌণিক ত্বরণে গতিশীল বস্তুর কৌণিক সরণের সাথে কৌণিক বেগের সম্পর্কজনিত সমীকরণ।

সমকৌণিক মন্দনের ক্ষেত্রে অনুরূপ সমীকরণ, $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha\theta$ (57)

পুনঃ সমীকরণ (54)-এ $\omega = \omega_0 + \alpha t$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

বা, $(\omega_0 + \alpha t)^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

বা, $\omega_0^2 + 2\omega_0 \alpha t + \alpha^2 t^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

বা, $2\alpha\theta = 2\omega_0 \alpha t + \alpha^2 t^2$

$$= 2\alpha\left(\omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2\right)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{58}$$

এটিই সমকৌণিক ত্বরণে গতিশীল বস্তুর সময়ের সাথে কৌণিক সরণের সম্পর্কজনিত সমীকরণ।

সমকৌণিক মন্দনের ক্ষেত্রে অনুরূপ সমীকরণটি,

$$\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{59}$$

কাজেই বৃত্তাকার পথে চলমান বস্তুকণার গতির সাধারণ সমীকরণ হল ঃ

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \pm \alpha t \\ \theta &= \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

৩.১৫ কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between angular velocity and linear velocity

কৌণিক বেগ ও রৈখিক বেগের মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য করা যায় ঃ

কৌণিক বেগ	রৈখিক বেগ
(১) কৌণিক পথে একটি বস্তুর কৌণিক সরণের হারকে কৌণিক বেগ বলে।	(১) নির্দিষ্ট দিকে রৈখিক পথে কোন একটি বস্তুর স্থান পরিবর্তনের হারকে এর রৈখিক বেগ বলে।
(২) একক সময়ের অতিক্রান্ত কৌণিক দূরত্ব দ্বারা কৌণিক বেগ পরিমাপ করা হয়।	(২) একক সময়ের অতিক্রান্ত রৈখিক দূরত্ব দ্বারা রৈখিক বেগ পরিমাপ করা হয়।
(৩) এর সমীকরণ, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, এখানে dt খুবই ক্ষুদ্র।	(৩) এর সমীকরণ, $v = \frac{ds}{dt}$, এখানে t খুবই ক্ষুদ্র।
(৪) এর মাত্রা সমীকরণ $[T^{-1}]$।	(৪) এর মাত্রা সমীকরণ $[LT^{-1}]$।
(৫) এর একক হল রেডিয়ান/সে.,ডিগ্রী/সে. এবং গ্রেডিয়ান/ সে.।	(৫) এর একক মিটার/সে.।
(৬) রৈখিক বেগকে বৃত্তপথের ব্যাসার্ধ দ্বারা ভাগ করলে কৌণিক বেগ পাওয়া যায়, যথা ঃ $\omega = \frac{v}{r}$।	(৬) কৌণিক বেগকে বৃত্তপথের ব্যাসার্ধ দ্বারা গুণ করলে রৈখিক বেগ পাওয়া যায়, যথা ঃ $v = r\omega$।
(৭) বস্তু সমকৌণিক বেগে চললেও এর রৈখিক ত্বরণ থাকে।	(৭) বস্তু সমরৈখিক বেগে চললে এর রৈখিক ত্বরণ থাকে না।
(৮) আবর্তনরত কোন বস্তুর বিভিন্ন কণার কৌণিক বেগ সর্বদা একই থাকে।	(৮) আবর্তনরত কোন একটি বস্তুর বিভিন্ন কণার রৈখিক বেগ বিভিন্ন হয়।

৩.১৬ সুষম বৃত্তাকার গতি
Uniform circular motion

বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোন বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তাকার গতি বলে। সুষম বৃত্তাকার গতিতে সময়ের সাথে বস্তুর বেগের মান অপরিবর্তিত থাকলেও বেগের অভিমুখের পরিবর্তনের দরুন বেগের পরিবর্তন হবে। কাজেই বেগের অভিমুখ পরিবর্তনের জন্য বস্তুর উপর একটি বল তথা ত্বরণ ক্রিয়া করে। এই ত্বরণের অভিমুখ গতিপথের লম্ব বরাবর বৃত্তের কেন্দ্রমুখী। এই ত্বরণকে কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ বলে।

কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণের সংজ্ঞা ঃ কোন বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার উপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ বলে।

কেন্দ্রমুখী ত্বরণের মান ও দিক ঃ ধরি O কেন্দ্রবিশিষ্ট ও r ব্যাসার্ধের PQR বৃত্তাকার পথে একটি বস্তুকণা v সমদ্রুতিতে ঘুরে t সময়ে P অবস্থানে ও $(t + \Delta t)$ সময়ে Q অবস্থানে পৌঁছল এবং $\angle POQ = \theta$ [চিত্র ৩.১৬]। কাজেই Δt সময়ে কণাটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $\Delta s = v\Delta t$ = বৃত্তচাপ PQ। P ও Q বিন্দুতে বস্তুকণাটির তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ উক্ত বিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক অভিমুখী হবে। এই বেগদ্বয়ের উভয়ের মান v-এর সমান কিন্তু দিক ভিন্ন। Δt সেকেন্ডে বেগের পরিবর্তন ($\vec{v_2} - \vec{v_1}$)-কে $\Delta \vec{v}$ দ্বারা সূচিত করলে, $\Delta \vec{v}$-এর মান ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাওয়া যাবে। একই বিন্দু A হতে $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ ভেক্টর দুটি যথাক্রমে তীর চিহ্নিত AB ও AC সরলরেখা দ্বারা মানে ও দিকে নির্দেশ করে B ও C যোগ করি। তা হলে BC রেখা $\Delta \vec{v}$-কে মানে ও দিকে নির্দেশ করবে।

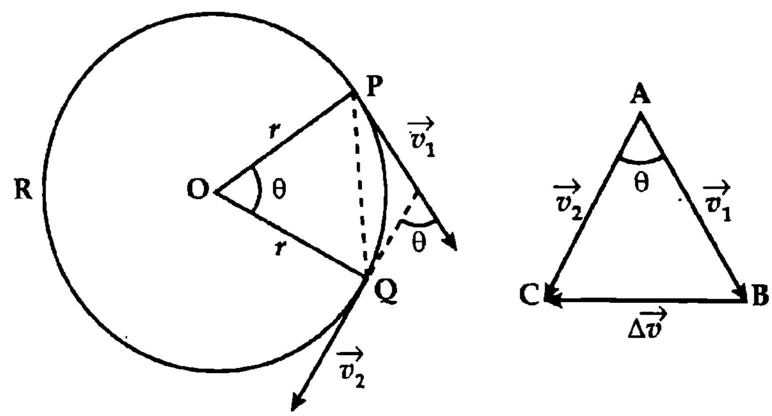
বর্ণনানুসারে OP, OQ ও PQ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ OPQ ও ত্রিভুজ ABC সদৃশকোণী। কেননা উভয়ই সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং $\angle BAC = \angle POQ = \theta$ । কাজেই, $\angle ABC = \angle ACB = \varphi$ হলে,

$$\varphi = \left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)$$

আবার সদৃশ ত্রিভুজের ধর্মানুসারে,

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r} \text{ (প্রায়)}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$



চিত্র ৩.১৭

এখানে বৃত্তচাপ PQ-কে জ্যা PQ-এর সমান ধরা হয়েছে। Δt ক্ষুদ্র হলে, সম্পর্কটি প্রায় সঠিক বিবেচনা করা যায়। কেননা এমতাবস্থায় বৃত্তচাপ PQ ও জ্যা PQ প্রায় সমান ধরা যায়।

$\Delta t \to 0$ হলে, P ও Q-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব ও θ উভয়ই খুবই ক্ষুদ্র হবে অর্থাৎ P ও Q খুবই কাছাকাছি দুটি বিন্দু হবে এবং $\Delta \vec{v}$ ও $\vec{v_1}$ বা $\vec{v_2}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\varphi \approx 90^\circ$ অর্থাৎ $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়া করবে।

কাজেই তাৎক্ষণিক ত্বরণের মান,

$$a = \text{L}t_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \frac{v^2}{r} \qquad (61)$$

$\therefore$ r ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে v সমদ্রুতিতে আবর্তনরত বস্তুর উপর সর্বদাই বৃত্তপথের কেন্দ্রের দিকে একটি ত্বরণ $a = \frac{v^2}{r}$ ক্রিয়া করে।

স্মরণিকা

অবস্থান ভেক্টর ঃ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।

সরণ ঃ কোন একটি গতিশীল বস্তুর অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে সরণ বলে।

তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ ঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে বস্তুর সরণের হারকে তাৎক্ষণিক বেগ বা বেগ বলে।

তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ ঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বেগ বৃদ্ধির হারকে তাৎক্ষণিক ত্বরণ বা ত্বরণ বলে।

প্রাস বা প্রক্ষেপক ঃ কোন একটি বস্তুকে অনুভূমিকের সাথে তির্যকভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলে তাকে প্রাস বা প্রক্ষেপক বলে।

নিক্ষেপণ কোণ ঃ নিক্ষেপণ বেগ এবং অনুভূমিক তলের মধ্যবর্তী কোণকে নিক্ষেপণ কোণ বলে।

বিচরণ কাল বা ভ্রমণ কাল ঃ নিক্ষেপের মুহূর্ত হতে সমতলে ফিরে আসতে নিক্ষিপ্ত বস্তুর যে সময় লাগে তাকে ভ্রমণ কাল বা বিচরণ কাল বলে।

পাল্লা ঃ নিক্ষেপণ বিন্দু ও বিচরণ পথের শেষ প্রান্ত বিন্দুর মধ্যবর্তী রৈখিক দূরত্বকে পাল্লা বলে।

বৃত্তাকার গতি ঃ কোন বস্তুকণা যদি কোন অক্ষ বা বিন্দুকে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তাকার পথে গতিশীল থাকে, তবে বস্তুকণার এই গতিকে বৃত্তাকার গতি বলে।

ব্যাসার্ধ ভেক্টর ঃ বৃত্তপথে ঘূর্ণনরত বস্তুর কেন্দ্র ও কণার মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখাকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে।

কৌণিক সরণ ঃ কোন বস্তু কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরার সময় যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে উক্ত বস্তুর কৌণিক সরণ বলে।

কৌণিক বেগ ঃ যদি কোন বস্তুকণা একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে বৃত্তাকার পথে ঘুরে, তাহলে কণাটি একক সময়ে যে নির্দিষ্ট কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তার কৌণিক বেগ বলে।

তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ ঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ বলে।

কৌণিক ত্বরণ ঃ অসম কৌণিক বেগে গতিশীল কোন একটি বস্তুর কৌণিক বেগ পরিবর্তনের হারকে কৌণিক ত্বরণ বলে।

তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বা কৌণিক ত্বরণ ঃ সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে সময়ের সাথে বস্তুর কৌণিক বেগের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক ত্বরণ বা কৌণিক ত্বরণ বলে।

সুষম বৃত্তাকার গতি ঃ বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে ঘূর্ণায়মান কোন বস্তুকণার গতিকে সুষম বৃত্তাকার গতি বলে।

কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ ঃ কোন বস্তুকণা যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন বৃত্তের ব্যাসার্ধ বরাবর এবং কেন্দ্রের অভিমুখে বস্তুকণার উপর যে ত্বরণ ক্রিয়া করে তাকে কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

বেগ, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

ভেক্টর রূপ, $\vec{v} = \hat{i}\, v_x + \hat{j}\, v_y$ (1)

ত্বরণ, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

ভেক্টর রূপ, $\vec{a} = \hat{i}\, a_x + \hat{j}\, a_y$ (2)

গতির সমীকরণের ভেক্টর রূপ

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\, t \qquad (3)$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 \qquad (4)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{v_0} \cdot \vec{v_0} + 2\, \vec{a}\, \vec{s} \qquad (5)$$

ভূমির সাথে তির্যকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতির ক্ষেত্রে ঃ

$$y = ax + bx^2 \qquad (6)$$

সর্বোচ্চ উচ্চতা, $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ (7)

সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছার সময়

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \qquad (8)$$

বিচরণ কাল, $T = \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g}$ (9)

পাল্লা, $R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (10)

সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা, $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ (11)

কৌণিক বেগ,

$$\omega \left.\begin{aligned} &= \theta/t \\ &= 2\pi/T \\ &= 2\pi N/t \\ &= 2\pi n \\ &= v/r \\ &= d\theta/dt \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

$\omega = \frac{2\pi N}{t}$

কৌণিক ত্বরণ, $$\alpha \left.\begin{aligned} &= \frac{d\omega}{dt} \\ &= \frac{\omega}{t} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

কৌণিক গতির সমীকরণ ঃ

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \pm \alpha t \\ \omega^2 &= \omega_0^2 \pm 2\alpha\theta \\ \theta &= \omega_0 t \pm \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{aligned} \quad (14)$$

কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণ $a = \frac{v^2}{r}$ (15)

সমাধানকৃত উদাহরণ

(১) একটি জীপ গাড়ী প্রথমে পূর্বদিকে 30 km ও পরে উত্তর দিকে 40 km দূরত্ব অতিক্রম করে গন্তব্য স্থানে পৌছে। গাড়ির লব্ধি সরণের মান ও দিক নির্ণয় কর। 10 s-এ গন্তব্য স্থানে যায় ধরে গড়বেগের মান নির্ণয় কর।

পূর্ব ও উত্তর দিক অভিমুখী একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ ধরে লব্ধি সরণকে লেখা যায়,

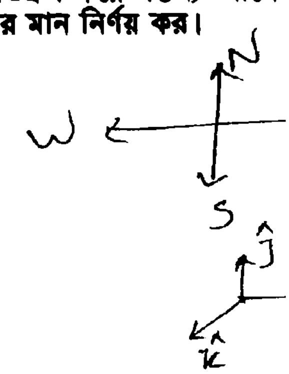
$$\vec{r} = 30\,\hat{i} + 40\,\hat{j}$$

∴ নির্ণেয় সরণের মান, $|\vec{r}| = \sqrt{30^2 + 40^2}\ \text{km} = 50\ \text{km}$

অভিমুখ পূর্ব দিকের সাথে θ কোণে উত্তর দিকে হলে,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{40\ \text{km}}{30\ \text{km}} = 1{\cdot}333 = \tan 53^\circ 8'$$

$$\theta = 53^\circ 8'$$



নির্ণেয় গড়বেগের মান, $\bar{v} = \frac{|\vec{r}|}{t} = \frac{50\ \text{km}}{10\ \text{s}} = 5\ \text{kms}^{-1}$

(২) একটি বোমারু বিমান 147 ms⁻¹ বেগে অনুভূমিক বরাবর চলার পথে 490 m উঁচু হতে একটি বোমা ফেলে দিল। বায়ুর বাধা উপেক্ষা করে বোমাটি কখন ও কোথায় মাটিতে পতিত হবে ? ফেলার মুহূর্ত হতে 5 s পরে বোমার দ্রুতি নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে খাড়া নিচের দিকে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $y = \frac{1}{2}gt^2$

কাজেই, $490\ \text{m} = \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2} \times t^2$

$$t = \sqrt{\left(\frac{490 \times 2}{9{\cdot}8}\right)}\ \text{s} = 10\ \text{s}$$

আবার অনুভূমিক সরণের মান, $x = v_{0x} \times t$

$$= 147\ (\text{ms}^{-1}) \times 10\ \text{s} = 1470\ \text{m}$$

5 s পরে বোমার দ্রুতি, $v = \sqrt{(gt)^2 + v_{0x}^2}$

$$= \sqrt{\{9{\cdot}8\ (\text{ms}^{-2}) \times 5\text{s}\}^2 + (147\ \text{ms}^{-1})} = 154{\cdot}95\ \text{ms}^{-1}$$

(৩) একটি বস্তুর বেগ 8s-এ $(4\hat{i} + 2\hat{j})\ \text{ms}^{-1}$ হতে বৃদ্ধি পেয়ে $(12\hat{i} - 4\hat{j})$ হল। গড় ত্বরণ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, $\Delta\vec{v} = \{(12\hat{i} - 4\hat{j}) - (4\hat{i} + 2\hat{j})\}\ \text{ms}^{-1} = (8\hat{i} - 6\hat{j})\ \text{ms}^{-1}$ ও $\Delta t = 8\text{s}$

$$\text{গড় ত্বরণ} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{(8\hat{i} - 6\hat{j})\ \text{ms}^{-1}}{8\text{s}}$$

$$= \left(\hat{i} - \frac{3}{4}\hat{j}\right)\ \text{ms}^{-2}$$

BG & JEWEL

ও গড় ত্বরণের মান, $\bar{a} = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}\ ms^{-2} = 1{\cdot}25\ ms^{-2}$

৪। কোন কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = [(30\ ms^{-1})\ t + 4{\cdot}2\ m]\ \hat{i} + [5{\cdot}3\ ms^{-1}]\ \hat{j}$ হলে বেগ নির্ণয় কর।

[য. বো. ২০০৪]

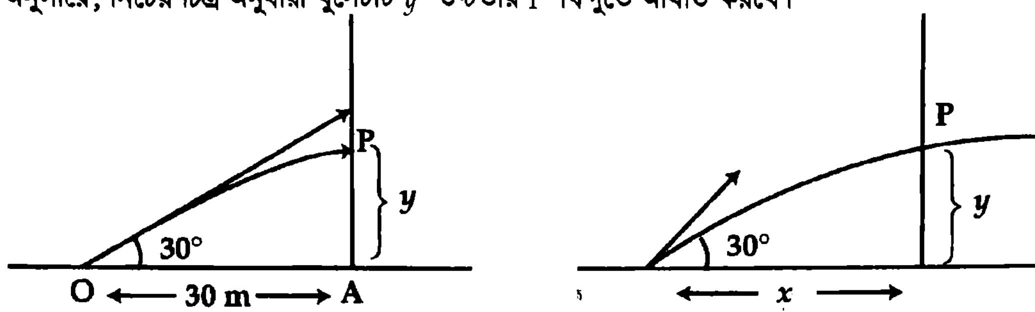
আমরা জানি, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$= \frac{d}{dt}\ [(3{\cdot}0\ ms^{-1})\ t + 4{\cdot}2\ m]\ \hat{i} + \hat{j}\ \frac{d}{dt}(5{\cdot}3\ ms^{-1})\ \hat{j}$

$= 3{\cdot}0\ ms^{-1}\ \hat{i}$

৫। অনুভূমিকের সাথে 30° কোণ করে ভূ-পৃষ্ঠ থেকে 40 ms⁻¹ বেগে একটি বুলেট ছোঁড়া হল। বুলেটটি 30 m দূরে অবস্থিত একটি দেওয়ালকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে? [চ. বো. ২০০১]

প্রশ্ন অনুসারে, নিচের চিত্র অনুযায়ী বুলেটটি y উচ্চতায় P বিন্দুতে আঘাত করবে।



চিত্র ৩.১৮

আমরা জানি, $x = v_0 \cos\theta_0\ t$

$30 = 40 \times \cos 30° \times t$

বা, $30 = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times t$

$t = \frac{3}{2\sqrt{3}}$

এখানে,
$v_0 = 40\ ms^{-1}$
$x = 30\ m$
$\theta_0 = 30°$

এখন, $y = v_0 \sin\theta_0\ t - \frac{1}{2}gt^2$

$= 40 \times \sin 30° \times \frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times \left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\right)^2$

$= 40 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \times 9{\cdot}8 \times \frac{9}{4 \times 3}$

$= \frac{30}{\sqrt{3}} - \frac{4{\cdot}9 \times 3}{4} = 13{\cdot}65\ m$

অথবা, $y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$

$y = 30 \times \tan 30° - \frac{9{\cdot}8 \times (30)^2}{2 \times (40)^2 \cos^2 30°}$

$= 17{\cdot}32 - 3{\cdot}67$

$= 13{\cdot}65\ m$

এখানে, $\alpha = 30°$
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
$v_0 = 40\ ms^{-1}$
$x = 30\ m$

৬। একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30° কোণে 40 ms⁻¹ বেগে কিক করা হল। 2 sec পরে ফুটবলের বেগের মান কত হবে নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬]

মনে করি, ফুটবলটি যে বিন্দু হতে কিক করা হল সেটি মূলবিন্দু এবং খাড়া উপরের দিক Y অক্ষ ধনাত্মক।

শেষ বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_x ও v_y হলে,

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

এখানে,
নিক্ষেপ কোণ = 30°
আদি বেগ, $v = 40\ ms^{-1}$
সময়, $t = 2$ sec
শেষ বেগ, $v = ?$

আদি বেগের অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশ যথাক্রমে v_{x_0} ও v_{y_0} হলে, আমরা পাই,

$v_x = v_{x_0} + a_x t = v_0\cos\theta + a_x t$

$= v_0\cos\theta$ [অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$]

$= 40\cos 30°$

$= 34{\cdot}64\ ms^{-1}$

এবং $v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin\theta + a_y t$

বা, $v_y = 40 \sin 30^\circ + (-9.8) \times 2$ [উল্লম্ব উপাংশ নিম্নমুখী হওয়ায় $a_y = -g = -9.8\ ms^{-2}$]

$= 20 - 19.6$

$= 0.4\ ms^{-1}$

$\therefore v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(34.64)^2 + (0.4)^2}$

$= \sqrt{1199.9 + 0.16} = \sqrt{1200}$

$= 34.64\ ms^{-1}$

(৭) একটি দালানের ছাদ থেকে একটি পাথর অনুভূমিকভাবে $20\ ms^{-1}$ বেগে নিক্ষেপ করা হল। 3 s পরে পাথরটির বেগ কত হবে ? [$g = 9.8\ ms^{-2}$]

আমরা জানি, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

আবার, $v_x = v_{x_0} + a_x t$

$= 20\ ms^{-1} + 0 \times 3$

$= 20\ ms^{-1}$

এবং $v_y = v_{y_0} + a_y t$

$= 0 - 9.8\ ms^{-2} \times 3\ s$

$= -29.4\ ms^{-1}$

$v = \sqrt{(20)^2 + (-29.4)^2}\ ms^{-1}$

$= 35.58\ ms^{-1}$

এখানে,

আদি অনুভূমিক বেগ, $v_{x_0} = 20\ ms^{-1}$

আদি উল্লম্ব বেগ, $v_{y_0} = 0$

অনুভূমিক ত্বরণ, $a_x = 0$

উল্লম্ব ত্বরণ, $a_y = -g = -9.8\ ms^{-2}$

[ছাদের উপরের দিকে a_y ধনাত্মক, g নিম্নমুখী হওয়ায় a_y ঋণাত্মক]

(৮) 50 m উঁচু একটি দালানের উপর হতে একটি পাথর $2\ ms^{-1}$ বেগে গড়িয়ে পড়ল। দালানের কিনারা হতে কত দূরে পাথরটি ভূমিতে পড়বে এবং পড়তে কত সময় লাগবে ?

প্রশ্নানুসারে, পাথরটির বেগের অনুভূমিক উপাংশ $v_{0x} = 2\ ms^{-1}$ এবং উল্লম্ব উপাংশ $v_{0y} = 0$। পাথরটি উপর হতে অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g'-এর প্রভাবে নিচে পড়ছে। 'g'-এর দিক খাড়া নিচের দিকে। এক্ষেত্রে $a_y = -g$ এবং $a_x = 0$।

আমরা জানি,

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{9.8}} = \sqrt{\frac{100}{9.8}} = 3.19\ s$$

3.19 s সময়ে অতিক্রান্ত অনুভূমিক দূরত্ব

$x = v_{0x} \times t = 2\ ms^{-1} \times 3.19\ s = 6.38\ m$

(৯) একটি কণা 4.5 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 225 বার আবর্তন করে। এর রৈখিক বেগ কত ? [ঢা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$v = \omega r$

$= 2\pi \times \frac{225}{60} \times 4.5$

$= 106\ ms^{-1}$

এখানে,

$r = 4.5\ m$

$n = 225/\text{মিনিট} = \frac{225}{60\ \text{সেকেন্ড}}$

$\omega = 2\pi n = 2\pi \times \frac{225}{60}\ rads^{-1}$

(১০) একটি কণা একটি বৃত্তাকার পথ প্রতি মিনিটে 300 বার আবর্তন করে। পর্যায়কাল ও কৌণিক বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি পর্যায়কাল = T ও কৌণিক বেগ = ω

আমরা পাই, $\boxed{T = \frac{t}{N}}$ (1)

ও $\omega = \frac{2\pi N}{t}$ (2)

এখানে, $t = 1$ মিনিট $= 60\ s$ ও $N = 300$ বার।

সমীকরণ (1) অনুযায়ী,

$T = \frac{60\ s}{300} = 0.2\ s$

এবং সমীকরণ (2) অনুযায়ী,

$\omega = \frac{2 \times 3.14 \times 300\ rad}{60\ s}$

$= 31.4\ rad\ s^{-1}$

P.V

১১। একটি গাড়ির চাকা 20 মিনিট 50 সেকেন্ডে 250 বার ঘুরে 1 km পথ অতিক্রম করে। চাকার পরিধি ও পরিধিস্থ একটি কণার রৈখিক বেগ নির্ণয় কর। N

ধরি রৈখিক বেগ, $= v$

আমরা পাই, $v = \omega r$

$= \dfrac{2\pi N}{t} r$

এখানে, $N = 250$ বার

$t = 20$ মিনিট 50 সেকেন্ড $= 1250$ s

$2\pi r \times N = s = 1\ \text{km} = 10^3\ \text{m}$

চাকার পরিধি $2\pi r = \dfrac{s}{N} = \dfrac{10^3\ \text{m}}{250} = 4\ \text{m}$ ও $v = \dfrac{2\pi r \times N}{t} = \dfrac{10^3\ \text{m}}{1250\ \text{s}}$

$= 0{\cdot}8\ \text{ms}^{-1}$

P.V

১২। একটি কণা 1·5 m বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 120 বার আবর্তন করে। এর (ক) রৈখিক বেগ, (খ) পর্যায়কাল এবং (গ) কৌণিক বেগ কত ? [রা. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

রৈখিক বেগ, $v = \omega r$

$v = 2\pi n r$

$= 2 \times 3143 \times 2 \times 1{\cdot}5$

$= 18{\cdot}858\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 1{\cdot}5$ m

আবর্তন বা কম্পন সংখ্যা, $n = \dfrac{120}{1\ \text{min}} = \dfrac{120}{60\ \text{s}}$

$= 2\text{s}^{-1} = 2\ \text{Hz}$

(খ) পর্যায়কাল, $T = \dfrac{t}{N} = \dfrac{60}{120} = 0{\cdot}5\text{s}$

(গ) কৌণিক বেগ, $\omega = 2\pi n = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2 \times 3{\cdot}142}{0{\cdot}5} = 12{\cdot}568\ \text{rads}^{-1}$।

১৩। পৃথিবীর চারদিকে চাঁদের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ $3{\cdot}85 \times 10^5$ km। কক্ষপথ একবার প্রদক্ষিণ করতে সময় লাগে 27·3 দিন। চাঁদের কৌণিক দ্রুতি বের কর। [রা. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

কৌণিক দ্রুতি, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

বা, $\omega = \dfrac{2 \times 3{\cdot}143\ \text{rad s}^{-1}}{27{\cdot}3 \times 24 \times 36 \times 10^2} = \dfrac{2 \times 3{\cdot}143 \times 10^{-6}}{2{\cdot}73 \times 2{\cdot}4 \times 0{\cdot}36}$

$= 2{\cdot}665 \times 10^{-6}\ \text{rad s}^{-1}$

এখানে,

পর্যায়কাল, $T = 27{\cdot}3$ দিন

$= 27{\cdot}3 \times 24 \times 60 \times 60$ s

১৪। একটি গ্রামোফোন রেকর্ড সম-কৌণিক বেগে ঘুরছে। রেকর্ডের উপর কেন্দ্র হতে 0·12 ও 0·18 m দূরের বিন্দুতে রৈখিক বেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $v = \omega r$ (1)

ধরি, ঐ দুই বিন্দুতে বেগ যথাক্রমে v_1 ও v_2

তা হলে, সমীকরণ (1) অনুসারে, $\dfrac{v_1}{r_1} = \dfrac{v_2}{r_2}$

অথবা, $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{0{\cdot}12}{0{\cdot}18} = 2 \quad 3$

এখানে,

$r_1 = 0{\cdot}12$ m

$r_2 = 0{\cdot}18$ m

১৫। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 96 m এবং আদিবেগ 66 ms⁻¹। নিক্ষেপ কোণ কত ? [কু. বো. ২০০৩ ; চ. বো. ২০০০]

আমরা জানি, $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

$\Rightarrow \sin 2\theta_0 = \dfrac{R \times g}{v_0^2}$

$\Rightarrow \sin 2\theta_0 = \dfrac{96 \times 9{\cdot}8}{(66)^2}$

$\Rightarrow \sin 2\theta_0 = {\cdot}2159779$

$\Rightarrow 2\theta_0 = 12{\cdot}473$

$= \theta_0 = 6{\cdot}24°$ (প্রায়)

দেয়া আছে,

$R = 96$ m

$v_0 = 66\ \text{ms}^{-1}$

$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

$\theta_0 = ?$

১৬। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 79·53 m এবং বিচরণকাল 5·3 sec। নিক্ষেপণ বেগ ও নিক্ষেপণ কোণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$T = \dfrac{2v_0 \sin \theta_0}{g}$ (1)

$R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$ (2)

এখানে, $R = 79{\cdot}53$ m

$T = 5.3$ sec

$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-1}$

সমীকরণ (1) ও (2) থেকে পাই, $\frac{T}{R} = \frac{\frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}}{\frac{v_0^2\, 2\sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}}$

$$\frac{5.3}{79.53} = \frac{1}{v_0 \cos\theta_0}$$

বা, $v_0 \cos\theta_0 = 15.006$ (3)

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $T = \frac{2\,v_0 \sin\theta_0}{9.8}$

$v_0 \sin\theta_0 = \frac{9.8}{2} \times 5.3 = 25.97$ (4)

সমীকরণ (3) ও (4) থেকে পাই,

$\tan\theta_0 = \frac{25.97}{15.006} = 1.7306$

$\therefore\ \theta_0 = 60°$

সমীকরণ (3)-এ θ_0-এর মান বসিয়ে পাই, $v_0 \cos 60° = 15.006$

$v_0 \times 0.5 = 15.006$

$v_0 = \frac{15.006}{0.5} = 30\ \text{ms}^{-1}$

১৭। একটি বস্তুকে 40 ms⁻¹ বেগে অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে নিক্ষেপ করা হল। সর্বাধিক উচ্চতা এবং অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০২; সি. বো. ২০০১]

সর্বাধিক উচ্চতা,

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$H = \frac{(40)^2 \times \sin^2 60°}{2 \times 9.8} = 61.22\ \text{m}$$

এখানে,
$v_0 = 40\ \text{ms}^{-1}$
$\theta = 60°$
$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$

$$= \frac{(40)^2 \times \sin(2 \times 60°)}{9.8} = 141.39\ \text{m}$$

১৮। একটি প্রাসকে 10 ms⁻¹ বেগে নিক্ষেপ করা যায়। প্রাসটির সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৫]

মনে করি প্রাসটির সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা = R_{max}

আমরা পাই,

$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ (1)

এখানে,
$v_0 = 10\ \text{ms}^{-1}$
$g = 9.8\ \text{ms}^{-2}$

এখন সমীকরণ (1) হতে পাই, $R_{max} = \frac{10 \times 10}{9.8} = 10.204\ \text{m}$

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা = 10.204 m

১৯। হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে 5.2×10^{-11} m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার কক্ষপথে $2.20 \times 10^6\ \text{ms}^{-1}$ বেগে ঘুরছে। ইলেকট্রনের কেন্দ্রমুখী ত্বরণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি, অভিলম্ব ত্বরণ

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2.2 \times 10^6)^2}{5.2 \times 10^{-11}}$$

$$= \frac{2.2 \times 2.2 \times 10^{12} \times 10^{11}}{5.2} = 9.31 \times 10^{22}\ \text{ms}^{-2}$$

এখানে,
$v = 2.20 \times 10^6\ \text{ms}^{-1}$
$r = 5.2 \times 10^{-11}$ m
$a = ?$

২০। বৃত্তাকার পথে 72 kmh⁻¹ সমদ্রুতিতে চলমান কোন গাড়ির কেন্দ্রমুখী ত্বরণ 1 ms⁻² হলে বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত ? [ঢা. বো. ২০০২]

আমরা জানি, $a = \frac{v^2}{r}$

$$r = \frac{v^2}{a}$$

$$= \frac{(20\ \text{ms}^{-1})^2}{1\ \text{ms}^{-2}} = 400\ \text{m}$$

এখানে, দ্রুতি, $v = 72\ \text{kmh}^{-1}$

$$= \frac{72 \times 10^3}{60 \times 60}\ \text{ms}^{-1} = 20\ \text{ms}^{-1}$$

কেন্দ্রমুখী ত্বরণ, $a = 1\ \text{ms}^{-2}$
ব্যাসার্ধ, $r = ?$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন :

১। ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় অবস্থান ভেক্টর ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৪]

২। কৌণিক বেগের সংজ্ঞা ও এককসমূহ উল্লেখ কর। [চ. বো. ২০০৪]

৩। সমত্বরণবিশিষ্ট একটি গতির উদাহরণ দাও। [চ. বো. ২০০৩]

৪। নিম্নলিখিত রাশিগুলোর সংজ্ঞা দাও :

(i) প্রাস [রা. বো. ২০০২, ২০০০; ঢা. বো. ২০০০]
(ii) নিক্ষেপণ বেগ
(iii) নিক্ষেপণ কোণ
(iv) নিক্ষেপণ বিন্দু
(v) বিচরণ পথ
(vi) বিচরণ কাল।
(vii) পাল্লা
(viii) ব্যাসার্ধ ভেক্টর
(ix) কৌণিক সরণ [রা. বো. ২০০১]
(x) কৌণিক বেগ
(xi) পর্যায় কাল
(xii) কম্পাঙ্ক
(xiii) কৌণিক ত্বরণ [রা. বো. ২০০১]
(xiv) কেন্দ্রমুখী বল
(xv) কেন্দ্রমুখী ত্বরণ
(xvi) স্পর্শী ত্বরণ।

৫। দ্বিমাত্রিক ক্ষেত্রে সরণ ভেক্টর বলতে কি বুঝ ? [রা. বো. ২০০২]

৬। প্রাস গতির ক্ষেত্রে সর্বাধিক উচ্চতার সমীকরণটি লিখ। [য. বো. ২০০৪]

৭। প্রজেক্টাইল কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০০]

৮। একটি প্রাসের উড্ডয়ন কালের সমীকরণটি লিখ। [ঢা. বো. ২০০০]

৯। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের সংজ্ঞা দাও।

১০। অনুভূমিক পাল্লা কি ? এর রাশিমালা বের কর।

১১। সুষম বৃত্তাকার গতি কি ? [য. বো. ২০০৪]

১২। প্রাস কি ? [ব. বো. ২০০৪, ২০০২; কু. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০০; য. বো. ২০০১]

১৩। ঘূর্ণায়মান বস্তুর পর্যায়কাল ও কম্পাঙ্ক বলতে কি বুঝ ? এদের মধ্যে সম্পর্ক কি ?

১৪। প্রাসের গতিপথ কিরূপ ?

১৫। একটি বস্তু কত ডিগ্রি কোণে নিক্ষেপ করলে এর অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক হয় ? [রা. বো. ২০০২]

১৬। কৌণিক বেগ ও কৌণিক ত্বরণের একক ও মাত্রা লিখ।

১৭। প্রাস ও অনুভূমিক পাল্লা কাকে বলে ? [সি. বো. ২০০৫]

রচনামূলক প্রশ্ন :

১। সমতলে গতিশীল একটি বস্তুকণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$, বেগ $\vec{v}$ ও ত্বরণ $\vec{a}$-কে তাদের উপাংশের সাহায্যে প্রকাশ কর।

২। দ্বিমাত্রিক গতির ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, যেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [য. বো. ২০০৫]

৩। $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ সমীকরণটি প্রতিপাদন কর। এখানে চিহ্নগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ব. বো. ২০০৫]
অথবা, দেখাও যে, $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$, যেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ঢা. বো. ২০০৫]

৪। দেখাও যে, $t = 0$ সময়ের অবস্থান ভেক্টরের সাপেক্ষে যে কোন এক সময় t-এর অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এখানে, $\vec{v_0}$ = আদি বেগ ও $\vec{a}$ = সুষম ত্বরণ।
[চ. বো. ২০০৪, ২০০০; সি. বো. ২০০৪, ২০০০; রা. বো. ২০০৩, ২০০০; কু. বো. ২০০৩; য. বো. ২০০৩, ২০০০; ব. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০০]

৫। দেখাও যে, (i) $\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{v_0}\cdot\vec{v_0} + 2\vec{a}\cdot\vec{s}$ ।
(ii) $v^2 = v_0{}^2 + 2as$ বা, $v^2 = v_0{}^2 + 2\vec{a}\cdot(\vec{r} - \vec{r_0})$ [য. বো. ২০০৪]
(iii) $v_x{}^2 = v_{x0}{}^2 + 2a_x(x - x_0)$ [ঢা. বো. ২০০০]
এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।

৬। দেখাও যে একটি বস্তু তির্যকভাবে শূন্যে নিক্ষিপ্ত হলে তার দ্বিমাত্রিক গতিপথ অধিবৃত্ত হয়।
[রা. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০২ ; ব. বো. ২০০২; সি. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০১; য. বো. ২০০০]
অথবা; দেখাও যে প্রাসের গতিপথে অর্ধবৃত্ত অধিবৃত্তাকার। [চ. বো. ২০০৫; রা.বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০৩]

৭। দেখাও যে, প্রাসের সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা, $R = \frac{v_0^2}{g}$। v_0 আদি বেগসহ ভূমির সাথে θ_0 কোণে শূন্যে নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতির সমীকরণ প্রতিষ্ঠা কর।

৮। একটি প্রাসের সর্বোচ্চ অতিক্রান্ত দূরত্ব, সর্বোচ্চ উচ্চতায় উঠার সময় ও বিচরণ কালের জন্য রাশিমালা প্রতিপাদন কর।

৯। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লার রাশিমালা বের কর এবং দেখাও যে নিক্ষেপণ কোণ 45° হলে অনুভূমিক পাল্লা সর্বাধিক হবে। [ব. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০২]

১০। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের সংজ্ঞা দাও। তাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।
[ঢা. বো. ২০০২; ব. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০১]

১১। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যে পার্থক্য কর। [চ. বো. ২০০২]

১২। দেখাও যে, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ [রা. বো. ২০০৫, ২০০২; কু. বো. ২০০৫, ২০০১; ঢা. বো. ২০০১]

১৩। কৌণিক ত্বরণের সংজ্ঞা দাও। কৌণিক ত্বরণ ও রৈখিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিপাদন কর।

১৪। স্থির কৌণিক ত্বরণে ঘূর্ণায়মান একটি বস্তুকণার ক্ষেত্রে দেখাও যে,

(i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$ (ii) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^\circ$ (iii) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ (iv) $\theta_t = \omega_o + \frac{1}{2}\alpha(2t - 1)$

১৫। সুষম বৃত্তাকার গতি বলতে কি বুঝ ? দেখাও যে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে v_0 সম-দ্রুতিতে ঘূর্ণনরত বস্তুকণার অভিলম্ব ত্বরণ-এর মান $a = \frac{v^2}{r}$। এটি গতিপথের লম্ব দিকে ক্রিয়া করে। [কু. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০৩]

১৬। দেখাও যে, বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে আবর্তনরত বস্তুর ত্বরণ গতিপথের লম্ব দিকে ক্রিয়া করে।

১৭। সম-বৃত্তীয় গতির ক্ষেত্রে কেন্দ্রমুখী ত্বরণের মান ও দিক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৪ ; কু. বো.২০০১]

গাণিতিক সমস্যাবলি :

১। সরণ $\vec{r} = 4x^2t^3\hat{i} + 2y^2t^2\hat{j}$ হলে ব্যবকলনের সাহায্যে বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।
[উঃ $12x^2t^2\hat{i} + 4y^2t\hat{j}$; $24x^2t\hat{i} + 4y^2\hat{j}$]

২। একটি বস্তু কণাকে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 50 ms^{-1} বেগে উপর দিকে নিক্ষেপ করা হল। বস্তুটি সর্বাধিক কত উচ্চতা অতিক্রম করবে এবং ঐ উচ্চতা অতিক্রম করতে কত সময় লাগবে ? (g = 10N/kg) [উঃ 31·25 m, 2·5 s]

* ৩। একটি ফুটবলকে ভূমির সাথে 30° কোণে 30 ms^{-1} বেগে কিক করা হল। 1 sec পরে ফুটবলের বেগের মান কত হবে? [চ. বো. ২০০২] [উঃ 26·495 ms^{-1}]

৪। একটি দালানের ছাদ হতে একটি পাথর অনুভূমিকভাবে 40 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করা হল। 5 s পরে এর বেগ কত ?
[উঃ 63·25 ms^{-1}]

৫। একটি প্রাস অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 40 ms^{-1} বেগের উপর দিকে নিক্ষিপ্ত হলে তার বিচরণকাল নির্ণয় কর। (g = 10 N/kg) [উঃ 4 s]

৬। একটি বস্তুকণাকে অনুভূমিকের সাথে 15° কোণে 30 ms^{-1} বেগে নিক্ষেপ করা হল। g-এর মান 10 N/kg হলে অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [উঃ 77·96 m]

৭। একটি বস্তু 50 ms^{-1} বেগে উপর দিকে নিক্ষিপ্ত হল। যদি অভিকর্ষজ ত্বরণ 10 N/kg হয়, তবে সর্বাধিক অনুভূমিক পাল্লা নির্ণয় কর। [উঃ 250 m]

৮। অনুভূমিকের সাথে 60° কোণ করে ভূ-পৃষ্ঠ হতে 60 ms^{-1} বেগে একটি বুলেট ছোঁড়া হল। বুলেটটি 50 m দূরে একটি দালানকে কত উচ্চতায় আঘাত করবে ? [উঃ 73 m]

৯। একটি কণা প্রতি মিনিটে বৃত্তাকার পথে 10 বার আবর্তন করে। কণাটির কৌণিক বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 1·047 rad s^{-1}]

১০। একটি বস্তু কণা প্রতি মিনিটে 300 বার আবর্তন করে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 0·4 m হলে, এর রৈখিক বেগ কত ?
[উঃ 12·56 ms^{-1}]

১১। বৃত্তাকার পথে 3·14 ms^{-1} সমদ্রুতিতে একটি কণা প্রতি সেকেন্ডে 10টি পূর্ণ আবর্তন সম্পন্ন করে। বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ কত ? [রা. বো. ২০০১] [উঃ 0·05 m]

১২। একটি প্রাসের অনুভূমিক পাল্লা 40m এবং আদি বেগ 33 ms^{-1}। নিক্ষেপ কোণ কত ? [উঃ 12·8°]

১৩। 30 m উঁচু দালানের উপর হতে একটি পাথর নিচে গড়িয়ে পড়ল। পাথরটি দালানের কিনারা হতে 10 m দূরে ভূমি স্পর্শ করল। গড়িয়ে পড়ার মুহূর্তে পাথরটির বেগ ও ভূমিতে পড়তে সময় নির্ণয় কর। [উঃ 4·05 ms^{-1} ; 2·47 s]

১৪। একটি গ্রামোফোন রেকর্ড সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। রেকর্ডের কেন্দ্র হতে 0·25 m এবং 0·30 m দূরের বিন্দুতে রৈখিক বেগের অনুপাত নির্ণয় কর। [উঃ 5 : 6]

১৫। একটি গ্রামোফোন রেকর্ড প্রতি মিনিটে 78 বার ঘুরছে। সুইচ বন্ধ করে একে 30s-এ থামান হল। কৌণিক মন্দন বের কর। [উঃ 0·272 rad s^{-2}]

১৬। একটি বস্তু সমদ্রুতিতে বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 600 বার ঘুরে। বস্তুটির পর্যায়কাল ও কৌণিক বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 0·1 s, 62·8 rad s^{-1}]

১৭। একটি দেয়াল ঘড়ির মিনিটের কাঁটার দৈর্ঘ্য 0·18 m হলে এর প্রান্তের রৈখিক বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 3·14 × 10^{-4} ms^{-1}]

১৮। একটি হাত ঘড়ির সেকেন্ড, মিনিট ও ঘণ্টার কাঁটার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 0·015 m, 0·0125 m এবং 0·01 m হলে প্রত্যেকের শেষ প্রান্তের রৈখিক বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 15·7 × 10^{-4}, 2·18 × 10^{-5}, এবং 1·45 × 10^{-6} ms^{-1}]

১৯। একটি মিনারের শীর্ষদেশ হতে 200 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত একটি গুলি 5s পরে ভূমিতে পতিত হল। মিনারের উচ্চতা এবং গুলির অনুভূমিক অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [উঃ 122·5 m, 1000 m]

২০। স্থিরাবস্থা হতে একটি কণাকে 3·14 rads^{-2} সম কৌণিক ত্বরণে বৃত্তাকার পথে ঘুরালে 20 সেকেন্ডে কণাটি কত কৌণিক বেগ লাভ করবে ? ঐ সময়ে কণাটি কতবার ঘুরবে ? [উত্তর : 62·8 rads^{-1}, 100 বার]

২১। 8m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথে একটি গাড়ি ঘণ্টায় 50 km বেগে চলছে। গাড়িটির কৌণিক বেগ নির্ণয় কর। [উত্তর : 1·74 rads^{-1}]

২২। পৃথিবী হতে চন্দ্রের দূরত্ব 3·84 × 10^5 km এবং এটি পৃথিবীকে বৃত্তাকার কক্ষপথে 27·3 দিনে একবার প্রদক্ষিণ করে। চন্দ্রের রৈখিক দ্রুতি নির্ণয় কর। [উত্তর : 1·022 kms^{-1}]

২৩। একটি কৃত্রিম উপগ্রহ 7000 km ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তাকার কক্ষপথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে। উপগ্রহটির পর্যায়কাল 2hr হলে কেন্দ্রমুখী ত্বরণ কত ? [উত্তর : ~~5·325 ms^{-2}~~]

২৪। একটি কৃত্রিম উপগ্রহ ভূ-পৃষ্ঠ হতে 500 km উচ্চতায় বৃত্তাকার পথে পরিভ্রমণ করছে। 100 min সময়ে উপগ্রহটি পৃথিবীকে একবার প্রদক্ষিণ করলে এর কৌণিক ও রৈখিক বেগ নির্ণয় কর। [উত্তর : 1·047 × 10^{-3} rads^{-1} ; 6·806 kms^{-1}]

৪
গতিসূত্র
LAWS OF MOTION

৪.১ সূচনা
Introduction

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলোতে সমবেগে ও সমত্বরণে বস্তুর গতির বিভিন্ন দিক সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে ; কিন্তু কিভাবে স্থির বস্তু গতিশীল হয় অথবা সমবেগে গতিশীল বস্তুর মধ্যে ত্বরণ সৃষ্টি হয় তা আলোচনা করা হয়নি। বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Isaac Newton) তাঁর "ফিলোসোফিয়া ন্যাচারালিস ম্যাথমেটিকা" নামক অমর গ্রন্থে বস্তুর গতি, বেগ ও ভরের মধ্যে নিবিড় সম্পর্কযুক্ত তিনটি সূত্র প্রকাশ করেন। তার নাম অনুসারে সূত্রগুলোকে নিউটনের গতিসূত্র বলে। এ সূত্রগুলোর সাহায্যে গতিবিদ্যা সুদৃঢ় বৈজ্ঞানিক ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত হয়েছে। এ অধ্যায়ে সূত্রগুলোর বর্ণনা ও ব্যাখ্যা প্রদান করা হবে এবং বল ও ভরের সাথে গতির সম্পর্ক আলোচনা করা হবে। এ ছাড়া ঘর্ষণ ও ঘর্ষণের প্রকারভেদ আলোচনা করা হবে। সূত্রগুলো বর্ণনার আগে জড়তা, বল, ভরবেগ ইত্যাদি সম্বন্ধে প্রাথমিক ধারণা প্রদান করব।

৪.২ জড়তা বা জাড্য ও বল
Inertia and Force

জড়তা : আমরা জানি কোন বস্তু নিজে নিজে তার স্থির বা গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন করার ক্ষমতা রাখে না। কোন একটি বাহ্যিক ক্রিয়া অর্থাৎ বলের প্রভাবে বস্তুর স্থির বা গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন ঘটে বা ঘটতে প্রয়াস পায়। উপরের ব্যাখ্যা থেকে জড়তার নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সংজ্ঞা : প্রত্যেক জড় পদার্থই তার নিজের স্থির বা গতিশীল অবস্থা অক্ষুণ্ন রাখার চেষ্টা করে। পদার্থের এই ধর্মকে জড়তা বলে। যেমন টেবিলের উপর একখানা বই স্থিতিশীল অবস্থায় রয়েছে। এটি আবহমান কাল স্থির থাকবে। আবার চলন্ত একটি ফুটবল সব সময় চলতেই চাইবে। **জড়তা বস্তুর একটি মৌলিক ধর্ম।**

জড়তা দুই প্রকার, যথা—

(১) **স্থিতি জড়তা** (Inertia of rest) এবং

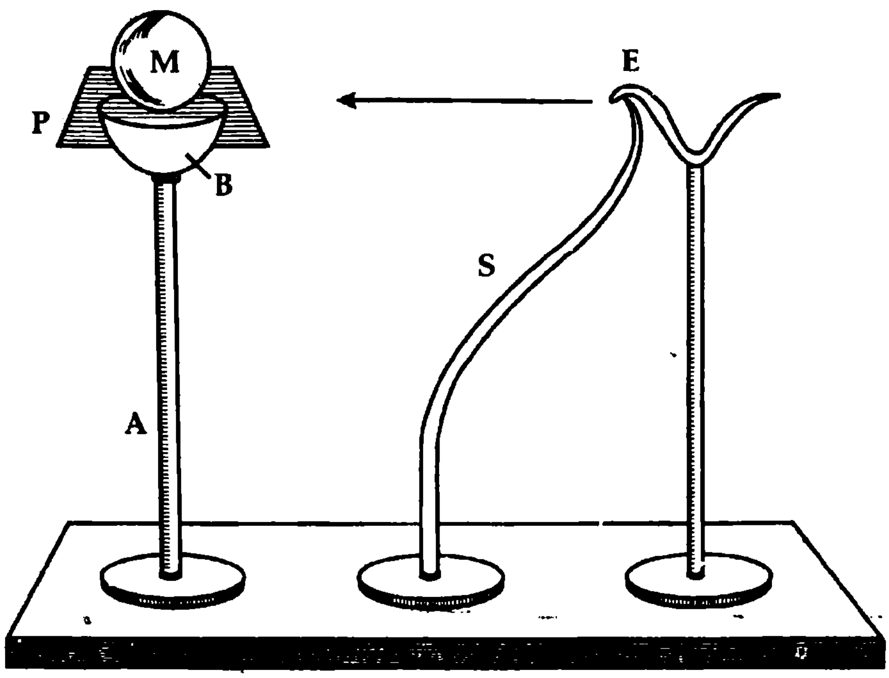
(২) **গতি জড়তা** (Inertia of motion)

(১) **স্থিতি জড়তা :** স্থির বস্তু সব সময় স্থির থাকতেই চায়। এর নাম স্থিতি জড়তা। স্থিতি জড়তা বস্তুর ভরের সমানুপাতিক। ভর বৃদ্ধি পেলে স্থিতি জড়তা বৃদ্ধি পায়।

স্থিতি জড়তার কয়েকটি দৃষ্টান্ত :

(i) **মুদ্রা ও কাপের পরীক্ষা :** ৪.১ চিত্রে A একটি দণ্ড, S একটি স্প্রিং এবং E একটি আংটা। A দণ্ডের মাথায় B একটি কাপ বা বাটি স্থাপন করা হয়েছে। বাটির উপর একটি কার্ড বোর্ড P রাখি। কার্ড বোর্ডের উপর একটি ভারী মার্বেল স্থাপন করি। স্প্রিং-এর মাথা ও কার্ড বোর্ড একই সমতলে থাকে। S স্প্রিং E আংটায় আটকিয়ে রাখি। এখন আংটা সরিয়ে নিলে স্প্রিং কার্ড বোর্ডে জোরে আঘাত করবে। ফলে কার্ড বোর্ড দ্রুত সরে যাবে এবং M মার্বেলটি তার স্থিতি জড়তার দরুন বাটির মধ্যে পড়বে।

(ii) হঠাৎ গাড়ি চলতে শুরু করলে আরোহীর শরীরের নিচের ভাগ গাড়ির গতিপ্রাপ্ত হয় এবং গাড়ির সাথে এগিয়ে চলে। কিন্তু শরীরের উপরের ভাগ স্থিতি জড়তার জন্যে স্থির থাকে। ফলে আরোহী পেছনের দিকে হেলে পড়ে।



চিত্র ৪.১

(iii) ধূলিময় পোশাক ছড়ি দিয়ে আঘাত করলে পোশাক সরে যায়। কিন্তু ধূলিকণা স্থিতি জড়তার জন্যে নিচে পড়ে যায়।

(iv) ক্যারাম বোর্ডের একটি গুটির উপর আর একটি গুটি থাকলে নিচের গুটিকে স্ট্রাইকার দিয়ে জোরে আঘাত করলে নিচের গুটিটি সরে যায়। কিন্তু উপরের গুটিটি স্থিতি জড়তার জন্যে স্থির থাকে। নিচের গুটিটি সরে যাবার কারণে উপরের গুটিটি সেই স্থান অধিকার করে।

(v) ঘোড়া হঠাৎ দৌড়াতে শুরু করলে আরোহীর শরীরের নিচের অংশ ঘোড়ার পিঠের সাথে যুক্ত থাকায় গতিপ্রাপ্ত হয় এবং এগিয়ে চলে। কিন্তু শরীরের ওপরের অংশ স্থিতি জড়তার জন্যে স্থির থাকে। ফলে আরোহী পেছনের দিকে হেলে পড়ে।

(২) গতি জড়তা ঃ গতিশীল বস্তু যে ধর্মের দরুন একই সরলরেখায় গতিশীল থাকতে চায় তাকে গতিজড়তা বলে।

গতি জড়তার কয়েকটি দৃষ্টান্ত ঃ

(i) চলন্ত গাড়ি হঠাৎ থেমে গেলে আরোহীর শরীরের নিম্নভাগ স্থিতিতে আসে। কিন্তু শরীরের উপরিভাগ গতি জড়তার জন্যে সামনের দিকে এগিয়ে যায়। ফলে আরোহী সামনের দিকে ঝুঁকে পড়ে। অভিজ্ঞ আরোহী এই গতি সামলাবার জন্যে পেছনের দিকে হেলে চলন্ত গাড়ি হতে নেমে থাকে।

(ii) চলন্ত গাড়ির কামরায় কোন আরোহী একটি রবারের বল সোজা উপরের দিকে ছুড়লে তা গতি জড়তার জন্যে গাড়ির সাথে সাথে চলতে থাকে এবং কিছুক্ষণ পর আরোহীর হাতে ফিরে আসে। আরোহী ও বল উভয়েই গাড়ির গতি পায়। সুতরাং আরোহী ও বল একই দূরত্বে এগিয়ে যায় এবং বলটি আরোহীর হাতে ফিরে আসে।

(iii) যখন সার্কাসে ধাবমান ঘোড়ার পিঠ হতে খেলোয়াড় উপর দিকে লাফ দেয় তখন সে গতি জড়তার দরুন পুনরায় ঘোড়ার পিঠে ফিরে আসে।

(iv) আমরা ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় লাফ দিবার আগে কিছুদূর পেছন হতে দৌড়ে শরীরকে গতি জড়তার প্রভাবে রেখে বেশি অগ্রসর হবার চেষ্টা করি।

বল (Force) : মনে করি টেবিলের উপর একটি বই আছে। বইটিকে নড়াবার জন্য হাত দিয়ে বইটির উপর **'কোন কিছু'** (Something) প্রয়োগ করি। একটি ফুটবল গোলরক্ষকের দিকে ছুটে আসছে। গোলরক্ষক হাত দিয়ে ফুটবলের উপর **'কোন কিছু'** প্রয়োগ করে ফুটবলকে থামিয়ে দিল। বইটিকে গতিশীল বা ফুটবলটি থামাবার জন্য এই যে **'কোন কিছু'** প্রয়োগ করা হয় এর নাম বল (Force)।

আবার কোন ব্যক্তি আঙ্গুল দিয়ে **'কোন কিছু'** প্রয়োগ করে একটি ভারী টেবিলকে নড়াতে চাইল। কিন্তু সক্ষম হল না। এই 'কোন কিছু' এর নামও বল। উপরের উদাহরণগুলো হতে বলের নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা : যে ব্যাহিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে। বল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক আছে।

৪.৩ বলের প্রকারভেদ
Kinds of forces

প্রকৃতিতে আমরা বিভিন্ন ধরনের বলের সঙ্গে পরিচিত হলেও এবং এদের বিভিন্ন নামকরণ থাকলেও সব বল কিন্তু মৌলিক বল নয়। **যে সকল বল মূল বা অকৃত্রিম অর্থাৎ অন্য কোন বল থেকে উৎপন্ন হয় না বরং অন্যান্য বল এ সকল বলের প্রকাশ তাকে মৌলিক বল বলে।**

মৌলিকতা অনুসারে প্রকৃতিতে চার ধরনের বল আছে। অন্য যে কোন ধরনের বলকে এই চারটি বলের যে কোন একটি বা একাধিক বল দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায়। মৌলিক বলগুলো হল :

১। মহাকর্ষ বল (Gravitational force)
২। তড়িৎ-চুম্বকীয় বল (Electromagnetic force)
৩। সবল নিউক্লীয় বল (Strong nuclear force)
৪। দুর্বল নিউক্লীয় বল (Weak nuclear force)

১। **মহাকর্ষ বল :** মহাবিশ্বের যে কোন দুটি বস্তুর মধ্যে এক ধরনের আকর্ষণ বল ক্রিয়াশীল রয়েছে। এই আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বল বলা হয়। এই বলের পরিমাণ ক্রিয়াশীল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক এবং বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। বিজ্ঞানীরা ধারণা করেন যে বস্তুদ্বয়ের মধ্যে এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই মহাকর্ষ বল ক্রিয়াশীল হয়। এই ধরনের কণার নামকরণ করা হয়েছে গ্রাভিটন (Graviton)।

২। **তড়িৎ-চুম্বকীয় বল :** দুটি আহিত বা চার্জিত বস্তুর মধ্যে এবং দুটি চুম্বক পদার্থের মধ্যে এক ধরনের বল ক্রিয়াশীল থাকে। এদেরকে যথাক্রমে কুলম্বের তড়িৎ এবং চৌম্বক বল বলা হয়। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল আকর্ষণ এবং বিকর্ষণ উভয় ধরনের হতে পারে। তড়িৎ এবং চৌম্বক বল পরস্পর ঘনিষ্ঠভাবে সম্পর্কিত। বস্তুত আপেক্ষিক গতিতে পরিভ্রমণরত দুটি আহিত কণার মধ্যে ক্রিয়াশীল বলই হচ্ছে তড়িৎ-চুম্বকীয় বল। যখন তড়িৎ আধান বা চার্জগুলো গতিশীল হয়, তখন তারা চৌম্বক ক্ষেত্র সৃষ্টি করে। আবার পরিবর্তী (varying) চৌম্বক ক্ষেত্র তড়িৎ ক্ষেত্রের উৎস হিসেবে কাজ করে।

স্থিতিস্থাপক বল, আণবিক গঠন, রাসায়নিক বিক্রিয়া ইত্যাদিতে তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের প্রকাশ ঘটে।

৩। **সবল নিউক্লীয় বল :** একটি পরমাণুর নিউক্লিয়াস প্রোটন ও নিউট্রন দ্বারা গঠিত। এদেরকে সমষ্টিগতভাবে বলা হয় নিউক্লিয়ন (Nucleon)। নিউক্লিয়াসের মধ্যে সমধর্মী ধনাত্মক আধানযুক্ত প্রোটনগুলো খুব কাছাকাছি থাকায় এদের মধ্যে কুলম্বের বিকর্ষণ বল প্রবল হওয়া উচিত এবং নিউক্লিয়াস ভেঙ্গে যাওয়ার কথা। কিন্তু বাস্তবে অনেক নিউক্লিয়াসই স্থায়ী। নিউক্লিয়নের মধ্যে যে মাধ্যাকর্ষণ বল কাজ করে তা এত নগণ্য যে এই বল কুলম্বের বিকর্ষণ বলকে প্রতিমিত (balance) করতে পারে না। সুতরাং নিউক্লিয়াসে অবশ্যই অন্য এক ধরনের সবল বল কাজ করে যা নিউক্লিয়াসকে ধরে রাখে। এই বলকে বলা হয় **সবল নিউক্লীয় বল।** বিজ্ঞানীদের ধারণা যে

নিউক্লিয়নের মধ্যে মেসন (Meson) নামে এক প্রকার কণার পারস্পরিক বিনিময়ের দ্বারা এই বল ক্রিয়াশীল হয়। এই বল আকর্ষণধর্মী এবং নিউক্লিয়াসের বাইরে ক্রিয়াশীল নয় ; অর্থাৎ স্বল্প পরিসরে (short range) এই বল ক্রিয়াশীল।

৪। **দুর্বল নিউক্লীয় বল :** প্রকৃতিতে বেশ কিছু মৌলিক পদার্থ (elements) রয়েছে যাদের নিউক্লিয়াস স্বতঃস্ফূর্তভাবে ভেঙ্গে যায় (যেমন ইউরেনিয়াম, থোরিয়াম ইত্যাদি)। এই সমস্ত নিউক্লিয়াসকে বলা হয় তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস। তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে তিন ধরনের রশ্মি বা কণা নির্গত হয় যাদেরকে আলফা রশ্মি (α-rays), বিটা রশ্মি (β-rays) এবং গামা রশ্মি (γ-rays) বলা হয়।

তেজস্ক্রিয় নিউক্লিয়াস থেকে যখন বিটা কণা নির্গত হয় তখন একই সঙ্গে শক্তিও নির্গত হয়। কিন্তু পরীক্ষালব্ধ ফলাফল থেকে দেখা যায় যে, নিউক্লিয়াস থেকে যে পরিমাণ শক্তি নির্গত হয় তা বিটা কণার গতিশক্তির চেয়ে বেশি। স্বাভাবিকভাবেই বিজ্ঞানীদের মাঝে প্রশ্ন ওঠে যে β-কণা যদি শক্তির সামান্য অংশ বহন করে, তবে অবশিষ্ট শক্তি যায় কোথায় ? 1930 সালে ডব্লিউ. পৌউলি (W. Pauli) প্রস্তাব করেন সে অবশিষ্ট শক্তি অন্য এক ধরনের কণা বহন করে যা β-কণার সঙ্গেই নির্গত হয়। এই কণাকে বলা হয় নিউট্রিনো (neutrino)। এই β-কণা এবং নিউট্রিনো কণার নির্গমন চতুর্থ একটি মৌলিক বলের কারণে ঘটে যাকে বলা হয় **দুর্বল নিউক্লীয় বল**। এই বল সবল নিউক্লীয় বা তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের তুলনায় খুবই দুর্বল। এই বলের কারণে অনেক নিউক্লিয়াসের ভাঙ্গন প্রক্রিয়া সংঘটিত হয়।

মৌলিক বলসমূহের তীব্রতার তুলনা :

চারটি মৌলিক বলের পরিমাপের আপেক্ষিক সবলতা তুলনা করলে দেখা যায় যে সবচেয়ে শক্তিশালী বল হচ্ছে সবল নিউক্লীয় বল এবং সবচেয়ে দুর্বল হল মহাকর্ষ বল।

সবল এবং দুর্বল উভয় ধরনের নিউক্লীয় বলের ক্রিয়ার পাল্লা (range) খুবই স্বল্প পাল্লাবিশিষ্ট (short range)। এগুলো নিউক্লিয়াসের পৃষ্ঠের বাইরে ক্রিয়াশীল হয় না। পক্ষান্তরে মহাকর্ষ এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের পাল্লা প্রায় অসীম।

চারটি মৌলিক বলের আপেক্ষিক সবলতা সম্বন্ধে ধারণা লাভের জন্য যদি সবল নিউক্লীয় বলের মান 1 ধরা হয়, তবে দুর্বল নিউক্লীয় বল, তড়িৎ-চুম্বকীয় বল এবং মহাকর্ষ বলের আপেক্ষিক সবলতার মান হবে যথাক্রমে 10^{-12}, 10^{-2} ও 10^{-39}।

বলের একীভূতকরণ (Unification of Forces) :

নিউক্লীয় : দুর্বল নিউক্লীয় : তড়িৎ চুম্বকীয় : মহাক
= 1 : 10^{-12} : 10^{-2} : 10^{-39}

চারটি মৌলিক বলের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য বিজ্ঞানীরা বহু বছর ধরে চেষ্টা চালিয়ে যাচ্ছেন। পূর্বে তড়িৎ বল এবং চৌম্বক বলকে স্বতন্ত্র মৌলিক বল হিসেবে বিবেচনা করা হত। উনিশ শতকের অনেক বৈজ্ঞানিক পরীক্ষায় প্রাপ্ত ফলাফল পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে তড়িৎ বল এবং চৌম্বক বলের মধ্যে একটা সম্পর্ক থাকা স্বাভাবিক। জেম্‌স ক্লার্ক ম্যাক্সওয়েল (J. C. Maxwell) কর্তৃক আবিষ্কৃত তড়িৎ-চুম্বকীয় তত্ত্বের মাধ্যমে এই দুই বলের মধ্যে সম্পর্ক চূড়ান্তভাবে প্রতিষ্ঠিত হয়।

সালাম, ওয়াইনবার্গ এবং গ্লাসো অনেক গবেষণার মাধ্যমে বলের একীভূতকরণ তত্ত্বের অপরিসীম উন্নতি সাধন করেছেন। তাদের সম্মিলিত প্রচেষ্টায় দুর্বল নিউক্লীয় বল এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের মধ্যে মাত্র কয়েক বছর আগে সম্পর্ক স্থাপিত হয়েছে।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে অতীতের তড়িৎ বল এবং চৌম্বক বল একীভূত হয়ে রূপ নিয়েছে তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের এবং হালে দুর্বল নিউক্লীয় বল এবং তড়িৎ-চুম্বকীয় বলের একীভূত তত্ত্ব আবিষ্কৃত হয়েছে। বিজ্ঞানীদের ঐকান্তিক প্রচেষ্টার ফলে হয়ত একদিন সকল মৌলিক বলের সমন্বয়ে মহা একীভূত ক্ষেত্রতত্ত্ব (Grand unified field theory) আবিষ্কৃত হবে। তা হলে বিশ্বব্রহ্মাণ্ডের সৃষ্টি রহস্যের অনেক অজানা তথ্য আবিষ্কৃত হবে।

৪.৪ ভরবেগ
Momentum

ভরবেগের দুটি সংজ্ঞা দেয়া যায়, একটি ভাষাগত, অপরটি গাণিতিক। সংজ্ঞা দুটি নিম্নে বিবৃত হল :

ভাষাগত সংজ্ঞা : ভর ও বেগের সমন্বয়ে বস্তুতে যে ধর্মের উদ্ভব হয় তাকে বস্তুর ভরবেগ বলে। একে p দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একটি গতিশীল বস্তুর ভর এবং বেগের গুণফল দিয়ে ভরবেগ পরিমাপ করা হয়। বস্তুর ভর 'm' এবং বেগ 'v' হলে ভরবেগ,

p = ভর × বেগ = mv

এর অভিমুখ বেগের অভিমুখ। এটি একটি ভেক্টর বা দিক রাশি।

ভরবেগের ভেক্টর রূপ

ভরবেগ, $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

গাণিতিক সংজ্ঞা : কোন একটি বস্তুর ভর ও বেগের গুণফলকে তার ভরবেগ বলে। গতি জড়তা বস্তুর ভরবেগের সমানুপাতিক।

ভরবেগের একক (Unit of momentum)

ভরবেগ পরিমাপ করা যায়। অতএব এটি একটি রাশি। সুতরাং এর একক রয়েছে।

এম. কে. এস. (M. K. S.) ও এস. আই. পদ্ধতিতে ভরবেগের একক কিলোগ্রাম-মিটার/সেকেন্ড।

ভরবেগের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of momentum)

ভরবেগের সংজ্ঞা হতে এর মাত্রা সমীকরণ বের করা যায়। অতএব ভরবেগের মাত্রা সমীকরণ হল

[ভরবেগ] = [ভর] × [বেগ] = [M] × $\left[\frac{L}{T}\right]$ = $\boxed{[MLT^{-1}]}$

৪.৫ নিউটনের গতিসূত্র
Newton's laws of motion

800% V.V.I

বিজ্ঞানী নিউটন বস্তুর ভর, বল ও গতির মধ্যে তিনটি সূত্র প্রদান করেন। সূত্রগুলো নিম্নে বিবৃত ও ব্যাখ্যা করা হল।

৪.৫.১ নিউটনের প্রথম সূত্র
Newton's first law

বাইরে থেকে কোন বল বস্তুর উপর প্রযুক্ত না হলে অর্থাৎ বস্তুর উপর বলের লব্ধি শূন্য হলে স্থির বস্তু স্থির থাকে এবং গতিশীল বস্তু সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকে। এই সূত্রকে জড়তা এবং বলের সংজ্ঞা নির্দেশক সূত্র বলা হয়।

কাজেই বল $\vec{F} = 0$ হলে, শেষ বেগ, $\vec{v}$ = আদি বেগ, $\vec{v_0}$

প্রথম সূত্রের ব্যাখ্যা :

নিউটনের গতিসূত্রের প্রথম সূত্রটি একদিকে বস্তুর একটি মৌলিক বৈশিষ্ট্য আলোচনা করে। এই মৌলিক বৈশিষ্ট্যের নাম **জড়তা**। সূত্রটি অপর দিকে বলের সংজ্ঞা ও কার্য আলোচনা করে। এক কথায় প্রথম সূত্র হতে দুটি বিষয় জানা যায়—একটি জড়তা, অপরটি বলের সংজ্ঞা।

কোন বস্তুই নিজ হতে তার স্থির বা গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন ঘটাতে পারে না। যে যেমন রয়েছে, তেমনি থাকতে চায়। বস্তুর এই ধর্মকে জড়তা বলে। এজন্যে প্রথম সূত্রকে জড়তা সূত্র বলা হয়। জড়তা দুই প্রকার; যথা : (ক) **স্থিতি জড়তা** এবং (খ) **গতি জড়তা**

স্থির বস্তু সব সময় স্থির থাকতে চায়। এর নাম স্থিতি জড়তা। আর গতিশীল বস্তু সর্বদাই সমবেগে একই সরলরেখায় চলতে চায়। এর নাম গতি জড়তা।

কাজেই স্থির বস্তু যে ধর্মের দরুন স্থির অবস্থায় থাকতে চায় তাকে স্থিতি জড়তা এবং গতিশীল বস্তু যে ধর্মের দরুন সমবেগে একই সরলরেখায় গতিশীল থাকতে চায় তাকে গতি জড়তা বলে।

প্রথম সূত্রের দ্বিতীয় অংশ অনুসারে বস্তুর স্থির অবস্থা অথবা সমবেগ অবস্থার পরিবর্তন একমাত্র বাহ্যিক বল প্রয়োগেই সম্ভব। কাজেই এই অংশ হতে বলের আর একটি সংজ্ঞা পাওয়া যায়। **যা বস্তুর স্থির অথবা সমবেগ অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে প্রয়াস পায়, তাই বল।**

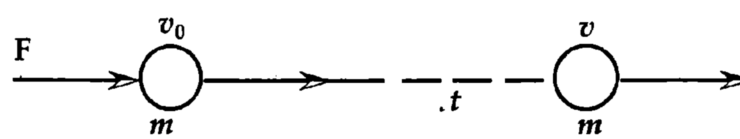
৪.৫.২ নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র
Newton's second law

কোন একটি বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত (লব্ধি) বলের সমানুপাতিক এবং বল যে দিকে প্রযুক্ত হয় ভরবেগের পরিবর্তন সেদিকে ঘটে। এই সূত্রকে বল পরিমাপের ও প্রকৃতি নির্দেশের সূত্র বলা যায়।

দ্বিতীয় সূত্রের ব্যাখ্যা :

এই সূত্রের সাহায্যে **বলের অভিমুখ, পরিমাপ, গুণগত বৈশিষ্ট্য, ত্বরণের সঙ্গে বলের সম্পর্ক, একক বল, বলের একক ও বলের নিরপেক্ষ নীতি** সম্বন্ধে জানতে পারা যায়।

(i) $\vec{F} = m\vec{a}$ **সমীকরণ প্রতিপাদন :** মনে করি কোন একটি বস্তুর ভর m এবং এটি v_0 সমবেগে চলছে [চিত্র ৪.২]।



চিত্র ৪.২

ধরি একটি ধ্রুব বল (constant force) $\vec{F}$ এই বস্তুর উপর তার গতির দিকে t সময় ধরে ক্রিয়া করল। ফলে বস্তুর বেগ পরিবর্তিত হল।

মনে করি t সময় পরে বস্তুর বেগ হল $\vec{v}$

বস্তুর আদি ভরবেগ = ভর × আদিবেগ = $m\vec{v_0}$

বস্তুর শেষ ভরবেগ = ভর × শেষ বেগ = $m\vec{v}$

t সময়ে বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তন $= m\vec{v} - m\vec{v_0}$

ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m\vec{v} - m\vec{v_0}}{t} = m\left(\dfrac{\vec{v_0} - \vec{v_0}}{t}\right)$

$= m\vec{a}$ $\left[\because \vec{a} = \dfrac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t}\right.$ = বলের ক্রিয়াজনিত সৃষ্ট ত্বরণ]

এখন দ্বিতীয় সূত্র হতে জানি যে,

$\vec{F} \propto$ ভরবেগের পরিবর্তনের হার

$\vec{F} \propto m\vec{a}$

বা, $\vec{F} = km\vec{a}$ (1)

এখানে k সমানুপাতিক ধ্রুবক। একে একক বলের সংজ্ঞার সাহায্যে দূর করা হবে।

একক বলের সংজ্ঞা : একক ভরের কোন বস্তুর উপর একক ত্বরণ সৃষ্টি করতে যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে একক বল বলে। অর্থাৎ,

যখন $m = 1$ একক, $|\vec{a}| = 1$ একক, তখন $|\vec{F}| = 1$ একক।

সমীকরণ (1)-এ মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই,

$$1 = k \,.\, 1 \times 1$$

$$k = 1$$

সুতরাং একক বলের উপরোক্ত সংজ্ঞা অনুযায়ী আমরা পাই,

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2)$$

অর্থাৎ 'বল = ভর × ত্বরণ

এটিই হল বলের মান নির্দেশক সমীকরণ।

(ii) ক্যালকুলাস পদ্ধতিতে $\vec{F} = m\vec{a}$ সমীকরণ প্রতিপাদন

যদি m ভরের কোন বস্তু $\vec{v}$ বেগে গতিশীল হয়, তবে বস্তুটির ভরবেগ $\vec{P}$ হবে,

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

সুতরাং, বস্তুটির ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

এখন বস্তুটির উপর $\vec{F}$ বল প্রযুক্ত হলে নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে,

$$\vec{F} \propto \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\propto \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \propto m\frac{d}{dt}\vec{v} \quad [\because m\text{-ধ্রুবক}]$$

$$\propto m\vec{a} \qquad \left[\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\right]$$

বা, $\vec{F}' = km\vec{a}$

পূর্বের ন্যায় একক বলের সংজ্ঞা থেকে $k = 1$ দেখানো যায়।

সুতরাং, $\vec{F} = m\vec{a}$

উপরের আলোচনায় বস্তুটির উপর একটিমাত্র প্রযুক্ত বল বিবেচনা করা হয়েছে। কিন্তু বস্তুটির উপর $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots\ldots\ldots \vec{F}_n$ ইত্যাদি বল ক্রিয়াশীল হলে, বস্তুটির উপর ক্রিয়াশীল নিট বল $\Sigma\vec{F}$ হবে,

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{F_n}$$

সেক্ষেত্রে নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র হবে,

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

ত্বরণের দিক হবে নিট বলের দিক বরাবর।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হতে প্রথম সূত্র প্রতিপাদন :

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুযায়ী আমরা পাই,

$\vec{F} = m\vec{a}$, এখানে $\vec{F}$ হল প্রযুক্ত বল, 'm' বস্তুর ভর এবং $\vec{a}$ হল বলের জন্য সৃষ্ট ত্বরণ। যখন $\vec{F} = 0$; অর্থাৎ বস্তুটিতে বাইরে থেকে কোন বল প্রযুক্ত না হয়, তখন $\vec{a} = 0$ হয়। [কেননা $m = 0$ হতে পারে না]।

সুতরাং, যখন $\vec{F} = 0$

তখন $\vec{a} = 0$

বা, $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \qquad \left[\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\right]$

বা, $\vec{v} =$ ধ্রুবক।

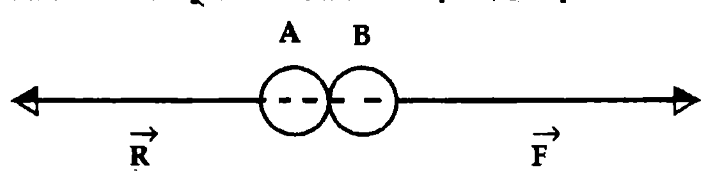
সুতরাং বাইরে থেকে বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত না হলে বস্তুর বেগের পরিবর্তন হয় না ; অর্থাৎ বস্তুর অবস্থার কোন পরিবর্তন হয় না। বস্তু যদি গতিশীল থাকে তবে সমবেগে সরলরেখায় গতিশীল থাকবে। অথবা বস্তুটি স্থির থাকলে, স্থিরই থাকবে। এটাই নিউটনের প্রথম সূত্র।

৪'৫'৩ নিউটনের তৃতীয় সূত্র
Newton's third law

প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া রয়েছে। অর্থাৎ **প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক বলের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক বল রয়েছে।** এই সূত্রকে বস্তুসমূহের মধ্যে বলের পারস্পরিক ক্রিয়ার সূত্র বলা যায়। কাজেই ক্রিয়ামূলক বল $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়ামূলক বল $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = -\vec{R}$

তৃতীয় সূত্রের ব্যাখ্যা ঃ

নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে যদি একটি বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর উপর বল প্রয়োগ করে, তা হলে B বস্তুও A বস্তুর উপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করবে [চিত্র ৪'৩]।



চিত্র ৪'৩

A-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হল **ক্রিয়া** এবং B-এর দ্বারা প্রযুক্ত বল হল **প্রতিক্রিয়া**। কাজেই ক্রিয়া $\vec{F}$ ও প্রতিক্রিয়া $\vec{R}$ হলে, $\vec{F} = -\vec{R}$

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া দুটি ভিন্ন বস্তুর উপর প্রযুক্ত হয়! ক্রিয়া না থাকলে প্রতিক্রিয়াও থাকে না। ক্রিয়া বা প্রতিক্রিয়া বলের কার্যকাল t হলে $\vec{F} \times t = -\vec{R} \times t$ (3)

অর্থাৎ , **ক্রিয়াজনিত বলের ঘাত = —প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ঘাত।**

এটি স্থির বা গতিশীল যে-কোন বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য।

তৃতীয় সূত্রের কয়েকটি উদাহরণ ঃ

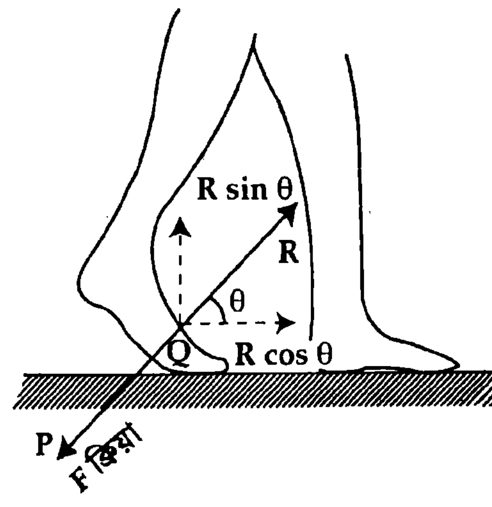
(i) টেবিলের উপর বই থাকা ঃ একটি টেবিলের উপর বই রাখা হলে বই-এর ওজন টেবিলের উপর লম্বভাবে চাপ প্রয়োগ করবে। এটিই ক্রিয়া। নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্রানুসারে টেবিল বই-এর উপর উপরের দিকে সমপরিমাণ বল প্রয়োগ করবে। এটি হল প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান ও বিপরীত হওয়ায় বইটি টেবিলের উপর সাম্যাবস্থায় থাকে।

(ii) বন্দুক হতে গুলি ছোঁড়া ঃ যখন বন্দুক হতে শিকারী গুলি ছোঁড়ে তখন সে পেছন দিকে একটা ধাক্কা অনুভব করে। প্রাথমিক অবস্থায় বন্দুক ও গুলি উভয়েরই বেগ শূন্য থাকে। ফলে তাদের মিলিত ভরবেগ শূন্য থাকে। গুলি ছোঁড়া হলে তা সামনের দিকে একটা ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে বন্দুকটি গুলির সমান ও বিপরীত ভরবেগ প্রাপ্ত হবে অর্থাৎ বন্দুকটি সমান ভরবেগে পেছনের দিকে যাবে এবং শিকারী পেছন দিকে ধাক্কা অনুভব করবে।

(iii) নৌকা থেকে লাফ দেয়া ঃ যখন আরোহী নৌকা হতে নদীর পাড়ে লাফিয়ে পড়ে, তখন নৌকাটিকে পেছনে ছুটে যেতে দেখা যায়। আরোহী নৌকার উপর যে বল প্রয়োগ করে তাতে নৌকাটি পেছনে যায়।

নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে নৌকাও আরোহীর উপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। ফলে আরোহী তীরে পৌঁছায়।

(iv) পায়ে হাঁটা ঃ আমরা যখন পায়ে হেঁটে চলি তখন সামনের পা মাটির উপর লম্বভাবে নিচের দিকে একটা বল প্রয়োগ করে। এর নাম ক্রিয়া। মাটিও সামনের পায়ের তলার উপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। এর নাম প্রতিক্রিয়া। ক্রিয়া এবং প্রতিক্রিয়া সমান এবং বিপরীত হওয়ায় সামনের পা স্থির থাকে। কিন্তু পেছনের পা মাটির উপর Q বিন্দুতে তির্যকভাবে $\vec{F}$ পরিমাণ বল QP বরাবর ক্রিয়া করে [চিত্র ৪.৪]। এই বল অনুভূমিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। নিউটনের তৃতীয় সূত্রানুসারে মাটি পায়ের তলার উপর সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বল প্রয়োগ করে। মনে করি প্রতিক্রিয়া বল $\vec{R}$। ফলে $\vec{R} = \vec{F}$। প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক $R\cos\theta$ আমাদেরকে সামনের দিকে এগিয়ে নেয় এবং উল্লম্ব অংশক $R\sin\theta$ শরীরের ওজন বহন করতে সাহায্য করে।



চিত্র ৪.৪

কিন্তু পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। কারণ পথ পিচ্ছিল হলে মাটির উপর যথেষ্ট বল প্রয়োগ করা পায়ের পক্ষে সম্ভব হয় না। ফলে পায়ের উপর মাটির প্রতিক্রিয়া বল এবং সাথে সাথে প্রতিক্রিয়া বলের অনুভূমিক অংশক কম হয়। এজন্যে পিচ্ছিল পথে চলা শক্ত হয়। মার্বেলের তৈরি মেঝে, বালুকাময় রাস্তায় হাঁটতে একই সমস্যা।

(v) ব্যাট-বলে আঘাত ঃ যখন ব্যাট দিয়ে বলকে আঘাত করা হয়, তখন বলের উপর ব্যাটের ক্রিয়ার ফলে বলটি সামনে যায় এবং ব্যাটের উপর বলের সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়ার ফলে ব্যাটও খানিকটা পেছনে সরে যায়।

৪.৬ বলের একক ও মাত্রা
Units and dimension of force

আমরা জানি, একক ভরের উপর প্রযুক্ত হয়ে যে বল একক ত্বরণ সৃষ্টি করে, তাকে একক বল বলে। এম. কে.এস. (MKS) ও এস. আই. (SI) পদ্ধতিতে বলের একক নিউটন (Newton, সংক্ষেপে N)।

সংজ্ঞা ঃ যে বল 1 kg ভরবিশিষ্ট কোন একটি বস্তুতে প্রযুক্ত হয়ে 1 ms^{-2} ত্বরণ সৃষ্টি করে তাকে 1 Newton বলে।

$\therefore \quad 1N = 1\,kg \times 1\,ms^{-2}$

ব্যাখ্যা ঃ 10 নিউটন (N) বল কথাটির অর্থ কি ?

জবাবে বলা হবে এটি ঐ বল যা 1 কিলোগ্রাম (kg) ভরের উপর ক্রিয়া করে 10 মিটার/ সে.^{2} (ms^{-2}) ত্বরণ সৃষ্টি করে। অথবা এটি ঐ বল যা 10 কিলোগ্রাম ভরের উপর ক্রিয়া করে 1 মিটার/সে.^{2} ত্বরণ সৃষ্টি করে।

অতএব বলের মাত্রা সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ

$$[\text{বল}] = [\text{ভর}] \times [\text{ত্বরণ}]$$
$$= [M] \times \left[\frac{L}{T^2}\right]$$
$$= \boxed{[MLT^{-2}]}$$

৪.৭ ঘাতবল ও বলের ঘাত

Impulsive force and impulse of a force

সংজ্ঞা : খুব কম সময়ের জন্য প্রচণ্ড বল ক্রিয়া করলে তাকে ঘাতবল বলে। বল এবং বলের ক্রিয়াকালের গুণফলকে বলের ঘাত বা শুধু ঘাত বলে। একে J দ্বারা সূচিত করা হয়। এটি একটি ভেক্টর রাশি।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, কোন বস্তুর উপর বল $\vec{F}$ খুব অল্প সময় t ধরে ক্রিয়া করে। সংজ্ঞানুসারে বলের ঘাত,

$$\boxed{\vec{J} = \vec{F}t = m\vec{a}t} \tag{4}$$

ক্যালকুলাসের সাহায্যে $\vec{J}$-এর প্রকাশ : যদি বল $\vec{F}$ কোন বস্তুর উপর t_1 হতে t_2 পর্যন্ত অত্যন্ত অল্প সময়ের জন্য ক্রিয়াশীল হয়, তবে ক্যালকুলাসের সাহায্যে লেখা যায়,

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt \tag{5}$$

ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ ধ্রুব হলে সমীকরণ (5)-কে লেখা যায়,

$$\vec{J} = \vec{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F}\,[t]_{t_1}^{t_2} = \vec{F}\,(t_2 - t_1).$$

$$= \vec{F}t \text{ এখানে } t_2 - t_1 = t \text{ ধরা হয়েছে} \tag{6}$$

ঘাতবলের উদাহরণ : ব্যাট দিয়ে ক্রিকেট বলে আঘাত করা, বৃহৎ ইমারত প্রস্তুতের সময় স্টীল হাতুড়ী দিয়ে মাটিতে পিন পোতা, ক্যারামের স্ট্রাইকার দিয়ে গুটিতে আঘাত করা, ট্রেনে ট্রেনে সংঘর্ষ, কামান হতে গুলি ছোঁড়া, বোমা বিস্ফোরণ হওয়া ইত্যাদি ঘাতবলের উদাহরণ। কেননা এসব ক্ষেত্রে বলের ক্রিয়াকাল খুব অল্প, কিন্তু প্রযুক্ত বলের মান প্রচণ্ড। অবশ্য ঘাতবলের বেগের পরিবর্তন হয় হঠাৎ ও যথেষ্ট, কিন্তু সরণ তেমন হয় না বলা যায়।

বলের ঘাত ও ভরবেগের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between impulse and momentum

ভেক্টরের সাহায্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা

আমরা জানি,

$$\vec{J} = \vec{F}t$$

আবার, $\vec{F} = m\vec{a}$

$$J = \vec{F}t = m\vec{a}t$$

ঘাতবল অত্যন্ত অল্প সময়ের জন্য ক্রিয়াশীল বলে ত্বরণ ও গড় ত্বরণ সমান ধরা যায়। এখন বস্তুটির আদিবেগ $\vec{v}_0$ এবং শেষ বেগ $\vec{v}$ হলে আমরা পাই,

$$J = m\left(\frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}\right)t$$

$$= m(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

বা, $\vec{J} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$ (7)

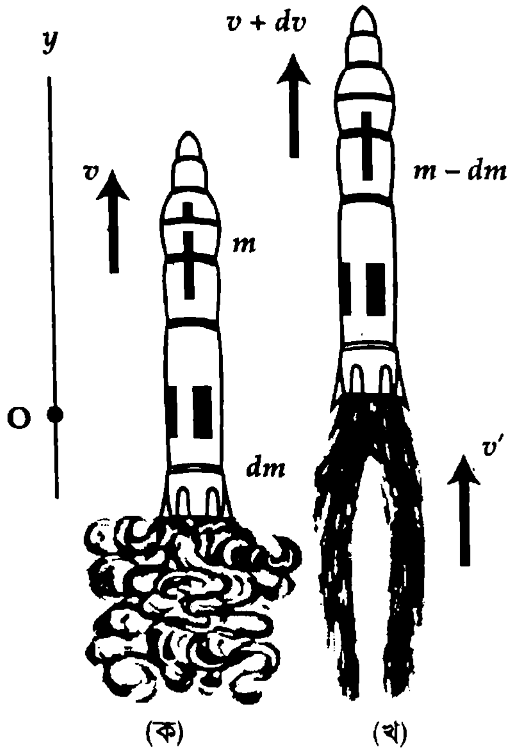
অর্থাৎ, **বলের ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন।**

ঘাতের একক ও মাত্রা সমীকরণ

সমীকরণ (7) হতে দেখা যায় যে, বলের ঘাত বা ঘাতের একক ও মাত্রা ভরবেগের একক ও মাত্রার অনুরূপ। সুতরাং ঘাতের একক $kgms^{-1}$ এবং এর মাত্রা সমীকরণ $[MLT^{-1}]$।

৪'৮ রকেটের গতি
Motion of a rocket

কৃত্রিম উপগ্রহের বহুল ব্যবহার অত্যাধুনিক যোগাযোগ ব্যবস্থার উন্নয়নে এবং মহাকাশ গবেষণায় বিরাট অবদান রেখেছে। এর মূলে রয়েছে রকেট চালনার উত্তরোত্তর উন্নতি সাধন। পিছনের সরু পথ দিয়ে উচ্চ চাপের গ্যাস অত্যন্ত জোরে নির্গমনের ফলে রকেট সম্মুখের দিকে ধাবিত হয়। দ্রুত গতির এই উষ্ণ গ্যাস রকেটের মধ্যে জ্বালানি দহনে উৎপন্ন হয়। ছিদ্র পথে গ্যাস নির্গমন হল ক্রিয়া এবং এর ফলে যে প্রতিক্রিয়া সৃষ্টি হয় তা রকেটকে গ্যাস প্রবাহের বিপরীত দিকে চালিত করে।



চিত্র ৪'৫

যদিও গ্যাস হাল্কা কিন্তু উচ্চ বেগের কারণে নির্গত গ্যাসের ভরবেগ খুব বেশি হয়। ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি অনুযায়ী রকেটও সমান কিন্তু বিপরীতমুখী ভরবেগ প্রাপ্ত হয় এবং উচ্চবেগে উপরে ওঠে যায়।

জ্বালানি হিসেবে রকেটে সাধারণত তরল হাইড্রোজেন এবং দহনের জন্য তরল অক্সিজেন থাকে। বিশেষ প্রক্রিয়ায় এবং নিয়ন্ত্রিত হারে তরল হাইড্রোজেন ও অক্সিজেনকে দহন প্রকোষ্ঠে প্রবেশ করানো হয়। জ্বালানির দহন ক্রিয়ার ফলে উৎপন্ন উত্তপ্ত উচ্চ চাপের গ্যাস অত্যন্ত উচ্চ বেগে রকেটের নিচের দিকে নির্গমন পথ দিয়ে বেরিয়ে আসে। [চিত্র ৪'৫]

নিম্নে রকেটের গতির সমীকরণ প্রতিপাদন করা হল—

চিত্র (ক)-এ রকেট উৎক্ষেপণের পরমুহূর্তের অবস্থা দেখান হয়েছে। মনে করি তখন রকেটের ভর (m) (জ্বালানিসহ) এবং এর উর্ধ্বমুখী বেগ v। সুতরাং রকেটের ভরবেগ $= mv$

মনে করি ক্ষুদ্র সময় অবকাশে dm পরিমাণ গ্যাস রকেটের নিচের ছিদ্রপথে নির্গত হয়েছে। চিত্র (খ)-এ $t + dt$ সময় পরের অবস্থা দেখান হয়েছে। ধরা যাক রকেটের সাপেক্ষে নির্গত গ্যাসের নিম্নমুখী বেগ v_r।

এখন পৃথিবীর সাপেক্ষে নির্গত গ্যাসের বেগ (v') হবে,

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_r$ [চিত্রে উর্ধ্বমুখী বেগ ধনাত্মক ধরা হয়েছে, সুতরাং নিম্নমুখী বেগ v_r ঋণাত্মক হবে]

এবং এর ভরবেগ,

$$dm\,\vec{v}' = dm\,(\vec{v} - \vec{v}_r)$$

এখন dt সময় অবকাশে dm পরিমাণ গ্যাস নির্গত হওয়ার ফলে রকেটের ভর কমে $(m - dm)$ হয় এবং বেগ বৃদ্ধি পেয়ে $v + dv$ হয়। সুতরাং dt সময় অবকাশে রকেটের ভরবেগ হয়,

$(m - dm)\,(v + dv)$

অতএব, $t + dt$ সময়ে

মোট ভরবেগ = রকেটের ভরবেগ + নির্গত গ্যাসের ভরবেগ

$$= (m - dm)(v + dv) + dm\,(v - v_r)$$
$$= mv + mdv - vdm - dmdv + vdm - v_r\,dm$$
$$= mv + mdv - v_r dm \quad [dmdv \text{ ক্ষুদ্র বলে বাদ দেয়া হয়েছে}] \qquad (8)$$

এখন আমরা ঘাত-ভরবেগ সূত্র (impulse-momentum theorem) প্রয়োগ করতে পারি। এই সূত্র অনুসারে কোন সিস্টেমের (system) উপর ক্রিয়াশীল লব্ধি (resultant) বল এবং বলের ক্রিয়াকালের গুণফল সিস্টেমের ভরবেগের পরিবর্তনের সমান হয়।

এখন রকেট সিস্টেমের উপর একমাত্র বহিস্থ ক্রিয়াশীল বল হল রকেটের ওজন অর্থাৎ $-mg$। g-এর দিক নিম্নমুখী হওয়ায় ঋণ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে। এখানে বাতাসের বাধা উপেক্ষা করা হয়েছে।

অতএব dt সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন বা পার্থক্য হবে t এবং $t+dt$ সময়ে ভরবেগের পার্থক্যের সমান। অর্থাৎ

dt সময়ে ভরবেগের পরিবর্তন $= (m-dm)(v+dv) + dm(v-v_r) - mv$

$= mv + mdv - v_r dm - mv$ [সমীকরণ (8) ব্যবহার করে]

$= mdv - v_r dm$

এখন ঘাত-ভরবেগ সূত্র প্রয়োগ করে আমরা পাই,

$$F \times dt = mdv - v_r dm$$

$$-mgdt = mdv - v_r dm \qquad [\because F = -mg]$$

বা, $-mg = m\dfrac{dv}{dt} - v_r\dfrac{dm}{dt}$ বা, $m\dfrac{dv}{dt} = v_r\dfrac{dm}{dt} - mg$

ভেক্টর নিয়মে লিখলে,

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \vec{v}_r\left(\frac{dm}{dt}\right) - m\vec{g} \qquad (9)$$

কিন্তু, $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ হল রকেটের ত্বরণ। সুতরাং বামপক্ষ রকেটের উপরে লব্ধি বল নির্দেশ করে। ডানপক্ষের প্রথম রাশি হল রকেটের ঘাতবল এবং দ্বিতীয় রাশি রকেটের ওজন। অর্থাৎ রকেটের উপরে ক্রিয়াশীল লব্ধি বল রকেটের ঘাতবল ও ওজনের পার্থক্যের সমান।

সমীকরণ (10)-এর উভয় পক্ষ m দ্বারা ভাগ করে, আমরা রকেটের তাৎক্ষণিক ত্বরণ 'a' পেতে পারি। অর্থাৎ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - \vec{g} \qquad (10)$$

সমীকরণ (10) থেকে নিম্নোক্ত সিদ্ধান্তসমূহে উপনীত হওয়া যায় ঃ

(১) গ্যাসের নির্গমনের বেগ v_r বেশি হলে রকেটের ত্বরণ বেশি হবে।

(২) গ্যাস নির্গমনের হার $\left(\dfrac{dm}{dt}\right)$ বেশি হলে ত্বরণ বেশি হবে।

(৩) রকেটের ভর 'm' কম হলে ত্বরণ বাড়বে।

(৪) পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে রকেট যত উপরে উঠবে 'g'-এর মান তত কমতে থাকবে। ফলে রকেটের ত্বরণ বাড়তে থাকবে।

[বিঃ দ্রঃ মহাশূন্যে $g = 0$ হলে, রকেটের ত্বরণ $\vec{a} = \dfrac{v_r}{m}\left(\dfrac{dm}{dt}\right)$ হবে।]

৪.৯ ভরবেগের নিত্যতা সূত্র বা ভরবেগের সংরক্ষণ বিধি
Principle of conservation of momentum

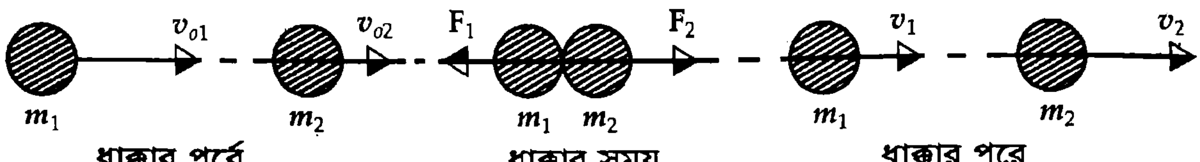
নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্র হতে আমরা একটি নতুন নীতি সম্পর্কে ধারণা পাই। এর নাম ভরবেগের নিত্যতা সূত্র। সূত্রটি নিচে বিবৃত হল ঃ

সূত্র ঃ দুই বা ততোধিক বস্তুতে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ছাড়া অন্য কোন বাহ্যিক বল ক্রিয়াশীল না হলে যে-কোন একদিকে ঐ বস্তুগুলোর মোট রৈখিক ভরবেগের কোন পরিবর্তন হবে না। এর নাম ভরবেগের নিত্যতা সূত্র। একে রৈখিক ভরবেগের সংরক্ষণ বিধিও বলা হয়ে থাকে।

এটি ছোট-বড় পার্থিব বা মহাজাগতিক সব বস্তুর ক্ষেত্রে সমভাবে প্রযোজ্য।

নিউটনের তৃতীয় গতি সূত্র অনুসরণে সূত্রটির গাণিতিক প্রমাণ নিচে দেয়া হল ঃ

মনে করি কোন একটি সরল রেখায় m_1 এবং m_2 ভরের দুটি বস্তুকণা যথাক্রমে $\vec{u_1}$ ও $\vec{u_2}$ বেগে একই দিকে চলছে [চিত্র ৪.৬]। এখানে $\vec{u_1} > \vec{u_2}$। কোন এক সময়ে প্রথম বস্তুকণাটি পেছনের দিক হতে দ্বিতীয় বস্তুকণাটিকে ধাক্কা দিল এবং এর পর বস্তুকণা দুটি একই সরলরেখায় ও একই দিকে যথাক্রমে $\vec{v_1}$ ও $\vec{v_2}$ বেগে চলতে লাগল।



চিত্র ৪.৬

মনে করি ধাক্কাজনিত ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার কার্যকাল t । তা হলে

বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি = $m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2}$

বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি = $m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$

ভরবেগের নিত্যতা সূত্রানুসারে প্রমাণ করতে হবে যে, $m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$

প্রমাণ ঃ

প্রথম বস্তু কণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{m_1\vec{v_1} - m_1\vec{u_1}}{t}$

= প্রতিক্রিয়া বল = $\vec{F_1}$

= প্রথম বস্তুকণার উপর দ্বিতীয় বস্তুকণার প্রতিক্রিয়া বল।

দ্বিতীয় বস্তুকণার ভরবেগের পরিবর্তনের হার

$= \dfrac{m_2\vec{v_2} - m_2\vec{u_2}}{t}$ = ক্রিয়া বল = $\vec{F_2}$

= দ্বিতীয় বস্তুকণার উপর প্রথম বস্তুকণার প্রযুক্ত বল।

কিন্তু বস্তুকণা দুটির ভরবেগের পরিবর্তনের হার (অর্থাৎ ক্রিয়া বল ও প্রতিক্রিয়া বল) সমান ও বিপরীত। অর্থাৎ

$$\vec{F_2} = -\vec{F_1}$$

$$\frac{m_2\vec{v_2} - m_2\vec{u_2}}{t} = -\frac{m_1\vec{v_1} - m_1\vec{u_1}}{t}$$

বা, $m_2\vec{v_2} - m_2\vec{u_2} = -m_1\vec{v_1} + m_1\vec{u_1}$

বা, $m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}$ .... = একটি ধ্রুব ভেক্টর

বস্তুকণা দুটির আদি ভরবেগের সমষ্টি = বস্তুকণা দুটির শেষ ভরবেগের সমষ্টি।

অর্থাৎ $\sum m\vec{v}$ = ধ্রুব ভেক্টর। (11)

সুতরাং **দুটি বস্তুর মধ্যে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়াজনিত বলের ফলে মোট ভরবেগের কোন পরিবর্তন হয় না, একটি বস্তু যে পরিমাণ ভরবেগ হারায়, অপরটি ঠিক সমপরিমাণ ভরবেগ লাভ করে অর্থাৎ ধাক্কার আগে ও পরে মোট ভরবেগ একই থাকে।** অতএব ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি প্রমাণিত হল।

উল্লেখ্য ঃ ক্রিয়া বল $\vec{F_2}$ এবং প্রতিক্রিয়া বল $\vec{F_1}$ -এর কার্যকাল সমান। কাজেই ঘাত দুটি সমান ও বিপরীত অর্থাৎ

$\vec{F_2} \times t = -\vec{F_1} \times t$, এখানে t তাদের কার্যকাল। (12)

৪.১০ ভরবেগের নিত্যতা সূত্রের উদাহরণ
Examples of principle of conservation of momentum

বাস্তব অভিজ্ঞতা হতে আমরা ভরবেগের নিত্যতা সূত্রের কয়েকটি উদাহরণ দিতে পারি ঃ

(১) বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ ঃ কোন একটি বন্দুক হতে গুলি ছুঁড়লে তা পেছনের দিকে ধাক্কা দেয়। ভরবেগের নিত্যতা সূত্রের সাহায্যে এর ব্যাখ্যা প্রদান করা যায়।

গুলি ছোঁড়ার আগে বন্দুক ও গুলি উভয়েই স্থির থাকে। অতএব বন্দুকের ভরবেগ শূন্য এবং গুলির ভরবেগ শূন্য। সুতরাং তাদের মোট আদি ভরবেগ শূন্য। গুলি ছোঁড়ার পর বারুদের বিস্ফোরণের ফলে গুলি একটি বেগে সামনের দিকে যায়। ফলে এটি সামনের দিকে একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হয়। ভরবেগের নিত্যতা সূত্র অনুসারে গুলি ছোঁড়ার পরেও তাদের মোট ভরবেগ শূন্য হবে। যদি তাই হয়, তবে বন্দুককেও গুলির সমান ও বিপরীতমুখী একটি ভরবেগ লাভ করতে হবে। ফলে বন্দুককে অবশ্যই পেছনের দিকে গতিপ্রাপ্ত হতে হবে।

মনে করি M ভরের একটি বন্দুক হতে m ভরের একটি গুলি $\vec{v}$ বেগে বের হয়ে গেল। মনে করি গুলি ছোঁড়ার পর বন্দুকের বেগ = $\vec{V}$

গুলি ছোঁড়ার আগে তাদের মোট ভরবেগ = 0

গুলি ছোঁড়ার পরে তাদের মোট ভরবেগ

= বন্দুকের ভরবেগ + গুলির ভরবেগ

$= M\vec{V} + m\vec{v}$

কিন্তু ভরবেগের নিত্যতা সূত্র অনুসারে আগের ও পরের ভরবেগ সমান।

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0$$

বা, $$m\vec{v} = -M\vec{V} = M(-\vec{V}) \qquad (13)$$

অর্থাৎ, গুলির ভর $\times$ গুলির বেগ = বন্দুকের ভর $\times$ বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

উপরের সমীকরণ হতে আরো প্রমাণিত হয় যে, গুলি ছোঁড়ার পরে গুলি এবং বন্দুকের ভরবেগ সমান ও বিপরীতমুখী। এ থেকে নিউটনের গতি বিষয়ক তৃতীয় সূত্র প্রমাণিত হয়।

উপরের সমীকরণ অনুসারে,

$$\frac{|\vec{v}|}{|\vec{V}|} = \frac{M}{m} > 1$$

$$|\vec{v}| > |\vec{V}|$$

অর্থাৎ, গুলির বেগ > বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ।

(২) নৌকা হতে লাফ ঃ নদীর ঘাটে ভাসমান নৌকা হতে লাফ দিয়ে সামনের দিকে তীরে নামলে নৌকাটি পেছনে সরে যায়। একেও ভরবেগের নিত্যতা সূত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

মনে করি নদীর ঘাটে ভাসমান নৌকা স্থির অবস্থায় রয়েছে এবং একজন মানুষ নৌকার উপর বসে আছেন। ধরি মানুষের ভর = m এবং নৌকার ভর = M

লাফ দেয়ার পূর্বে নৌকা এবং মানুষের বেগ শূন্য হওয়ায় তাদের মোট ভরবেগ

= মানুষের ভরবেগ + নৌকার ভরবেগ

$= m \times 0 + M \times 0 = 0$ (শূন্য)

মনে করি মানুষটি $\vec{v}$ বেগে নৌকা হতে সামনের দিকে তীরে লাফিয়ে পড়ল। অতএব সে সামনের দিকে একটি ভরবেগ প্রাপ্ত হবে। কিন্তু লাফ দেয়ার পরে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার দরুন মানুষ ও নৌকার মোট ভরবেগ অবশ্যই শূন্য হতে হবে।

সুতরাং নৌকার বেগ মানুষের বেগের বিপরীতমুখী হবে। নচেৎ তাদের মোট ভরবেগ শূন্য হবে না।

মনে করি নৌকার বেগ = $\vec{V}$

লাফ দেয়ার পরে তাদের মোট ভরবেগ = $m\vec{v} + M\vec{V}$

ভরবেগের নিত্যতা সূত্র অনুসারে লাফ দেয়ার আগের ও পরের মোট ভরবেগ সমান।

$$m\vec{v} + M\vec{V} = 0$$

বা, $m\vec{v} = -M\vec{V}$

বা, $m\vec{v} = M(-\vec{V})$

অর্থাৎ, মানুষের ভর × মানুষের বেগ = নৌকার ভর × নৌকার পশ্চাৎ বেগ।

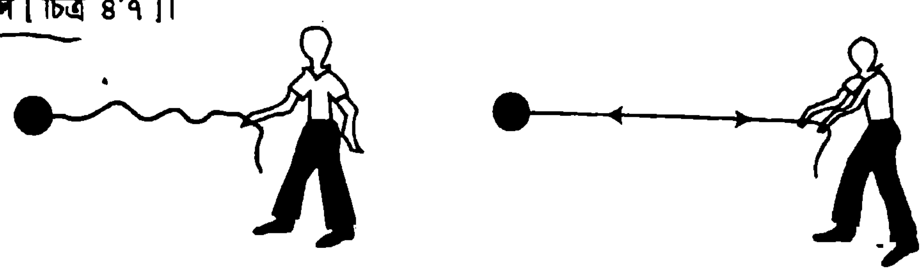
উল্লেখ্য : যে সব ধাক্কায় বা সংঘর্ষে আদি গতিশক্তির সমষ্টি শেষ গতিশক্তির সমষ্টির সমান সে সব ধাক্কাকে স্থিতিস্থাপক ধাক্কা বলে। সাধারণত সব ধাক্কা বা সংঘর্ষই অস্থিতিস্থাপক।

৪.১১ বিভিন্ন প্রকার ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া

Different types of actions and reactions

ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার ফলে বিভিন্ন প্রকার বলের সৃষ্টি হয়। বলের প্রকৃতি অনুসারে তাদের বিভিন্ন প্রকার নামকরণ করা হয়। নিচে ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়াজনিত কয়েকটি বলের উল্লেখ করা হল :

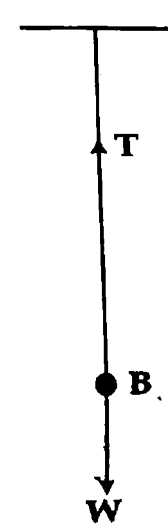
(i) টান (Pull) : কোন দৃঢ় বা নমনীয় বস্তুর উপর দৈর্ঘ্য বরাবর বল প্রয়োগ করে টানলে প্রযুক্ত বলকে টান বলে [চিত্র ৪.৭]।



(ক) (খ)

চিত্র ৪.৭

(ii) টেনসন (Tension) : একটি লোহার বল B-কে সুতার সাহায্যে ঝুলালে বলের ওজন সুতাকে নিচের দিকে টানে [চিত্র ৪.৮]। এটাই ক্রিয়া। এর নাম টেনসন। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে সুতা লোহার বলটিকে সমান বলে উপরের দিকে টানে। এর নাম প্রতিক্রিয়া। সুতার মধ্যে যে প্রতিক্রিয়া বলের উদ্ভব হল এর মান লোহার বলের ওজনের সমান। এই উদ্ভূত বলকে টেনসন বা টান বলে। এমনিভাবে, **একটি বস্তু অপর একটি বস্তুর সাথে যুক্ত থেকে যে বল সৃষ্টি করে তাকে টেনসন বা টান বলে।** যদি লোহার ওজন $\vec{W}$ এবং টান $\vec{T}$ হয়, তবে স্থিরাবস্থায়, $\vec{W} = \vec{T}$



চিত্র ৪.৮

(iii) ধাক্কা (Push) : কোন বস্তুর উপর সামনের দিকে বল প্রয়োগ করাকে ধাক্কা বলে। বাইরে থেকে দরজা খোলার সময় আমরা যে বল প্রয়োগ করে থাকি তার নাম ধাক্কা।

(iv) আকর্ষণ বা বিকর্ষণ (Attraction or Repulsion) : এই দুটি বল দূর হতে ক্রিয়া করে। সমজাতীয় দুটি চুম্বক মেরু বা চার্জ পরস্পরকে বিকর্ষণ করে এবং বিপরীতধর্মী দুটি চুম্বক মেরু বা চার্জ পরস্পরকে আকর্ষণ করে।

(v) ঘর্ষণ (Friction) : একটি বস্তু অন্য একটি বস্তুর উপর দিয়ে গতিশীল হলে বা গতিশীল হতে চাইলে তাদের মিলন তলে গতিরোধমূলক একটি বল উৎপন্ন হয়। এই বলকে ঘর্ষণ বলে।

মাটির উপর দিয়ে একটি ফুটবলকে গড়িয়ে দিলে নিউটনের প্রথম সূত্রানুযায়ী এটি চিরকাল চলার কথা। কিন্তু তা না হয়ে ফুটবলটি থেমে যায়। কারণ মাটির ঘর্ষণ ফুটবলের গতি রোধ করে।

৪.১২ বলের ভারসাম্য বা সাম্যাবস্থা
Equilibrium of forces

যখন কোন বস্তুর উপরে ক্রিয়ারত দুই বা ততোধিক বল প্রয়োগের ফলে বস্তুটি স্থির অবস্থায় থাকে কিংবা সমবেগে সরলরেখায় চলে তখন বস্তুটি সাম্যাবস্থায় রয়েছে বলা হয়। অন্যভাবে বলা যেতে পারে বস্তুটির উপর প্রযুক্ত লব্ধি বল F শূন্য হলে বস্তুটির অবস্থার কোন পরিবর্তন হবে না ; অর্থাৎ বস্তুটি স্থির অবস্থায় থাকলে ঐ অবস্থায়ই থাকবে কিংবা চলমান হলে সরলরেখায় সমবেগে চলমান থাকবে। সুতরাং বলের ভারসাম্য বা সাম্যাবস্থার নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা : কোন বিন্দু বা বস্তুতে দুই বা ততোধিক বল ক্রিয়া করায় উক্ত বিন্দু বা বস্তুতে বলের লব্ধি যদি শূন্য হয়, তবে তাকে বলের ভারসাম্য বলে।

ব্যাখ্যা : একটি বস্তুর উপরে অনেকগুলো বল বিভিন্ন দিক থেকে ক্রিয়াশীল হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে বস্তুর উপরে ক্রিয়ারত সকল বলের ভেক্টর সমষ্টি শূন্য হলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকবে। গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \qquad = 0 \tag{14}$$

$\Sigma\vec{F}$ ক্রিয়ারত সকল বলের ভেক্টর সমষ্টি বুঝায়। এখন কোন একটি ভেক্টর শূন্য হবে যদি এর প্রতিটি লম্ব উপাংশ আলাদাভাবে শূন্য হয়। ত্রিমাত্রিক তলে $\Sigma\vec{F}$ এর তিনটি লম্ব উপাংশ যথা ΣF_x, ΣF_y ও ΣF_z রয়েছে। সাম্যাবস্থার শর্ত অনুসারে প্রতিটি লম্ব উপাংশ শূন্য হবে। অর্থাৎ

$$\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \qquad = 0 \tag{15}$$

$$\Sigma F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \qquad = 0 \tag{16}$$

$$\Sigma F_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \qquad = 0 \tag{17}$$

অন্যভাবে বলা যেতে পারে **একটি বস্তু সাম্যাবস্থায় বা সুস্থির থাকবে যদি এর ত্বরণ শূন্য হয়।**

ব্যাখ্যা : নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র থেকে আমরা পাই,

$$\Sigma\vec{F} = \Sigma m\vec{a}$$

এখন ত্বরণ $\vec{a}$ শূন্য হলে অর্থাৎ বস্তুটির ত্বরণ না থাকলে $\Sigma F = 0$ হবে।

আমরা জানি বল একটি ভেক্টর রাশি। সুতরাং ভেক্টরসমূহের লব্ধি নির্ণয়ের সূত্রসমূহ (যেমন সাধারণ সূত্র, ত্রিভুজ সূত্র, বহুভুজ সূত্র, সামান্তরিক সূত্র ইত্যাদি) বলসমূহের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

বলের ভারসাম্য বা বস্তুর সাম্যাবস্থা প্রমাণের জন্য নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ ও সূত্র আলোচনা করা হবে।

১। **দুটি বলের ভারসাম্য ঃ** চিত্র ৪·৯-এ দুটি সমান এবং বিপরীত বল একটি বস্তুর উপরে ক্রিয়াশীল দেখান হয়েছে।

চিত্র ৪·৯

চিত্র ৪·৯ (ক)-এ দুটি সমান বল F বস্তুটির দুই বিপরীত পৃষ্ঠে বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল। অর্থাৎ বল দুটি একই রেখায় বিপরীত মুখে ক্রিয়া করে। ফলে লব্ধি শূন্য। সুতরাং বলদ্বয় বস্তুটির সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে।

চিত্র ৪·৯ (খ)-এ বল দুটি সমান এবং বিপরীতমুখী। ক্রিয়াবিন্দু একই সরলরেখায় না হওয়ায় বস্তুটির কোন সরণ না ঘটলেও ঘূর্ণনের সৃষ্টি হবে। ফলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকবে না।

সুতরাং, যখন দুটি বল ক্রিয়া করে তখন সাম্যাবস্থার শর্ত হল ঃ

১। বল দুটি সমান ও বিপরীতমুখী হতে হবে।

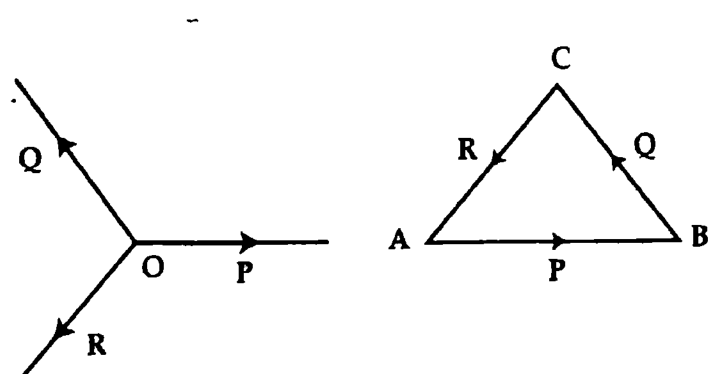
২। বল দুটি একই সরলরেখায় ক্রিয়া করবে।

২। **তিনটি অসমান্তরাল বলের ভারসাম্য ঃ** তিনটি অসমান্তরাল বলের ভারসাম্য প্রমাণের জন্য আমরা বলের ত্রিভুজ সূত্র ও লামীর সূত্র (Lami's theorem) আলোচনা করব।

বল ত্রিভুজ সূত্র

"এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল এমন হয় যে তাদেরকে পরিমাণে ও দিকে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে তিনটি বাহু দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তবে এরা সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে।"

O বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$-কে পরিমাণ ও দিক উভয়ার্থে ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে AB, BC এবং CA বাহু দ্বারা সূচিত করা হয়েছে [চিত্র ৪·১০]। **প্রমাণ করতে হবে যে, বলগুলো স্থির অবস্থায় রয়েছে।**



চিত্র ৪·১০

ABC ত্রিভুজের একটি ক্রমে AB, BC বাহু দ্বারা প্রকাশিত এক বিন্দুগামী দুটি বল P, Q-এর লব্ধি বিপরীতক্রমে তৃতীয় বাহু AC দ্বারা প্রকাশিত। এই লব্ধি AC এবং CA দ্বারা প্রকাশিত তৃতীয় বল R পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীতমুখী হওয়ায় এরা একে অপরকে নিষ্ক্রিয় করে। অতএব P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে।

ভেক্টর সংকেত ঃ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$

$$\boxed{\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0} \qquad (18)$$

বা, $\Sigma \vec{F} = 0$ (19)

লামীর উপপাদ্য (Lami's theorem) ঃ উপরের বর্ণনানুযায়ী যেহেতু $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ বল তিনটির লব্ধি শূন্য, সুতরাং ত্রিভুজের নিয়ম অনুযায়ী আমরা পাই,

$$\frac{P}{\sin \angle ACB} = \frac{Q}{\sin \angle CAB} = \frac{R}{\sin \angle ABC} \qquad (20)$$

অর্থাৎ $P \propto \sin \angle ACB$; $Q \propto \sin \angle CAB$; এবং $R \propto \sin \angle ABC$। কাজেই, **এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে প্রত্যেকটি বল অপর বল দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইনের** (sine) **সমানুপাতিক হবে। একে লামীর উপপাদ্য বলে।**

উপরের আলোচনা থেকে তিনটি অসমান্তরাল বলের সাম্যাবস্থার জন্য আমরা নিম্নোক্ত শর্তগুলি পাই—

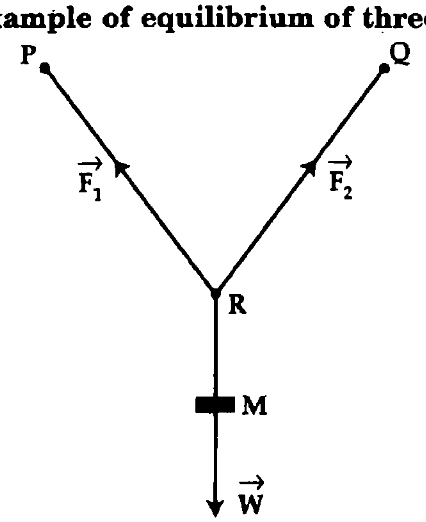
১। বলগুলো একই সমতলে অবস্থিত থাকবে ;

২। বলগুলো একই বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন দিকে ক্রিয়া করবে ;

৩। যে কোন একটি বল অপর দুটির লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী হবে।

৪। বলের ত্রিভুজ সূত্র ও লামীর উপপাদ্য প্রযোজ্য হবে।

৩। তিনটি অসমান্তরাল বলের সাম্যাবস্থার উদাহরণ
Example of equilibrium of three non-parallel forces



চিত্র ৪.১১

মনে করি একটি দেয়াল আছে। উক্ত দেয়ালের মাঝামাঝি স্থান বরাবর অনুভূমিকভাবে দুটি পেরেক লাগাই। মনে করি পেরেক দুটি P ও Q। পেরেক দুটির সাথে একটি লম্বা সুতা PRQ বাঁধি। R বিন্দুতে একটি বস্তু M ঝুলাই [চিত্র ৪.১১]। ধরি এর ওজন $\vec{W}$। সুতাটির RP ও RQ অংশে উপর দিকে সুতার টান বা ঊর্ধ্বমুখী বল ক্রিয়া করবে। মনে করি বল দুটি যথাক্রমে $\vec{F_1}$ এবং $\vec{F_2}$। এক্ষেত্রে $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ এবং $\vec{W}$ বল তিনটি সাম্যাবস্থা প্রতিষ্ঠা করবে।

৪। তিনটি সমান্তরাল বলের ভারসাম্য বা সাম্যাবস্থা

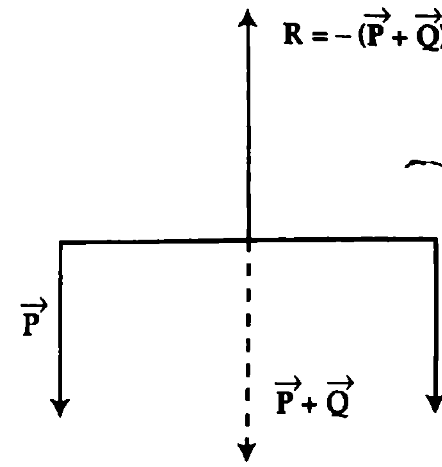
নিম্নলিখিত শর্তগুলো পূরণ করলে তিনটি সমান্তরাল বল সাম্যাবস্থা প্রতিষ্ঠা করবে।

(১) বল তিনটি একই সমতলে ক্রিয়া করবে।

(২) বল তিনটি পরস্পর সমান্তরাল হতে হবে।

(৩) যে কোন একটি বল অপর দুটি বলের লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী হতে হবে।

প্রমাণ : চিত্র ৪.১২-এ তিনটি সমান্তরাল বল P, Q ও R একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করছে। এই তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $(\vec{P}+\vec{Q})$ ডট্ ডট্ চিহ্নের সরলরেখা দ্বারা দেখান হয়েছে। উপরের শর্ত অনুসারে তৃতীয় বল $\vec{R}$ লব্ধি $(\vec{P}+\vec{Q})$-এর সমান ও বিপরীতমুখী হবে এবং এই দুটি বল একই সরলরেখায় ক্রিয়াশীল হবে।



চিত্র ৪.১২

অতএব, $R = -(\vec{P}+\vec{Q})$

বা, $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}=0$ (21)

উদাহরণ : দাঁড়িপাল্লা দিয়ে ওজন করার সময় দুই পাল্লার একটিতে বস্তুর ওজন ও অপরটিতে বাটখারার ওজন এবং নিক্তি দন্ডের মাঝখানে উর্ধ্বমুখী বল সাম্যাবস্থায় থাকে। এই তিনটি বল পরস্পর সমান্তরাল।

৪.১৩ ঘর্ষণ

সংজ্ঞা : একটি বস্তু অন্য একটি বস্তুর উপর দিয়ে গতিশীল হলে বা গতিশীল হতে চাইলে তাদের মিলনতলে গতিরোধমূলক একটি বল উৎপন্ন হয় যা গতিকে ব্যাহত করে। এই বলকে ঘর্ষণ বা ঘর্ষণ বল বলে।

ব্যাখ্যা : একটি বস্তুকে মেঝের উপর দিয়ে গড়িয়ে দিলে বস্তুটি খানিকটা এগিয়ে গিয়ে থেমে যায়। এর কারণ বস্তুর কোন তলই পুরোপুরি মসৃণ নয়। তা খানিকটা উঁচু-নিচু। যখন একটি বস্তু অপর একটি বস্তুর সংস্পর্শে থেকে চলবার চেষ্টা করে তখন একটির উঁচু অংশ অপরটির নিচু অংশে ঢুকে যায় এবং তাদের মিলনতলে গতিরোধমূলক একটি বল উৎপন্ন হয়। এই গতিরোধমূলক বলকেই ঘর্ষণ বলে।

ঘর্ষণ বলের নির্ভরতা (Dependence of friction)

ঘর্ষণ বা ঘর্ষণ বল নিম্নলিখিত শর্তের উপর নির্ভর করে :

(১) **স্পর্শিত তল দুটির পদার্থ**

(২) **মিলন তল দুটির স্বভাব**

(৩) **মিলন তল দুটির প্রকৃতি**

(৪) **মিলন তল দুটির মধ্যবর্তী মাধ্যম**

(৫) **মিলন তল দুটির তাপমাত্রা।**

ঘর্ষণের প্রকারভেদ (Kinds of friction) :

ঘর্ষণ মূলত দুই প্রকার। যথা : (১) **স্থিতি ঘর্ষণ বা স্থির ঘর্ষণ** (Static friction) এবং (২) **চল ঘর্ষণ বা গতীয় ঘর্ষণ** (Kinetic friction)।

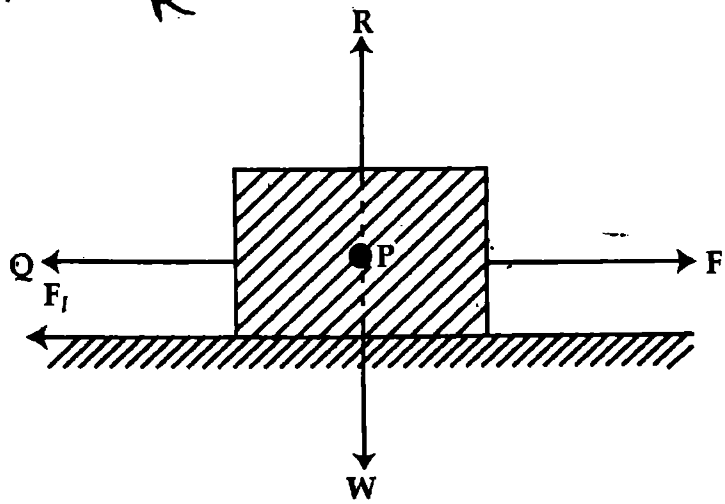
চল ঘর্ষণকে আবার তিনভাগে ভাগ করা হয়েছে। যথা : (i) **আবর্ত ঘর্ষণ** (Rolling friction) ; (ii) **বিসর্প ঘর্ষণ** (Sliding friction) এবং (iii) **প্রবাহী ঘর্ষণ** (Fluid friction)।

(১) স্থিতি ঘর্ষণ (Static friction)

পরস্পরের স্পর্শে বা সংস্পর্শে থেকে একটি বস্তু যতক্ষণ অপরটির উপর স্থির থাকে, ততক্ষণ তাদের মিলন তলে যে ঘর্ষণ ক্রিয়া করে, তাকে স্থিতি ঘর্ষণ বা স্থির ঘর্ষণ বলে। এর মান শূন্য থেকে একটি নির্দিষ্ট মান পর্যন্ত হতে পারে।

$\mu_s = \frac{F}{R}$

ব্যাখ্যা ঃ ধরা যাক, একটি টেবিলের উপর একটি কাঠের ব্লক (block) রাখা আছে। ব্লকটির ওজন $\vec{W}$ টেবিলের উপর খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করছে। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে টেবিলও ব্লকটির ভারকেন্দ্র P বরাবর W-এর সমান ও বিপরীতমুখী বল $\vec{R}$ প্রয়োগ করছে। এই দুটি বল একই সরলরেখায় ক্রিয়াশীল, ফলে ব্লকটি স্থির অবস্থায় থাকবে। এখন টেবিলের সমান্তরালে ব্লকটির উপর $\vec{F}$ বল প্রয়োগ করলে যদি ব্লকটিতে কোন গতির সঞ্চার না হয়, তবে বুঝতে হবে যে ঐ বলের বিপরীতে সমান মানের একটি বল ব্লকটিতে ক্রিয়া করছে। এ বলটিই স্থিতি ঘর্ষণ।



চিত্র ৪.১৩

এবার প্রযুক্ত বল $\vec{F}$-কে আস্তে আস্তে বাড়ানো হলে দেখা যাবে $\vec{F}$-এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য ব্লকটির মধ্যে গতির সঞ্চার হওয়ার উপক্রম হয়েছে। ঐ নির্দিষ্ট মানের চেয়ে প্রযুক্ত বলের মান বেশি হলেই ব্লকটিতে গতির সৃষ্টি হবে। $\vec{F}$-এর যে মানের জন্য ব্লকটিতে গতির সঞ্চার হওয়ার উপক্রম হয়, ঐ অবস্থায় ঘর্ষণ বলের মানকে সীমান্ত ঘর্ষণ বলে।

সুতরাং সীমান্ত ঘর্ষণের নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেয়া যায় ঃ

সংজ্ঞা ঃ পরস্পরের সংস্পর্শে অবস্থিত দুটি বস্তুর একটি অপরটির উপর দিয়ে গতিশীল হওয়ার আগের মুহূর্তে তার গতিরোধমূলক যে বলের সৃষ্টি হয় তাকে সীমান্ত ঘর্ষণ বলে। অন্যভাবে বলা যায়, **স্থিতি ঘর্ষণের সর্বোচ্চ মানই সীমান্ত ঘর্ষণ**। একে F_l দ্বারা সূচিত করা হয়।

স্থিতি ঘর্ষণের সূত্র

Laws of static friction

স্থিতি ঘর্ষণ কতকগুলো নিয়ম মেনে চলে। এদেরকে স্থিতি ঘর্ষণের সূত্র বলে। সূত্রগুলো নিচে দেয়া হল ঃ

(১) স্থিতি ঘর্ষণ বস্তুর গতির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে।

(২) স্থিতি ঘর্ষণের পরিমাণ স্বয়ং সামঞ্জস্যপূর্ণ অর্থাৎ গতি রোধের নিমিত্তে যে পরিমাণ বলের প্রয়োজন ঠিক সে পরিমাণ বলই ক্রিয়া করে।

(৩) সীমাস্থ ঘর্ষণ সর্বদা অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক।

(৪) ঘর্ষণের মান স্পর্শতলের প্রকৃতি ও অবস্থার উপর নির্ভর করে।

(৫) ঘর্ষণ বলের মান স্পর্শতলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে না।

স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক
Coefficient of static friction

সংজ্ঞা ঃ পরস্পরের সংস্পর্শে অবস্থিত দুটি বস্তুর সীমাস্থ ঘর্ষণ এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার অনুপাতকে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক বলে। একে μ দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি সীমাস্থ ঘর্ষণ = $\vec{F_l}$ এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া = $\vec{R}$।

$$\text{স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক} = \frac{\text{সীমাস্থ ঘর্ষণ}}{\text{অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া}}$$

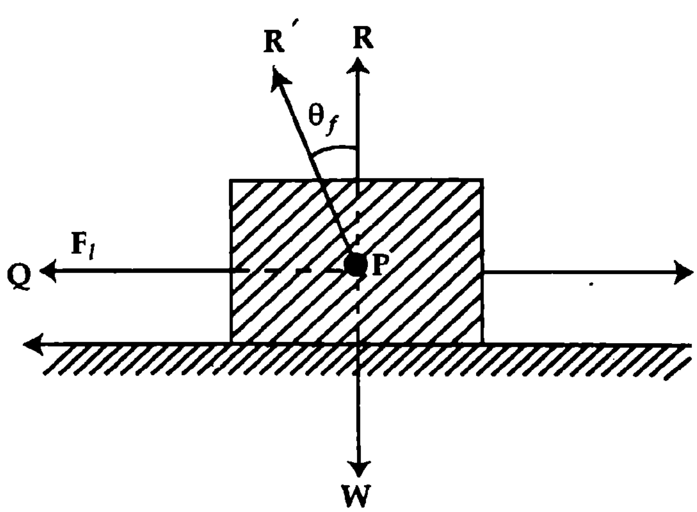
বা, $\boxed{\mu_s = \dfrac{F_l}{R} = \text{ধ্রুব সংখ্যা।}}$ (22)

এর কোন একক নেই। এটি একটি সংখ্যা জ্ঞাপক রাশি।

ঘর্ষণ কোণ (Angle of friction) ঃ সীমাস্থ ঘর্ষণের ক্ষেত্রে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া ও সীমাস্থ ঘর্ষণের লব্ধিকে 'লব্ধি প্রতিক্রিয়া' বলে। এই লব্ধি প্রতিক্রিয়া ও অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার মধ্যবর্তী কোণকে ঘর্ষণ কোণ বলে।

সংজ্ঞা ঃ সীমাস্থ ঘর্ষণের ক্ষেত্রে ঘর্ষণ বল এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া লব্ধির সাথে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঘর্ষণ কোণ বলে। একে θ_f দ্বারা সূচিত করা হয়।

চিত্র ৪'১৪-এ সীমাস্থ ঘর্ষণ F_l এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R-এর লব্ধি প্রতিক্রিয়া R'। সংজ্ঞানুসারে, লব্ধি প্রতিক্রিয়া R' এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R-এর মধ্যবর্তী কোণ θ_f হচ্ছে ঘর্ষণ কোণ।



চিত্র ৪'১৪

ঘর্ষণ কোণের মান নির্ণয় ঃ চিত্র হতে

$F_l = R' \sin\theta_f$ (23)

এবং $R = R' \cos\theta_f$ (24)

সমীকরণ (24)-কে (23) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{R' \sin\theta_f}{R' \cos\theta_f} = \frac{F_l}{R}$$

বা, $\tan\theta_f = \dfrac{F_l}{R}$ (25)

বা, $\theta_f = \tan^{-1}(F_l/R)$ (26)

আবার, ঘর্ষণ গুণাঙ্ক $\mu_S = \dfrac{F_l}{R}$

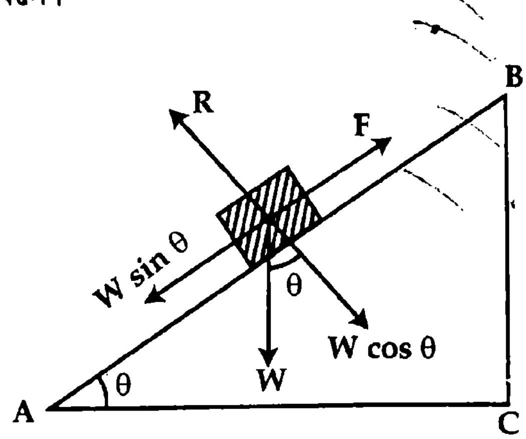
$\therefore \boxed{\theta_f = \tan^{-1}\mu_S}$ (27)

এটিই হল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক এবং ঘর্ষণ কোণের রাশিমালা।

স্থিতি বা নিশ্চল কোণ (Angle of repose) ঃ

সংজ্ঞা ঃ অনুভূমিকের সাথে নত তলের যে কোণের জন্য নত তলের উপরিস্থিত কোন বস্তু গতিশীল হওয়ার উপক্রম হয়, সেই কোণকে স্থিতি বা নিশ্চল কোণ বলে।

ব্যাখ্যা ঃ চিত্র ৪.১৫-এ একটি বস্তু AB নত তলের সাথে θ কোণে রাখা আছে। মনে করি বস্তুটির ওজন $\vec{W}$, ঘর্ষণ বল $\vec{F}$ এবং প্রতিক্রিয়া বল $\vec{R}$। বস্তুর ওজন $\vec{W}$-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়। নত তলের লম্বদিকে W-এর উপাংশ W cos θ এবং নত তল বরাবর উপাংশ W sin θ। W cos θ প্রতিক্রিয়া বল R-এর বিপরীত দিকে এবং W sin θ ঘর্ষণ বল F-এর বিপরীত দিকে ক্রিয়াশীল। বস্তুটি যেহেতু স্থিতি অবস্থায় আছে,



চিত্র ৪.১৫

অতএব, $W \sin\theta = F$ (i)

এখন θ কোণ বাড়তে থাকলে W sin θ বৃদ্ধি পাবে। ফলে সমীকরণ (i) অনুসারে F-এর মান বাড়বে। ধরা যাক, একটি নির্দিষ্ট কোণ θ_s-এর জন্য বস্তুটি গতিশীল হওয়ার উপক্রম হয়, অর্থাৎ যখন $\theta = \theta_S$, তখন $F = F_l$। θ_S কোণই স্থিতি বা নিশ্চল কোণ। সুতরাং সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$W \sin\theta_S = F_l \qquad (ii)$$

এ অবস্থায় $W \cos\theta_S = R$ (iii)

সমীকরণ (ii)-কে সমীকরণ (iii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\tan\theta_S = \frac{F_l}{R} = \mu_S$$

বা, $$\theta_S = \tan^{-1}\left(\frac{F_l}{R}\right) = \tan^{-1}(\mu_S) \qquad (28)$$

সমীকরণ (27) ও (28) হতে পাই,

$$\theta_S = \theta_f$$

অর্থাৎ **ঘর্ষণ কোণ ও স্থিতি বা নিশ্চল কোণ পরস্পর সমান।**

উল্লেখ্য ঃ স্থিতি কোণ শুধুমাত্র নত তলের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। কিন্তু ঘর্ষণ কোণ সমতল ও নত তল উভয়ের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

৪.১৪ চল ঘর্ষণ বা গতীয় ঘর্ষণ
Kinetic friction

সংজ্ঞা ঃ পরস্পরের স্পর্শে বা সংস্পর্শে থেকে একটি বস্তু অপরটির উপর দিয়ে চলাচল করার সময় যে ঘর্ষণের সৃষ্টি হয়, তাকে চল ঘর্ষণ বা গতীয় ঘর্ষণ বলে। চল ঘর্ষণ বা গতীয় ঘর্ষণ সীমাস্থ স্থিতি ঘর্ষণের চেয়ে কম।

গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণের সূত্র
Laws of kinetic friction

গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণ কতকগুলো সূত্র মেনে চলে। এদেরকে চল ঘর্ষণের সূত্র বলা হয়। সূত্রগুলো নিম্নরূপ ঃ

(১) চল ঘর্ষণ সর্বদা বস্তুর গতির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে।

(২) একের সাপেক্ষে অন্যের আপেক্ষিক গতির পরিবর্তন না হলে চল ঘর্ষণ অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার সমানুপাতিক।

(৩) চল ঘর্ষণ মিলন তলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে না, মিলন তল দুটির প্রকৃতি ও অবস্থার উপর নির্ভর করে।

(৪) বেগ বেশি না হলে চল ঘর্ষণ বেগের উপর নির্ভর করে না।

চল ঘর্ষণ বা গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক
Co-efficient of kinetic friction

সংজ্ঞা ঃ গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণ ও অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার অনুপাতকে গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক বলে। একে μ_k দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি একটি তলের উপর দিয়ে একটি বস্তু সমবেগে চলছে। এ অবস্থায় ঘর্ষণ বল F_k এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R।

$$\text{গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক} = \frac{\text{গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণ বল}}{\text{অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া}}$$

বা, $\mu_k = \dfrac{F_k}{R}$ = একটি ধ্রুবক। ... (29)

এর কোন একক নেই। এটি একটি সংখ্যা জ্ঞাপক রাশি।

গতীয় বা চল ঘর্ষণ কোণ ঃ গতীয় ঘর্ষণ ও অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার লব্ধির সাথে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে চল ঘর্ষণ কোণ বলে।

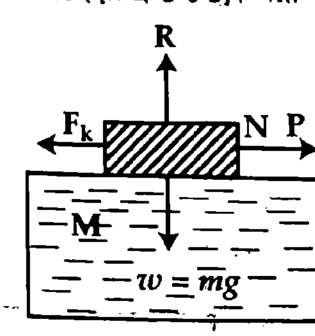
একে θ_k দ্বারা সূচিত করা হয়।

স্থিতি ঘর্ষণ কোণের সমীকরণ (সমীকরণ 27) ন্যায় দেখান যায়,

$$\theta_k = \tan^{-1}\mu_k \qquad (30)$$

বস্তুর ত্বরণ ও ঘর্ষণ গুণাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক

মনে করি, M ও N দুটি বস্তু। স্থির বস্তু M এর উপর N বস্তুটি গতিশীল রয়েছে [চিত্র ৪.১৬]। ধরা যাক, N বস্তুর ভর $=m$ এবং এর উপর প্রযুক্ত বল $= P$ ও N বস্তুর ত্বরণ $= a$।



চিত্র ৪.১৬

গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ_k হলে সমীকরণ (29) অনুসারে গতীয় ঘর্ষণ বল,

$F_k = \mu_K R$, এখানে R অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া।

সুতরাং, N বস্তুটির উপর কার্যকর বল, F = প্রযুক্ত বল — গতীয় ঘর্ষণ বল।

অর্থাৎ, $F = P - \mu_k R$ (31)

আবার, $F = ma$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{P - \mu_k R}{m} \qquad (32)$$

সমীকরণ (32) হতে আমরা পাই,

(i) গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক μ_k বেশি হলে ত্বরণ কম হবে।

(ii) $P - \mu_K R = 0$, অর্থাৎ $P = \mu_k R$ হলে, ত্বরণ শূন্য হবে। এক্ষেত্রে বস্তুটি সমবেগে চলবে।

(iii) বস্তুর ভর m তথা অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R বেশি হলে ত্বরণ কম হবে।

৪.১৫ আবর্ত ঘর্ষণ ও প্রবাহী ঘর্ষণ
Rolling friction and fluid friction

আবর্ত ঘর্ষণ ঃ যখন কোন বস্তু অপর কোন তলের উপর দিয়ে গড়িয়ে চলে, তখন যে ঘর্ষণের সৃষ্টি হয় তাকে আবর্ত ঘর্ষণ বলে।

উদাহরণ : ফুটবল, মার্বেল গুটি, লন-রোলার ইত্যাদি মাটির উপর দিয়ে চলার সময় এই ধরনের ঘর্ষণ সৃষ্টি হয়।

প্রবাহী ঘর্ষণ : যদি কোন তরল বা বায়বীয় পদার্থের গতিপথে একটি স্থির বস্তু থাকে কিংবা কোন গতিশীল বস্তু তরল বা বায়বীয় পদার্থের ভেতর দিয়ে যেতে চায় তখন যে ঘর্ষণের সৃষ্টি হয়, তাকে প্রবাহী ঘর্ষণ বলে।

উদাহরণ : স্থির তলের উপর দিয়ে তরল বা বায়বীয় পদার্থ প্রবাহিত হবার সময়, নদীতে নৌকা চলার সময় পানি ও নৌকার মধ্যে এ ধরনের ঘর্ষণ সৃষ্টি হয়।

৪·১৬ ঘর্ষণের সুবিধা এবং অসুবিধা
Advantages and disadvantages of friction

কোন কোন ক্ষেত্রে ঘর্ষণজনিত বল আমাদের উপকারে আসে এবং কোন কোন ক্ষেত্রে অসুবিধা সৃষ্টি করে। এখন আমরা ঘর্ষণের সুবিধা ও অসুবিধা আলোচনা করব।

সুবিধা : ঘর্ষণজনিত বাধার জন্যে রাস্তায় হাঁটা, কাঠে স্ক্রু পুঁতে রাখা, বেল্টের সাহায্যে যন্ত্রপাতি ঘুরানো, দেয়ালে ঠেস দিয়ে মাটিতে মই রাখা, দেয়াশলাই হতে আগুন পাওয়া, সেতারে ঝংকার তোলা, যাঁতায় গম পেষা সম্ভব হয়। কোন কোন ক্ষেত্রে যেমন উঁচু রাস্তায় বালি ছড়িয়ে যানবাহন উঠাতে, ব্রেক চেপে গাড়ি থামাতে ঘর্ষণ বল বাড়ানোর প্রয়োজন হয়ে পড়ে।

অসুবিধা : যন্ত্রপাতির পরস্পরের সংস্পর্শে অবস্থিত বিভিন্ন অংশের ঘর্ষণের ফলে প্রচুর তাপের সৃষ্টি হয় এবং যন্ত্রপাতি দ্রুত ক্ষয়প্রাপ্ত হয়। এ কারণে যন্ত্রপাতির পরস্পর সংস্পর্শে অবস্থিত গতিশীল অংশে সুবিধামত পিচ্ছিল তরল পদার্থ অথবা ধাতব পদার্থের গুঁড়া, অথবা গোলাকার ধাতব পদার্থ ব্যবহার করে ঘর্ষণ বল কমিয়ে দেয়া হয়। সাইকেলের চাকায় যে বর্তুলাকার ধাতব পদার্থ থাকে তা অক্ষদণ্ড ও চাকার মধ্যকার ঘর্ষণ বল কমিয়ে দেয় এবং যন্ত্রকে দীর্ঘায়ু করে।

স্মরণিকা

জড়তা : প্রত্যেক বস্তুই এর নিজের স্থিতি বা গতিজনিত অবস্থাকে অক্ষুণ্ন রাখার চেষ্টা করে। বস্তুর এই ধর্মকে জড়তা বলে। জড়তা দু প্রকার, যথা—(১) স্থিতি জড়তা ও (২) গতি জড়তা।

বল : বল সেই বাহ্যিক কারণ যা কোন একটি বস্তুর স্থিতি বা গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা পরিবর্তন ঘটাতে চায়। বল = ভর × ত্বরণ।

মৌলিক বল : যে বল মূল বা অকৃত্রিম তার নাম মৌলিক বল। মৌলিক বল চার ধরনের। যথা—(১) মহাকর্ষ বল (২) তড়িৎ-চুম্বকীয় বল ; (৩) সবল নিউক্লীয় বল ও (৪) দুর্বল নিউক্লীয় বল।

ভরবেগ : কোন একটি বস্তুর ভর ও বেগের গুণফল দ্বারা ভরবেগ মাপা হয়।

ভরবেগের নিত্যতা সূত্র : দুই বা ততোধিক বস্তুকে ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ছাড়া অন্য কোন বাহ্যিক বল ক্রিয়াশীল না হলে যে কোন একদিকে ঐ বস্তুগুলোর মোট রৈখিক ভরবেগের কোন পরিবর্তন হবে না। এটিই ভরবেগের নিত্যতা সূত্র।

নিউটনের গতিসূত্র :

১ম সূত্র : বাইরে থেকে কোন বল বস্তুর উপর প্রযুক্ত না হলে স্থির বস্তু স্থির থাকে এবং গতিশীল বস্তু সমবেগে সরলরেখায় চলতে থাকে।

২য় সূত্র : কোন একটি বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত (লব্ধি) বলের সমানুপাতিক এবং বল যে দিকে প্রযুক্ত হয় ভরবেগের পরিবর্তন সেদিকে ঘটে।

৩য় সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া আছে।

ঘাত বল : খুব কম সময়ের জন্য প্রচণ্ড বল ক্রিয়া করলে তাকে ঘাত বল বলে।

বলের ঘাত : ঘাত বল ও বলের ক্রিয়া কালের গুণফলকে বলের ঘাত বা শুধু ঘাত বলে।

বল ত্রিভুজ সূত্র : এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল তিনটি বল এমন হয় যে তাদেরকে পরিমাণে ও দিকে একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে তিনটি বাহু দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে এরা সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করে।

বলের ভারসাম্য : কোন বিন্দু বা বস্তুতে দুই বা ততোধিক বল ক্রিয়া করায় উক্ত বিন্দু বা বস্তুতে বলের লব্ধি যদি শূন্য হয়, তবে তাকে বলের ভারসাম্য বলে।

লামীর উপপাদ্য ঃ এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে প্রত্যেকটি বল অপর বল দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইনের সমানুপাতিক হবে। একে লামীর উপপাদ্য বলে।

ঘর্ষণ বল ঃ যখন একটি বস্তু অপর একটি বস্তুর সংস্পর্শে থেকে চলতে থাকে বা চলতে চেষ্টা করে তখন তাদের মিলনতলে গতি বা গতির প্রয়াস যে দিকে তার বিপরীতে যে বিরুদ্ধ বলের সৃষ্টি হওয়ায় বস্তুর গতি বাধাপ্রাপ্ত হয় তাকে তাদের মিলন তলের ঘর্ষণ বল বলে।

সীমাস্থ ঘর্ষণ বল বা ঋণ ঘর্ষণ ঃ পরস্পরের সংস্পর্শে অবস্থিত দুটি বস্তুর একটি অপরটির উপর দিয়ে গতিশীল হওয়ার আগের মুহূর্তে তার গতিরোধমূলক যে বলের সৃষ্টি হয় তাকে সীমাস্থ ঘর্ষণ বল বা সীমাস্থ ঘর্ষণ বলে। স্থিতি ঘর্ষণের সর্বোচ্চ মানই সীমাস্থ ঘর্ষণ।

চল ঘর্ষণ বা গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক ঃ গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণ ও অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার অনুপাতকে গতীয় ঘর্ষণ বা চল ঘর্ষণ গুণাঙ্ক বলে।

গতীয় বা চল ঘর্ষণ কোণ ঃ ঘর্ষণ বল এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার লব্ধির সাথে অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে চল ঘর্ষণ কোণ বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

ভরবেগ, $\vec{p} = m\vec{v}$ (1)

বল, $\vec{F} = m\vec{a}$

$= m \dfrac{(\vec{v} - \vec{v}_0)}{t}$ (2)

J = বলের ঘাত = $m\vec{v} - m\vec{u} = \vec{F} \times t$ (3)

রকেটের ত্বরণ, $\vec{a} = \dfrac{\vec{v}_r}{m}\left(\dfrac{dm}{dt}\right) - \vec{g}$ (4)

ভরবেগের নিত্যতা ঃ $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ (5)

বা, $\sum m\vec{v}$ = ধ্রুব ভেক্টর। (6)

$m\vec{v} = -M\vec{V}$ (7)

বলের ভারসাম্য ঃ $\sum \vec{F} = 0$ (8)

ঘর্ষণ ঃ $\mu_s = \dfrac{F_l}{R}$ (9)

$\mu_k = \dfrac{F_k}{R}$ (10)

$\mu = \tan \theta_f$ (11)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। একটি বস্তুর উপর 5 N বল 10 s ক্রিয়া করে। ভরবেগের পরিবর্তন নির্ণয় কর।

মনে করি, ভরবেগের পরিবর্তন $= m\vec{v} - m\vec{v}_0$

আমরা পাই, $F = \dfrac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{t}$

এখানে,
$F = 5\text{ N}$
$t = 10\text{ s}$

$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F} \times t$

ভরবেগের পরিবর্তন $= mv - mv_0 = F \times t = 5\text{N} \times 10\text{ s}$

$= 50\text{ kg ms}^{-1}$

২। 20 kg ভরের একটি বস্তুর উপর কি পরিমাণ সমবল ক্রিয়া করলে তার বেগ 10s-এ $(4\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k})\ ms^{-1}$ হতে বৃদ্ধি পেয়ে $(8\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})\ ms^{-1}$ হবে ?

ধরি বলের মান = $\vec{F}$

আমরা পাই, $\vec{F} = m\left(\dfrac{\vec{v}-\vec{v}_0}{t}\right)$

$$\vec{F} = 2\cancel{0}\,kg \times \frac{(4\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k})\,ms^{-1}}{1\cancel{0}\,s}$$

$$= 2(4\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k})\,N$$

বা, $|F| = \{2\sqrt{4^2+8^2+(-8)^2}\}\,N$

$= 24\,N$

এখানে $\vec{v}-\vec{v}_0$

$= \{(8\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k})-(4\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k})\}\,ms^{-1}$

$= (4\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k})\,ms^{-1}$

$t = 10\,s$

$m = 2\,kg$

৩। 50 kg ভরের এক ব্যক্তি 950 kg ভরের একটি গাড়ি স্থিরাবস্থান হতে প্রথম 10 sec সমত্বরণে চালান। অতঃপর 10 minute সমবেগে চালানোর পর ব্রেক চেপে 5 sec সময়ের মধ্যে গাড়িটি থামান। যাত্রা শুরুর 2 sec পরে গাড়ির বেগ 4 ms^{-1} হলে গাড়ি কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং গাড়ি থামাতে প্রযুক্ত বলের মান নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০২]

লক্ষণীয় যে, গাড়িটি যাত্রা শুরুর পর যে ত্বরণে চলে 4 sec-এ 8 ms^{-1} বেগ প্রাপ্ত হয়, সেই ত্বরণে প্রথম 10 sec চলে।

$v = v_0 + a_1 t$

বা, $a_1 = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{4-0}{2} = 2\,ms^{-2}$

এখন, 2 ms^{-2} ত্বরণে 10 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = 0\times 10 + \frac{1}{2}\times 2\times (10)^2$

$= 100\,m$

এখানে,

আদি বেগ, $v_0 = 0$

সময়, $t = 2\,sec$

শেষ বেগ, $v = 4\,ms^{-1}$

ত্বরণ, $a_1 = ?$

প্রশ্নানুসারে,

10 s পরে গাড়িটি যে বেগ প্রাপ্ত হবে সেই বেগে পরবর্তী 10 minute চলবে। এই বেগ v_1 হলে আমরা পাই,

$v_1 = v_0 + a_1 t_1 = 0 + 2\times 10 = 20\,ms^{-1}$

12,1

10 minute-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_2 = v_1 t_2 = 20\times 10\times 60\,m$

$= 12000\,m$

এখানে, সমবেগ, $v_1 = 20\,ms^{-1}$

সময়, $t_2 = 10\,min = 10\times 60\,s$

দূরত্ব, $s_2 = ?$

শেষ 5 sec-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_3 = \left(\dfrac{v_1+v_2}{2}\right)t_3$

$= \left(\dfrac{20+0}{2}\right)\times 5 = 50\,m$

এখানে,

আদিবেগ, $v_1 = 20\,ms^{-1}$

শেষ বেগ, $v_2 = 0$

সময়, $t_3 = 5\,sec$

দূরত্ব, $s_3 = ?$

অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব,

$s = s_1 + s_2 + s_3$

$= (100 + 12000 + 50)\,m = 12150\,m$

আবার, আমরা জানি,

$F = ma$

এবং $v_2 = v_1 + at_3$

বা, $a = \dfrac{v_2 - v_1}{t_3}$

$a = \dfrac{0-20}{5}\,ms^{-2}$

$= -4\,ms^{-2}$

এখানে,

ভর = ব্যক্তির ভর + গাড়ির ভর

$= (50+950)\,kg = 1000\,kg$

প্রযুক্ত বল, $F = ?$

ঋণাত্মক ত্বরণ, $a = ?$

প্রযুক্ত বল,

$F = ma$

$= 1000\times(-4)\,N$

$= -4000\,N$

গতির বিপরীতে ক্রিয়াশীল হওয়ায় প্রযুক্ত বল ঋণাত্মক।

BG & JEWEL

৪। 5 টনের একটি ট্রাক ঘণ্টায় 36 km বেগে চলছে। এটি 4 m দূরত্বে থামাতে হলে কত বলের প্রয়োজন হবে ? [ব. বো. ২০০১]

m v_0 s F

আমরা জানি,

$F = ma$ (1)

এবং $v^2 = v_0^2 - 2as$ (2)

সমীকরণ (2) হতে পাই,

$0 = (10\ ms^{-1})^2 - 2a \times (4\ m)$

$a = \dfrac{100\ m^2s^{-2}}{8m} = 12.5\ ms^{-2}$

$F = ma = 5000\ kg \times 12.5\ ms^{-2} = 62.500\ N$

এখানে,

আদিবেগ, $v_0 = 36\ kmh^{-1} = \dfrac{36 \times 1000}{60 \times 60} = 10\ ms^{-1}$

ট্রাকের ভর, $m = 5$ টন $= 5000\ kg$

দূরত্ব, $s = 4\ m$

শেষ বেগ, $v = 0$

বাধাদানকারী বল, $F = ?$

৫। 4N-এর একটি বল 2 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। ত্বরণ নির্ণয় কর। 5 s-এ বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করে ও কত বেগ লাভ করে ?

মনে করি ত্বরণ = $\vec{a}$

আমরা পাই, $\vec{F} = m\vec{a}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই, $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{4\ N}{2\ kg} = 2\ ms^{-2}$

আবার, $\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,t$

ও $s = \vec{v_0}\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$

5 s পরের বেগ, $v = 0 + 2\ ms^{-2} \times 5\ s$

$= 10\ ms^{-1}$

এখানে, বল $\vec{F} = 4\ N$

ভর, $m = 2\ kg$

এখানে, $\vec{v_0} = 0$

$t = 5\ s$

ও 5 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0 \times 5s + \frac{1}{2} \times 2\ ms^{-2} \times (5\ s)^2 = 25\ m$

৬। 900 kg ভরের একটি মোটর ট্রাক ঘণ্টায় 60 km বেগে চলে। ব্রেক চেপে ট্রাকটিকে 50 m দূরে থামানো হল। যদি মাটির ঘর্ষণজনিত বল 200 N হয়, তবে ব্রেকজনিত বলের মান নির্ণয় কর।

মনে করি মোট বাধাদানকারী বল = F

আমরা পাই,

$F = F_1 + F_2$ (1)

পুন, $v^2 = v_0^2 - 2as$

কাজেই $0^2 = \left(\dfrac{50}{3}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot 50$

বা, $a = \dfrac{50 \times 50}{9 \times 100} = \dfrac{25}{9}\ m/s^2$

এখানে, $m = 900\ kg$

$v = 0$

$v_0 = \dfrac{60 \times 1000}{60 \times 60} = \dfrac{50}{3}\ m/s$

$s = 50\ m$

F_1 = ব্রেকজনিত বল এবং

F_2 = মাটির ঘর্ষণজনিত বল = 200 N

এখন $F = ma = 900 \times \dfrac{25}{9} = 2500\ N$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $2500 = F_1 + 200$

বা, $F_1 = 2500 - 200 = 2300\ N$

ব্রেকজনিত বল $= 2300\ N$

৭। স্থিরাবস্থা থেকে 40 kg ভরবিশিষ্ট কোন বস্তু নির্দিষ্ট বলের ক্রিয়ার ফলে 2 s পর 15 ms^{-1} বেগ অর্জন করে। এর উপর কি পরিমাণ বল কাজ করছে এবং 4 s পর এর গতিশক্তি কত হবে ? [য. বো. ২০০১]

t V F t Ek

আমরা জানি,

$v = v_0 + at$

$15 = 0 + a \times 2$

$a = \dfrac{15}{2}\ ms^{-2}$

এখন, $F = ma$

$= 40 \times \dfrac{15}{2}$

$= 300\ N$

এখানে,

$v_0 = 0$

$v = 15\ ms^{-1}$

$t = 2s$

$m = 40\ kg$

$a = ?$

$F = ?$

আবার, $t = 4\text{ s}$ হলে,

$$v = v_0 + at$$

$$v = 0 + \frac{15}{2} \times 4$$

$$= 30\text{ ms}^{-1}$$

$$\text{K. E.} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times (30)^2 = 18000\text{ J}$$

৮। 1000 kg ভরের একটি মোটর গাড়ি ঘণ্টায় 30 ms⁻¹ বেগে চলাকালে রাস্তার বাঁক ঘুরে 31 m দূরে একটি শিশুকে রাস্তার উপর দেখতে পায়। মোটর গাড়ির চালক সঙ্গে সঙ্গে ইঞ্জিন বন্ধ করে দিল এবং ব্রেক চাপল। ফলে গাড়িটি শিশু হতে 1m পিছনে থেমে গেল। মন্দনকারী বল নির্ণয় কর। গাড়িটি থামাতে কত সময় লাগবে ?

মনে করি মন্দনকারী বল = F

আমরা পাই, $F = ma$ (1)

এবং $v^2 = v_0^2 - 2as$ (2)

এখানে, $m = 1000\text{ kg}$, $v_0 = 30\text{ ms}^{-1}$, $v = 0$, $s = (31-1)\text{ m} = 30\text{ m}$

সমীকরণ (2) হতে পাই, $0 = (30\text{ ms}^{-1})^2 - 2a \times (30\text{ m})$

বা, $a = \frac{(30\text{ ms}^{-1})^2}{2 \times 30} = 15\text{ ms}^{-2}$

$F = \frac{mv^2}{2s}$

সমীকরণ (1)-এ m ও a-এর মান বসিয়ে পাই,

$$F = 1000\text{ kg} \times 15\text{ ms}^{-2} = 15000\text{ N}$$

পুনরায় নির্ণেয় সময় t হলে সমীকরণ, $v = v_0 - at$ হতে পাই,

$$0 = 30\text{ ms}^{-1} - 15\text{ ms}^{-2} \times t$$

$$t = \frac{30\text{ ms}^{-1}}{15\text{ ms}^{-2}} = 2\text{ s}$$

৯। 6 kg ভরের একটি বন্দুক হতে 0·01 kg ভরের একটি গুলি 300 ms⁻¹ বেগে বের হয়ে গেল। বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ = V

ভরবেগের নিত্যতা সূত্র হতে আমরা পাই,

$MV = mv$ (1)

এখানে, $M = 6\text{ kg}$, $m = 0{\cdot}01\text{ kg}$, $v = 300\text{ ms}^{-1}$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $V = \frac{mv}{M} = \frac{0{\cdot}01\text{ kg} \times 300\text{ ms}^{-1}}{6\text{ kg}} = 0{\cdot}5\text{ ms}^{-1}$

১০। 5 kg ভরের একটি বস্তু 4 ms⁻¹ বেগে উত্তর দিকে চলছে। 3 kg ভরের অপর একটি বস্তু 2 ms⁻¹ বেগে দক্ষিণ দিকে চলছে। কোন এক সময় বস্তু দুটির মধ্যে সংঘর্ষের ফলে এরা মিলে এক হয়ে গেল। মিলিত বস্তুটি কত বেগে, কোন্ দিকে চলবে ? [চ. বো. ২০০১]

প্রথম বস্তুর বেগ ধনাত্মক বিবেচনা করলে দ্বিতীয় বস্তুর বেগ ঋণাত্মক।

আমরা জানি,

$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$ (1)

এখানে, $m_1 = 5\text{ kg}$, $m_2 = 3\text{ kg}$, $u_1 = 4\text{ ms}^{-1}$, $u_2 = -2\text{ ms}^{-1}$, $v_1 = v_2 = v$

মনে করি, বস্তুদ্বয় মিলিত হবার পর বেগ = v

$$5 \times v + 3v = 5 \times 4 + 3 \times (-2)$$

বা, $8v = 20 - 6$

বা, $8v = 14$

$$v = \frac{14}{8} = 1{\cdot}75\text{ ms}^{-1}$$

মিলিত বস্তু $1{\cdot}75\text{ ms}^{-1}$ বেগে উত্তর দিকে চলবে।

১১। 40 kg ও 60 kg ভরের দুটি বস্তু যথাক্রমে 10 ms⁻¹ ও 5 ms⁻¹ বেগে পরস্পর বিপরীত দিক থেকে আসার সময় একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তুদ্বয় একত্রে যুক্ত হয়ে কত বেগে চলবে ?

[ব. বো. ২০০২; সি. বো. ২০০২ ; চ. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০০; রা. বো. ২০০১]

প্রথম বস্তুর বেগ ধনাত্মক বিবেচনা করলে দ্বিতীয় বস্তুর বেগ ঋণাত্মক।

আমরা জানি, $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$ (1)

মনে করি, যুক্ত অবস্থায় বস্তুদ্বয়ের বেগ = v

$40 \times v + 60v = 40 \times 10 + 60(-5)$

বা, $100v = 400 - 300$

বা, $100v = 100$

$v = 1\ \text{ms}^{-1}$

এখানে,
$m_1 = 40\ \text{kg}$
$m_2 = 60\ \text{kg}$
$u_1 = 10\ \text{ms}^{-1}$
$u_2 = -5\ \text{ms}^{-1}$
$v_1 = v_2 = v$

১২। একজন সাইকেল চালক 8 ms⁻¹ বেগে চলাকালে সাইকেল চালানো বন্ধ করে লক্ষ করেন যে 49 m দূরত্ব অতিক্রমের পর সাইকেলটি থেমে যায়। সাইকেলের টায়ার ও রাস্তার মধ্যকার ঘর্ষণ বল নির্ণয় কর। [আরোহীসহ সাইকেলের ভর = 147 kg]

ধরি ঘর্ষণ বল = F ও F-এর জন্য সৃষ্ট মন্দন = a

আমরা পাই, $v^2 = v_0^2 - 2as$ (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$F = ma = \frac{m(v_0^2 - v^2)}{2s}$$

$$= 147\ \text{kg}\ \frac{\{(8\ \text{ms}^{-1})^2 - 0\}}{2 \times 49\ \text{m}}$$

$$= 96\ \text{N}$$

এখানে, $v = 0$
$v_0 = 8\ \text{ms}^{-1}$
$m = 147\ \text{kg}$
$s = 49\ \text{m}$

P.V

১৩। একটি বস্তু স্থিরাবস্থায় ছিল। 15 N-এর একটি বল এর উপর 4 সেকেন্ড ধরে কাজ করে এবং তারপর আর কোন কাজ করল না। বস্তুটি এরপর 9 সেকেন্ডে 54 m দূরত্ব গেল। বস্তুটির ভর বের কর। [চ. বো. ২০০৩]

যেহেতু বলটি বস্তুর উপর 4s ক্রিয়ার পর আর ক্রিয়া করে না সেহেতু বস্তুটি শেষ 9s সময় সমবেগে যাবে।

$$v = \frac{s}{t_2}$$

$$= \frac{54}{9}$$

$$= 6\ \text{ms}^{-1}$$

1510

এখানে,
$F = 15\ \text{N}$
$t_1 = 4\ \text{s}$
$t_2 = 9\ \text{s}$
$s = 54\ \text{m}$
$v_0 = 0$ (যেহেতু বস্তু স্থির)

আমরা জানি, $v = v_0 + at_1$

বা, $6 = 0 + a \times 4$

বা, $6 = 4a$

বা, $a = \frac{6}{4}$

$a = 1{\cdot}5\ \text{ms}^{-2}$

আবার, $F = ma$

বা, $15 = m \times 1{\cdot}5$

বা, $m = \frac{15}{1{\cdot}5}$

$m = 10\ \text{kg}$

১৪। 10 N এর একটি বল 2 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। যদি 4 s পর বলের ক্রিয়া বন্ধ হয়ে যায় তবে প্রথম থেকে 8s-এ বস্তুটি কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ? [চ. বো. ২০০০]

আমরা জানি, $F = ma$

বা, $a = \frac{F}{m}$

$= \frac{10}{2} = 5\ \text{ms}^{-2}$

১ম 4 s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_1 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

$= 0 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times 4^2$

$= 40\ \text{m}$

১ম 4 s পর বস্তুটির বেগ,

$v = v_0 + at$

$= 0 + 5.4$

$= 20\ \text{ms}^{-1}$

দেয়া আছে,
$F = 10\ \text{N}$
$m = 2\ \text{kg}$

১ম ক্ষেত্রে,

আদিবেগ, $v_0 = 0$

সময় $t = 4\text{s}$

ত্বরণ, $a = ?$

দূরত্ব, $s_1 = ?$

২য় ক্ষেত্রে,

বেগ, $v = 20\ \text{ms}^{-1}$

সময়, $t = 4\text{s}$

দূরত্ব, $s_2 = ?$

পরবর্তী 4s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব,

$s_2 = vt = 20 \times 4$

$= 80\,\text{m}$

১ম হতে মোট 8s-এ অতিক্রান্ত দূরত্ব

$s = s_1 + s_2$

$= 40 + 80$

$= 120\,\text{m}$

P.V

১৫। একটি বস্তুর উপর 7N মানের একটি বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুটি 3 ms^{-2} ত্বরণ প্রাপ্ত হয়। বস্তুটির ভর কত ? বস্তুটির উপর 5N মানের আর একটি বল 7N মানের বলের সাথে 60° কোণে প্রয়োগ করলে বস্তুটির ত্বরণ কত হবে ? [সি. বো. ২০০৩]

প্রথম অংশ ঃ

আমরা জানি,

$F = ma$

$7 = m \times 3$

$m = \frac{7}{3} = 2{\cdot}33\,\text{kg}$

এখানে,
$F = 7\text{N}$
$a = 3\,\text{ms}^{-2}$
$m = ?$

দ্বিতীয় অংশ ঃ

মনে করি, লব্ধি বল R

এখন, $R = (P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}$

$R = (7^2 + 5^2 + 2 \times 7 \times 5 \times \cos 60°)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(49 + 25 + 2 \times 7 \times 5 \times \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (74 + 35)^{\frac{1}{2}} = (109)^{\frac{1}{2}}$

$= 10{\cdot}44\,\text{N}$

এখানে,
$P = 7\text{N}$
$Q = 5\text{N}$
$\alpha = 60°$

আবার, $R = ma'$

$a' = \frac{R}{m}$

$= \frac{10{\cdot}44}{2{\cdot}33}\,\text{ms}^{-2}$

$= 4{\cdot}48\,\text{ms}^{-2}$

এখানে,
$R = 10{\cdot}90\text{N}$
$m = 2{\cdot}33\,\text{kg}$
$a' = ?$

উত্তর ঃ বস্তুটির ভর $2{\cdot}33$ kg এবং ত্বরণ $4{\cdot}48\,\text{ms}^{-2}$

১৬। 0·05 kg ভরের একটি বস্তু 0·2 ms^{-1} অনুভূমিক বেগে একটি খাঁড়া দেয়ালে ধাক্কা দিয়ে 0·1 ms^{-1} বেগে বিপরীত দিকে ফিরে গেল। বলের ঘাত বের কর। [ব. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)]

ধরি বলের ঘাত = J

আমরা পাই, $J = P \times t$ ও $P = \frac{m(v - v_0)}{t}$

$J = m(v - v_0)$

$J = 0{\cdot}05 \times (-\,0{\cdot}1 - 0{\cdot}2)$

$= -\,0{\cdot}015\,\text{kg-ms}^{-1}$ (ঋণচিহ্ন প্রমাণ করে যে, J ও v-এর অভিমুখ অভিন্ন)।

$|J| = 0{\cdot}015\,\text{kg-ms}^{-1}$

এখানে,
$m = 0{\cdot}05\,\text{kg}$
$v_0 = 0{\cdot}2\,\text{ms}^{-1}$
$v = -\,0{\cdot}1\,\text{ms}^{-1}$ (আদি বেগের সাপেক্ষে শেষ বেগ বিপরীতমুখী হেতু ঋণচিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে)।

P.V

১৭। 16 N-এর একটি বল 4 kg ভরের উপর 4s ক্রিয়া করে। বস্তুটির (ক) বেগের পরিবর্তন ও (খ) বলের ঘাত নির্ণয় কর।

মনে করি বেগের পরিবর্তন $= \vec{v} - \vec{v}_0$

ও বলের ঘাত $= \vec{J}$

$\vec{J} = \vec{F} \times t = m\vec{v} - m\vec{v}_0$

আমরা পাই, $\vec{F} = \frac{m(\vec{v} - \vec{v}_0)}{t}$ (1)

এখানে বল, $\vec{F} = 16\,\text{N}$
$m = 4\,\text{kg}$
$t = 4\,\text{s}$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $(v - v_0) = \frac{F \times t}{m} = \frac{16N \times 4\ s}{4\ kg} = 16\ ms^{-1}$

ও বলের ঘাত, $J = F \times t = 16N \times 4\ s$

$= 64\ Ns$ = ভরবেগের পরিবর্তন

১৮। অনুভূমিক দিকে গতিশীল 2 kg ভরের একটি লৌহ গোলক $5\ ms^{-1}$ বেগে একটি দেয়ালে লম্বভাবে ধাক্কা খেয়ে $3ms^{-1}$ বেগে বিপরীত দিকে ফিরে গেল। বলের ঘাত কত ? [ব. বো. ২০০৬]

ধরি বলের ঘাত = J

আমরা পাই,

$J = F \times t$

এবং $F = \frac{m(v - v_0)}{t}$

$J = \frac{m(v - v_0)}{t} \times t$

$= m(v - v_0)$

$J = 2 \times (-3 - 5)$

$= -16\ kg\ ms^{-1}$ [ঋণ চিহ্ন প্রমাণ করে যে J ও v-এর অভিমুখ অভিন্ন]

$|J| = 16\ kg\ ms^{-1}$

এখানে,

$m = 2\ kg$

$v_0 = 5\ ms^{-1}$

$v = -3\ ms^{-1}$

[আদি বেগের সাপেক্ষে বেগ বিপরীতমুখী হওয়ায় ঋণচিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে]

$J = ?$

১৯। $20\ ms^{-1}$ বেগে আগত 0·2kg ভরের একটি ক্রিকেট বলকে একজন খেলোয়াড় ক্যাচ (catch) ধরে 0·1s সময়ের মধ্যে থামিয়ে দিল। খেলোয়াড় কর্তৃক প্রযুক্ত গড় বল কত ?

আমরা জানি,

বলের ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

বা, $J = mv - mv_0$

বা, $Ft = mv - mv_0$

বা, $F = \frac{mv - mv_0}{t}$

$= \frac{0.2 \times 0 - 0.2 \times 20}{0.1}$

$= -20N$ [গতির বিপরীতে হওয়ায় প্রযুক্ত বল ঋণাত্মক]

এখানে,

বলটির ভর, $m = 0.2\ kg$

আদিবেগ, $v_0 = 20\ ms^{-1}$

শেষ বেগ, $v = 0$

সময়, $t = 0.1\ s$

প্রযুক্ত গড় বল, $F = ?$

২০। একটি টেবিলের উপর 1kg ভরের একটি বই আছে। টেবিলের তল বরাবর 3N বল প্রয়োগ করলে বইটি চলার উপক্রম হয়। টেবিল ও বই-এর মধ্যে স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$\mu_s = \frac{F_l}{R}$

বা, $\mu_s = \frac{3}{9.8}$

$\simeq 0.3$

এখানে,

অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া, R = বই-এর ওজন

$= 1 \times 9.8\ N$

$= 9.8N$

ঘর্ষণ বল, $F_l = 3N$

স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক, $\mu_s = ?$

২১। একটি রকেট প্রতি সেকেন্ডে 0·07 kg জ্বালানি খরচ করে। রকেট থেকে নির্গত গ্যাসের বেগ $100\ kms^{-1}$ হলে রকেটের উপর কত বল ক্রিয়া করে ? (এখানে অভিকর্ষ বলের প্রভাব উপেক্ষা করা যেতে পারে)।

দেয়া আছে,

প্রতি সেকেন্ডে জ্বালানি খরচ,

$\frac{dm}{dt} = 0.07\ kg$

এবং নির্গত গ্যাসের বেগ,

$v_r = 100\ kms^{-1} = 1 \times 10^5\ ms^{-1}$

আমরা জানি, $F = m\frac{dv}{dt} = v_r\, dm/dt - mg$

অভিকর্ষ বলের প্রভাব না থাকলে, রকেটের উপর ক্রিয়াশীল বল,

$F = v_r \frac{dm}{dt} = 1 \times 10^5\ ms^{-1} \times 0.07\ kg$

$= 7 \times 10^3\ N$

২২। একটি রকেট উর্ধ্বমুখী যাত্রার প্রথম 2 সেকেন্ডে এর ভরের $\frac{1}{50}$ অংশ হারায়। রকেট হতে নিষ্ক্রান্ত গ্যাসের গতিবেগ 2500 ms^{-1} হলে রকেটের ত্বরণ বের কর।

প্রশ্নানুসারে, $dm = \frac{m}{50}$

$dt = 2\ s$

$v_r = 2500\ ms^{-1}$

আমরা জানি,

$$m\frac{dv}{dt} = v_r\frac{dm}{dt} - mg$$

$$\text{বা, } \frac{dv}{dt} = a = \frac{v_r}{m}\left(\frac{dm}{dt}\right) - g$$

$$\text{বা, } a = \frac{2500\ ms^{-1}}{m} \cdot \frac{m}{50 \times 2\ s} - 9{\cdot}8\ ms^{-2}$$

$$= 25\ ms^{-2} - 9{\cdot}8\ ms^{-2}$$

$$= 15{\cdot}2\ ms^{-2}$$

২৩। 70 kg ভরের একটি বাক্সকে 500 N অনুভূমিক বলে মেঝের উপর দিয়ে টানা হচ্ছে। বাক্সটি যখন চলে তখন বাক্স ও মেঝের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ সহগ 0·50। বাক্সের ত্বরণ নির্ণয় কর। [কু.বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; য. বো. ২০০৪]

এখানে,
$m = 70\ kg$
$\mu = 0{\cdot}50$
অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া $= 70 \times 9{\cdot}8\ N = 686\ N$
অনুভূমিক বল, $F_1 = 500\ N$
ত্বরণ, $a = ?$

আমরা জানি,

ঘর্ষন বল, $F_k = \mu_k R$

বা, $F_k = 0{\cdot}50 \times 686\ N$

$= 343\ N$

আবার, লব্ধি বল,

$F = F_1 - F_k$

$= (500 - 343)\ N$

$= 157\ N$

এখন, $F = ma$

বা, $a = \frac{F}{m} = \frac{157\ N}{70\ kg}$

$= 2{\cdot}24\ ms^{-2}$

২৪। 4 kg ভরের একটি বস্তুকে 10 ms^{-2} ত্বরণের গতিশীল করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? [পথের ঘর্ষণ বল 2·5 N kg^{-1}] [ব. বো. ২০০১]

এখানে,

বস্তুর ভর, $m = 4\ kg$

ত্বরণ, $a = 10\ ms^{-2}$

কার্যকর বল, $F = ma = 4 \times 10 = 40N$

ঘর্ষণ বল = $2{\cdot}5\ N\ kg^{-1}$

মোট ঘর্ষণ বল, $F_K = 2{\cdot}5 \times 4 = 40N$

প্রযুক্ত বল, $P = ?$

আমরা জানি,

কার্যকর বল, $F = P - F_k$

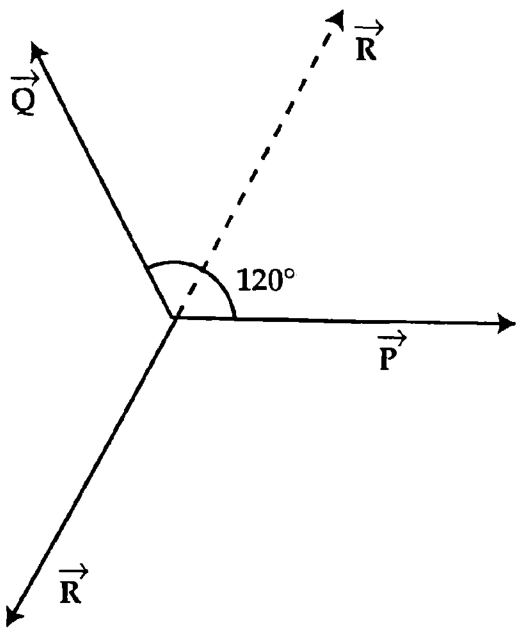
$40 = P - 10$

বা, $P = 50\ N$

প্রযুক্ত বল = 50N

২৫। তিনটি সমতলীয় বলের এককালীন ক্রিয়ায় একটি বস্তু সাম্যাবস্থায় আছে। এদের মধ্যে দুটি বলের প্রত্যেকের মান 8 N এবং বল দুটির মধ্যবর্তী কোণ $120°$। তৃতীয় বলটি নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $\Sigma \vec{F} = 0$



চিত্র ঃ ৪.১৬

মনে করি বল তিনটি $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{R}$ এবং $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ বলদ্বয়ের উভয়ের মান 8N ও তাদের মধ্যবর্তী কোণ $120°$।

তা হলে, $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

বা, $\vec{R} = -\left(\vec{P} + \vec{Q}\right)$

এ সমীকরণের ঋণ চিহ্ন হতে বুঝা যায় যে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R'} = \left(\vec{P} + \vec{Q}\right)$-এর বিপরীত $\vec{R}$ ক্রিয়া করবে।

আবার, $R' = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} = R$

বা, $R = \sqrt{(8N)^2 + (8N)^2 + 2 \times 8N \times 8N \cos 120°}$

$= 8N$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। স্থির জড়তা ও গতি জড়তা কাকে বলে ?
২। মৌলিক বলগুলোর আপেক্ষিক তীব্রতা লিখ। [ঢা. বো. ২০০১]
৩। ভরবেগ কাকে বলে ? এর এককের নাম লিখ। [ব. বো. ২০০৪]
৪। মৌলিক বল কত প্রকার ও কি কি ? [ঢা. বো. ২০০২]
৫। বলের সংজ্ঞা দাও এবং এর এস. আই. এককের নাম লিখ।
৬। বল এবং ভরবেগের মাত্রা সমীকরণ লিখ।
৭। ভরবেগের সংরক্ষণনীতি বিবৃত কর। [ঢা. বো. ২০০০; সি. বো. ২০০৪]
৮। মৌলিক বল সম্বন্ধে ধারণা ব্যক্ত কর। [কু. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০১]
৯। নিউটন কি ? 10 নিউটন বল কথাটির অর্থ কি ?
১০। বন্দুক হতে গুলি ছুড়লে এটি পিছনের দিকে ধাক্কা দেয় কেন—ব্যাখ্যা কর।
১১। নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্রের একটি ব্যবহারিক প্রয়োগ উল্লেখ কর।
১২। ঘাত বল ও বলের ঘাত কি ? [ঢা. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩; য. বো. ২০০২; ব. বো. ২০০১]
১৩। বলের ঘাত বলতে কি বুঝ ? [রা. বো. ২০০৬]
১৪। টেনসন বা টান বল কি ?
১৫। সংজ্ঞা দাও ঃ (ক) স্থির ও চল ঘর্ষণ, (খ) স্থির ও চল ঘর্ষণ কোণ। (গ) ঘাত বল [য. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৪]
১৬। স্থির ঘর্ষণ গুণাঙ্কের সংজ্ঞা দাও। [য. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০৬, ২০০৩]
১৭। স্থিতি কোণ কি? [সি. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০২] দেখাও যে স্থির ঘর্ষণ গুণাঙ্ক স্থিতিকোণের ট্যানজেন্ট-এর সমান।
১৮। ঘর্ষণ কিভাবে কমান যায় ?
১৯। ঘর্ষণ বলের সুবিধা ও অসুবিধা কি কি ?
২০। ঘর্ষণ বল কোন্ শর্তের উপর নির্ভর করে ?
২১। ঘর্ষণ বল কিভাবে উৎপন্ন হয় ?
২২। বলের ভারসাম্য কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৪; ব. বো. ২০০৩; ঢা. বো. ২০০১]
২৩। লামীর উপপাদ্য বিবৃত কর।
২৪। একটি বস্তু সাম্যাবস্থায় থাকবে যদি এর ত্বরণ শূন্য হয়—ব্যাখ্যা কর।

২৫। ঘর্ষণ বল কি? [ব. বো. ২০০০]
২৬। আবর্ত ঘর্ষণ ও স্থিতি ঘর্ষণ গুণাঙ্ক কাকে বলে? [সি. বো. ২০০৬, ২০০৩]
২৭। ঘর্ষণ কি? [য. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০০]

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। বস্তুর জড়তা বলতে কি বুঝ ? স্থিতিজড়তা ও গতিজড়তা উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।
২। মৌলিক বল কত প্রকার ও কি কি ? [ঢা. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০০] এ বলগুলো ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০২]
৩। মৌলিক বলগুলো কোথায় কার্যকর ? এদের তীব্রতার তুলনা কর। বলের একীভূতকরণ বলতে কি বুঝ ?
৪। নিউটনের প্রথম গতিসূত্রটি বিবৃত কর এবং ব্যাখ্যা কর।
৫। নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃত কর ও ব্যাখ্যা কর।
৬। নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্রটি বিবৃত কর ও ব্যাখ্যা কর।
৭। নিউটনের গতিসূত্রসমূহ বিবৃত কর। $\vec{F} = m\vec{a}$ সমীকরণটি প্রতিপাদন কর।
[ঢা. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৫, ২০০৩, ২০০১; ব. বো. ২০০৫, ২০০২ ; সি. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০০; কু. বো. ২০০৫, ২০০০]
৮। নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃত কর। $\vec{F} = m\vec{a}$ সমীকরণটি বের কর এবং একক বলের সংজ্ঞা দাও।
৯। নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র বিবৃত কর। এটি হতে কিভাবে প্রথম সূত্র পাওয়া যায় ব্যাখ্যা কর।
১০। নিউটনের গতিবিষয়ক দ্বিতীয় সূত্র থেকে বল পরিমাপের রাশিমালা নির্ণয় কর এবং তা থেকে দেখাও যে, বস্তুর উপর নীট বল শূন্য হলে বস্তুর বেগ অপরিবর্তিত থাকে। [সি. বো. ২০০৫]
১১। ঘাতবল বলতে কি বুঝ ? প্রমাণ কর যে বলের ঘাত এবং ভর বেগের পরিবর্তন সমান। [সি. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৩]
১২। ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।
[সি. বো. ২০০৬, ২০০২; রা. বো. ২০০৫, ২০০২; চ. বো. ২০০২; কু. বো. ২০০১; ব. বো. ২০০১; ঢা. বো. ২০০০]
১৩। ভরবেগের সূত্রটি বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০৪; সি. বো. ২০০২]
১৪। বলের ঘাত বলতে কি বুঝ ? বলের ঘাতের ধারণা হতে ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি প্রমাণ কর।
১৫। নিউটনের গতির তৃতীয় সূত্রটি বিবৃত কর। এর সাহায্যে ভরবেগের নিত্যতা সূত্রটি প্রমাণ কর।
১৬। একটি রকেটের কার্যনীতি ব্যাখ্যা কর। ঘাত–ভরবেগের পরিবর্তন সূত্র ব্যবহার করে রকেটের ত্বরণের রাশিমালা প্রতিপাদন কর। অথবা, রকেটের ধাক্কাজনিত বলের রাশিমালা নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০২]
১৭। ঘর্ষণ কাকে বলে ? স্থির ঘর্ষণ ও চল ঘর্ষণের সূত্রগুলো বর্ণনা কর। [ঢা. বো. ২০০০; ব. বো. ২০০১]
১৮। স্থিতি কোণ ও ঘর্ষণ কোণের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। [য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৬]
১৯। ঘর্ষণ কোণ ও স্থিতি কোণ কি? দেখাও যে এরা পরস্পর সমান। [য. বো. ২০০৪]
২০। নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র হতে দেখাও যে m ভরের একটি বস্তুর আদি বেগ v_0 অভিমুখে F পরিমিত সমবল t সময় ক্রিয়া করলে তার বেগ বৃদ্ধি পেয়ে $v = v_0 + \frac{F}{m}t$ হবে।
২১। ভেক্টর চিত্রের সাহায্যে বিভিন্ন বলের ভারসাম্য ব্যাখ্যা কর।
২২। দেখাও যে কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে, তবে প্রত্যেকটি বল অপর বল দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইনের সমানুপাতিক।

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। 40 N এর একটি বল 10 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। ত্বরণ বের কর। [উঃ 4 ms^{-2}]
২। একটি ধ্রুব বল 50 kg ভরের একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে 4 ms^{-2} ত্বরণ সৃষ্টি করে। বলের মান নির্ণয় কর। [উঃ 200 N]
৩। 30 ms^{-1} বেগে গতিশীল 50 kg ভরের একটি বস্তুর ভরবেগ নির্ণয় কর। [উঃ 1500 kg ms^{-1}]
৪। (ক) 5 N বল কোন বস্তুর উপর 6 s ক্রিয়া করে। ভরবেগের পরিবর্তন নির্ণয় কর। [উঃ 30 kg ms^{-1}]
(খ) একটি বস্তুর ভর 0.05 kg। 0.04 ms^{-2} ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে? [উঃ 0.002 N]
৫। 100 kg ভর বিশিষ্ট একটি বস্তুর ওপর 100 N বল 5 s ব্যাপী ক্রিয়া করে। বস্তুটির ভরবেগের পরিবর্তন বা বলের ঘাত বের কর। [উঃ 500 kg ms^{-1}]
৮। 40 N বল 5 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর 5 s ক্রিয়া করল। বস্তুটির বেগের পরিবর্তন বের কর। [উঃ 40 ms^{-1}]
৯। 100 N বল 25 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর 5 s ক্রিয়া করে। বেগের মান নির্ণয় কর। [উঃ 20 ms^{-1}]

BG & JEWEL

১০। একটি বল 100 kg ভরের একটি বস্তুর উপর 10 s ক্রিয়া করে একে স্থিতিশীল অবস্থা হতে 200 m টেনে নিয়ে যায়। বলের মান নির্ণয় কর। [উঃ 400 N]

১১। 2 kg ভরের একটি বস্তুর উপর 4N বল 10 s ক্রিয়া করে। বস্তুটির (ক) ত্বরণ, (খ) প্রাপ্ত বেগ এবং (গ) অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় কর। [উঃ (ক) 2 ms^{-2}, (খ) 20 ms^{-1} এবং (গ) 100 m]

১২। একটি ধ্রুব বল 10 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর ওপর 3 s ক্রিয়া করে থেমে যায়। বস্তুটি পরবর্তী 3s-এ 36 m দূরত্ব অতিক্রম করলে বলের মান নির্ণয় কর। [উঃ 40 N]

১৩। 50 N এর একটি বল 10 kg ভরের একটি স্থির বস্তুর উপর ক্রিয়া করে। যদি 4 s পরে বলটি ক্রিয়া না করে তবে প্রথম হতে 8 s–এ বস্তু কত দূরত্ব অতিক্রম করবে নির্ণয় কর। [উঃ 120 m]

১৪। সমত্বরণে ধাবমান 3 kg ভরের একটি বস্তু এর গতির 5th সেকেন্ডে ও 8th সেকেন্ডে যথাক্রমে 0·18 m এবং 0·30 m দূরত্ব অতিক্রম করে। ক্রিয়াশীল বলের মান নির্ণয় কর। [উঃ 0·12 N]

১৫। 40 kg এবং 60 kg ভরের দুটি বস্তু পরস্পর বিপরীত দিকে যথাক্রমে 10 ms^{-1}এবং 2 ms^{-1} বেগে যাওয়ার পথে একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তু দুটি এক সাথে যুক্ত থেকে কত বেগে চলতে থাকবে? [উঃ 2·8 ms^{-1}]

১৬। 5 kg ভরের একটি বস্তু 10 ms^{-1} বেগে চলন্ত অবস্থায় 3 ms^{-1} বেগে একই দিকে গতিশীল 2 kg ভরের অপর একটি বস্তুর সাথে মিলিত হয়ে এক হয়ে যায়। মিলিত হয়ে একটি বস্তুতে পরিণত হওয়ার পর এর বেগ কত হবে ? [উঃ 8 ms^{-1}]

১৭। 5 kg ভরের একটি বন্দুক হতে 0·01 kg ভরের একটি গুলি 400 ms^{-1} বেগে বের হয়ে গেল। বন্দুকের পশ্চাৎ বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 80 ms^{-1}]

১৮। 15 kg ভরের একটি বস্তুর উপর কত বল প্রয়োগ করলে 1 মিনিটে এর বেগ 3·6 kms^{-1} বৃদ্ধি পাবে? [উঃ 900 N]

১৯। 0·01 kg ভরের একটি বুলেট 4 kg ভরের একটি রাইফেল হতে 200 ms^{-1} বেগে নিক্ষিপ্ত হল, রাইফেলের পশ্চাৎ বেগ বের কর। [উঃ 0·50 ms^{-1}]

২০। 0·3kg ভরের রাইফেলের গুলি 30ms^{-1} বেগে বের হয়ে গেল। রাইফেলটি যদি 0·6ms^{-1} বেগে পশ্চাৎ দিকে আসতে চায় তবে রাইফেলের ভর নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 1·5 kg]

২১। মেঝের সাথে 37° কোণ করে 30kg ওজনের একখণ্ড ব্লককে 200N বল দ্বারা টানা হচ্ছে। যদি মেঝে ও ব্লকের মধ্যে গতীয় ঘর্ষণ গুণাঙ্ক 0·3 হয়, তবে ব্লকের ত্বরণ নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 3·58ms^{-2}]

২২। 1·6 kg ভরের একটি বস্তুকে 1·2 ms^{-2} ত্বরণে গতিশীল করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? বস্তুর ওপর ক্রিয়ারত ঘর্ষণ জনিত বল = 2×10^{-3} N। [উত্তর ঃ 1·922 N]

২৩। 36 kg ভরের একটি বস্তুর উপর কত বল প্রয়োগ করলে 1 মিনিটে তার বেগ 15 km/hr বৃদ্ধি পাবে ? [2·5 N]

২৪। 400 kg ভরের একটি মটর গাড়ি মিনিটে 30 km বেগে চলে। ব্রেক চেপে একে 100 m দূরত্বে থামিয়ে দেয়া হল। যদি মাটির ঘর্ষণ জনিত বল 1000N হয়, তবে ব্রেক জনিত বলের মান নির্ণয় কর। [উঃ 49×10^3 N]

২৫। দুটি তলের মধ্যকার স্থির ঘর্ষণ কোণ 60°। তাদের ঘর্ষণ গুণাঙ্ক কত ? [উঃ $\sqrt{3}$]

২৬। 10 ms^{-1} বেগে মেঝের উপর দিয়ে গড়িয়ে যাওয়া 0·02 kg ভরের একটি মার্বেল 20 s চলার পর থেমে গেল। ঘর্ষণ বলের মান নির্ণয় কর। [উঃ 0·02 N]

২৭। 1 kg ভরের একটি বস্তু 30° কোণে আনত একটি অমসৃণ তলে চরম স্থিরাবস্থায় আছে। ঘর্ষণ গুণাঙ্ক ও অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর। θ $R = mg\cos\theta$ [উঃ $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 4·9 $\sqrt{3}$ N]

২৮। 50 kg ভরের এক ব্যক্তি 1950 kg ভরের একটি গাড়ি স্থিরাবস্থা থেকে প্রথম 10 সেকেন্ড সমত্বরণে চালান। অতঃপর 10 মিনিট সমবেগে চালানের পর ব্রেক চেপে 1 সেকেন্ডের মধ্যে গাড়ি থামান। যাত্রা শুরুর 4 সেকেন্ড পর গাড়ির বেগ 8 ms^{-1} হলে গাড়ি কর্তৃক অতিক্রান্ত মোট দূরত্ব এবং গাড়ি থামাতে প্রযুক্ত বলের মান বের কর।

[চ. বো. ২০০২ ; উঃ 12110 m ; 40,000 N]

২৯। 5 kg ভরের একটি বস্তু 10 ms^{-1} বেগে উত্তর দিকে এবং 3 kg ভরের অপর একটি বস্তু 5 ms^{-1} বেগে দক্ষিণ দিকে একই সরলরেখা বরাবর চলা অবস্থায় একে অপরকে ধাক্কা দিল। ধাক্কার পর বস্তুদ্বয় সংযুক্ত অবস্থায় কত বেগ এবং কোন্ দিকে চলবে ? [উঃ 4·375 ms^{-1}, উত্তর দিকে]

১ ৩০। 0·6 kg ভরের একটি ফুটবল 25 ms^{-1} বেগে গতিশীল থাকা অবস্থায় একজন খেলোয়াড় সজোরে লাথি মারল; ফলে বলটি একইদিকে 40 ms^{-1} বেগ প্রাপ্ত হল। খেলোয়াড়ের পা কর্তৃক প্রযুক্ত বলের ঘাত কত ? [উঃ 9 kg ms^{-1}]

৩১। কোন মেঝেতে স্থাপিত 500 N-এর একটি কাঠের বাক্সের উপর 200 N বল প্রয়োগ করলে বাক্সটি চলা শুরু করে। মেঝে ও কাঠের বাক্সের মধ্যবর্তী ঘর্ষণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 0·4]

৩২। 200 kg ভরের একটি মোটর গাড়ি ঘণ্টায় 108 km বেগে চলে। ব্রেকের সাহায্যে গাড়িটিকে 20 m দূরত্বে থামিয়ে দেয়া হল। বাঁধাদানকারী বলের মান বের কর। [উঃ 4500 N]

৩৩। 36 kg ভরের একটি বস্তুর উপর কত বল প্রয়োগ করলে 1 মিনিটে এর বেগ 15 kmh^{-1} বৃদ্ধি পাবে ? [উঃ 2·5 N]

৩৪। 25 kg ভরের একটি বস্তুর উপর কত বল ক্রিয়া করলে, ত্বরণ 8 ms^{-2} হবে ? [উঃ 200 N]

৫

কৌণিক গতিসূত্র

LAWS OF CIRCULAR MOTION

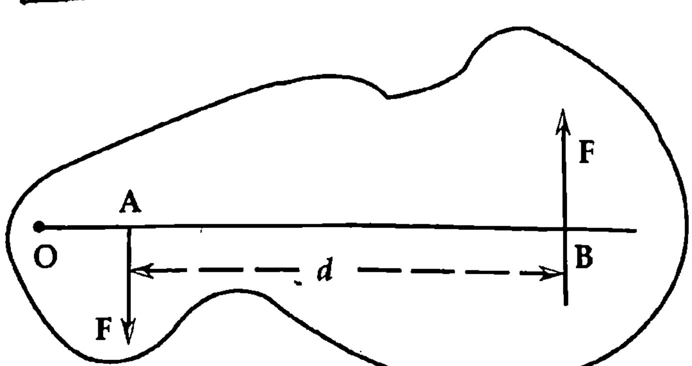
৫·১ সূচনা
Introduction

নিউটনের ১ম সূত্র থেকে আমরা জানি প্রত্যেক বস্তু যে অবস্থাতে থাকে বাইরে থেকে ঐ অবস্থার পরিবর্তন করতে চেষ্টা করলে 'জড়তা' ধর্মের দরুন বস্তু সেই চেষ্টাকে বাধা দেয়। বস্তুর ভরের হ্রাস-বৃদ্ধিতে জড়তারও হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটে। ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রেও জড় বস্তু তার অবস্থার পরিবর্তনের প্রকাশকে প্রতিরোধের চেষ্টা করে অর্থাৎ ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রেও এক ধরনের জড়তা প্রকাশ পায়। এই জড়তা নির্ভর করে ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর বিভিন্ন কণার ভর ও তার বিন্যাসের উপর।

ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে রৈখিক গতির অনুরূপ বেগ, ত্বরণ, ভরবেগ, বল ইত্যাদি রাশিগুলো রয়েছে। এই সমস্ত রাশিগুলো কৌণিক মানের উপর নির্ভর করে, তাই এদের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট গতিসূত্রকে কৌণিক গতিসূত্র বলে। এই অধ্যায়ে আমরা দ্বন্দ্ব, জড়তার ভ্রামক, কৌণিক ভরবেগ, কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্র, টর্ক, কেন্দ্রমুখী বল এবং এদের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট গতির বিভিন্ন দিক আলোচনা করব।

৫·২ দ্বন্দ্ব বা কাপল্ বা যুগল
Couple

সংজ্ঞা ঃ একটি বস্তুর দুটি বিভিন্ন বিন্দুতে প্রযুক্ত দুটি সমান, সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী বলকে দ্বন্দ্ব বা যুগল (Couple) বলে।



চিত্র ৫·১

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি কোন দৃঢ় বস্তুর A এবং B বিন্দুতে একই মানের দুটি সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করা হল [চিত্র ৫·১]। এমতাবস্থায় এই দ্বন্দ্বের ক্রিয়ায় বস্তুটি আর সাম্যাবস্থায় থাকতে পারবে না, তার ঘূর্ণন ঘটবে। দ্বন্দ্ব প্রযুক্ত হলেই বস্তু ঘুরার সুযোগ পায়। **দ্বন্দ্ব প্রয়োগের সময় বল দুটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব AB-কে দ্বন্দ্বের বাহু (Arm) বলা হয়।** **যে কোন একটি বলের মান এবং বল দুটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্বের গুণফল দ্বারা দ্বন্দ্বের ভ্রামক পরিমাপ করা হয়।** দ্বন্দ্বের ভ্রামককে অনেক সময় টর্ক (Torque) বলা হয়। F যদি দ্বন্দ্বের একটি বল হয় এবং AB বল দুটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব হয়, তবে

$$\boxed{\text{দ্বন্দ্বের ভ্রামক} = F \times AB = F \times d}$$

এই ভ্রামক ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হতে পারে। **যে দ্বন্দ্বের প্রয়োগে বস্তু ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (anti-clockwise) ঘুরে, তার ভ্রামককে ধনাত্মক ভ্রামক ; আর যে দ্বন্দ্বের প্রয়োগে বস্তু ঘড়ির কাঁটার দিকে (clockwise) ঘুরে তার ভ্রামককে ঋণাত্মক ভ্রামক বলে।**

দ্বন্দ্বের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of moment of a couple)

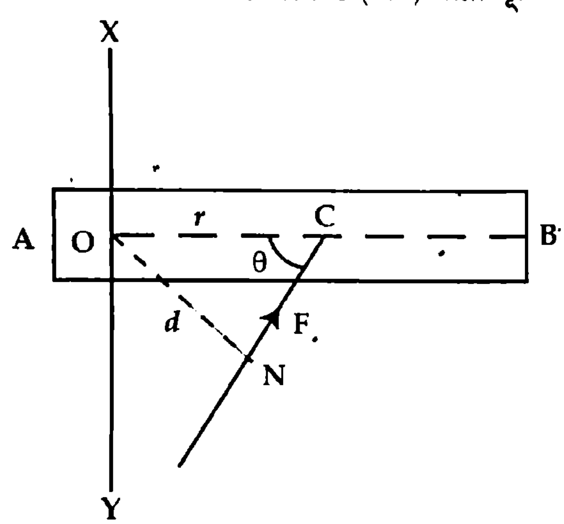
দ্বন্দ্বের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ,

$$\boxed{[\text{দ্বন্দ্বের ভ্রামক}] = [\text{বল} \times \text{দূরত্ব}] = [MLT^{-2} \times L] = [ML^2T^{-2}]}$$

৫.৩ টর্ক বা বলের ভ্রামক
Torque or Moment of a force

কোন দৃঢ় বস্তু একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে। যেমন দেয়ালে ঝুলানো ফটো পেরেক ও সুতার সংযোগ বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে থাকে ; আবার গাড়ির চাকা তার অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে।

কোন নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোন বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে প্রযুক্ত দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বা বলের ভ্রামক বলে। একে τ (টাউ) দ্বারা সূচিত করা হয়।



চিত্র ৫.২

ব্যাখ্যা ঃ ধরা যাক, O বিন্দুতে একটি পাতলা পাত অনুভূমিক অবস্থায় এমনভাবে আবদ্ধ আছে যে তা উল্লম্ব অক্ষ XOY-এর চতুর্দিকে O-কে কেন্দ্র করে ঘুরতে পারে [চিত্র ৫.২]। পাতটিকে তার কোন বিন্দু C-তে বল প্রয়োগ করে ঘুরালে দেখা যায় যে,

(১) প্রযুক্ত বলের মান যত বেশি হবে, তার ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(২) O হতে প্রযুক্ত বল F-এর লম্ব দূরত্ব d যত বেশি হবে, ঐ বলে ঘূর্ণন সৃষ্টির ক্ষমতাও তত বেশি হবে।

(৩) বলের ক্রিয়ামুখ O বিন্দু অভিমুখী হলে, পাতটিতে কোন ঘূর্ণন হবে না।

উপরোক্ত কারণে **কোন অক্ষ বা বিন্দুর সাপেক্ষে কোন বলের ভ্রামকের মান বলের পরিমাণ ও অক্ষ হতে বলের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্ব d-এর গুণফল দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।**

$$\tau = d \times F \tag{1}$$

বা, **বলের ভ্রামক বা টর্ক = বল × লম্ব দূরত্ব**

চিত্র ৫.২-এ O হতে F বলের ক্রিয়াবিন্দু C-এর দূরত্ব $= r$ ও F বলের ক্রিয়ারেখা NC-এর দূরত্ব $= d$ এবং $\angle NCO = \theta$ নির্দেশ করা হয়েছে।

কাজেই, $ON = d = r \sin\theta$

$$\tau = d \times F = r F \sin\theta$$

ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে τ-কে নিম্ন উপায়ে লেখা হয়,

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2}$$

এখানে, $\vec{r}$ ও $\vec{F}$ যথাক্রমে অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বল। r ও F যে তলে অবস্থিত τ-এর দিক হবে ঐ তলের অভিলম্ব বরাবর। ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে অর্থাৎ বামাবর্তে (anti-clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ হচ্ছে উপর দিকে এবং মান ধনাত্মক। ঘড়ির কাঁটার দিকে অর্থাৎ দক্ষিণাবর্তে (clockwise) ঘূর্ণনের জন্য τ-এর অভিমুখ নিচের দিকে এবং মান ঋণাত্মক।

সমীকরণ (2) অনুসারে টর্কের নিম্নোক্ত গাণিতিক সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা ঃ অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর উপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলকে টর্ক বলে।

টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক (Unit of torque or moment of a force)

এস. আই. পদ্ধতিতে টর্ক বা বলের ভ্রামকের একক নিউটন-মিটার (N-m)।

টর্ক বা বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of torque or moment of force)

টর্ক বা বলের ভ্রামকের সংজ্ঞা হতে এর মাত্রা সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়। বলের ভ্রামকের মাত্রা সমীকরণ,

$$[\text{টর্ক বা বলের ভ্রামক}] = [\text{বল} \times \text{দূরত্ব}] = [MLT^{-2} \times L]$$

$$= [ML^2T^{-2}]$$

৫.৪ টর্ক ও কৌণিক ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between torque and angular accelerations

আমরা জানি সরলরেখায় চলমান কোন বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে বল প্রয়োগের প্রয়োজন। তেমনি নির্দিষ্ট অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোন বস্তুতে ত্বরণ সৃষ্টির জন্যে একটি দ্বন্দ্বের প্রয়োজন হয়। এই দ্বন্দ্বের ভ্রামককে টর্ক বলে।

ধরি একটি বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষ AB-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। এখন তার উপর একটি যুগল প্রয়োগ করায় তার কৌণিক বেগ বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ বস্তুতে কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি হবে। বস্তুতে সৃষ্ট এই কৌণিক ত্বরণ তার প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণের সমান। কিন্তু ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলো বিভিন্ন দূরত্বে অবস্থান করে বিভিন্ন রৈখিক ত্বরণ লাভ করবে। ঘূর্ণাক্ষ হতে কণার দূরত্ব যত বেশি হবে রৈখিক ত্বরণের মানও তত বেশি হবে।

ধরি বস্তুটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের কতকগুলো কণার সমন্বয়ে গঠিত এবং ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 ইত্যাদি।

বর্ণনা অনুসারে, বস্তুটির প্রত্যেকটি কণার কৌণিক ত্বরণ, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

তা হলে m_1 ভরের বস্তু কণাটির রৈখিক ত্বরণ $= r_1\frac{d\omega}{dt}$

ঐ কণার উপর প্রযুক্ত বল = ভর × রৈখিক ত্বরণ $= m_1r_1\frac{d\omega}{dt}$

ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে কণাটির উপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক = বল × ঘূর্ণাক্ষ হতে বস্তু কণার দূরত্ব $= m_1r_1\frac{d\omega}{dt} \times r_1 = m_1r_1^2\frac{d\omega}{dt}$

অনুরূপভাবে লেখা যায় $m_2, m_3, m_4,$ ... ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার উপর ক্রিয়ারত বলের ভ্রামক যথাক্রমে $m_2r_2^2\frac{d\omega}{dt}$, $m_3r_3^2\frac{d\omega}{dt}$, $m_4r_4^2\frac{d\omega}{dt}$ ইত্যাদি।

তা হলে উপরোক্ত ভ্রামকগুলোর সমষ্টিই উক্ত বস্তুর উপর ক্রিয়ারত দ্বন্দ্বের ভ্রামক বা টর্ক,

$$\tau = m_1r_1^2\frac{d\omega}{dt} + m_2r_2^2\frac{d\omega}{dt} + m_3r_3^2\frac{d\omega}{dt} + m_4r_4^2\frac{d\omega}{dt} +$$

$$= (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \dots)\frac{d\omega}{dt} = \frac{Id\omega}{dt} = I\alpha$$

$$\boxed{\therefore \tau = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha} \qquad (3)$$

বা, টর্ক = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক ত্বরণ। কৌণিক ত্বরণের আবর্তনরত বস্তুকণার উপর ক্রিয়ারত বলের টর্ক হবে ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণের গুণফলের সমান।

আবার $\frac{d\omega}{dt} = 1$ হলে, $\tau = I$

কোন অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান কোন দৃঢ় বস্তুর উপর যে টর্ক ক্রিয়া করলে তাতে একক কৌণিক ত্বরণের সৃষ্টি হয় তাকে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক বলে।

৫.৫ কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

সংজ্ঞা ঃ ঘূর্ণনরত কোন বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোন বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর

এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ

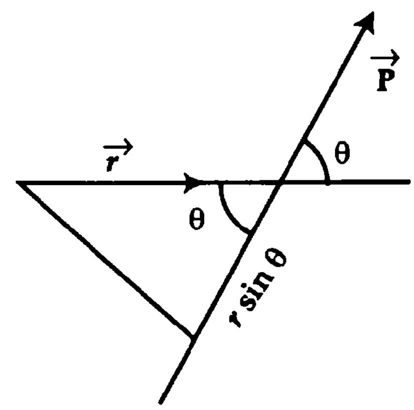
অতএব, সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \qquad (4)$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি।

মান ও দিক ঃ কৌণিক ভরবেগের মান

$L = rp\sin\theta$



চিত্র ৫.৩

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{p}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ৫.৩]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r\sin\theta$। অতএব, কোন বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।

$\vec{r}$ ও $\vec{p}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$ এর দিক হবে ঐ তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ কণাটি বৃত্তাকার পথে বৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে গতিশীল হলে, $\vec{r}$ ও $\vec{p}$-এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$। সেক্ষেত্রে

$$L = rp\sin\theta = rp = r(mv) = mr(r\omega) = mr^2\omega \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

একক ও মাত্রা সমীকরণ ঃ এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে কৌণিক ভরবেগের একক হচ্ছে kgm^2s^{-1} এবং মাত্রা সমীকরণ

$$[L] = [\text{ভরবেগ} \times \text{দূরত্ব}] = [MLT^{-1}L] = [ML^2T^{-1}]$$

৫.৬ কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between angular momentum and angular velocity

মনে করি একটি বস্তু ω কৌণিক বেগে একটি অক্ষের চারদিকে ঘুরছে। বস্তুটি অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি হলে আমরা লিখতে পারি,

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots\ldots + l_n$$ [এখানে $l_1, l_2 \ldots\ldots l_n$ পরস্পর সমান্তরাল।]

বা, $L = r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 + \qquad + r_np_n$

$= r_1m_1v_1 + r_2m_2v_2 + \qquad + r_nm_nv_n$

$= r_1m_1\omega r_1 + r_2m_2\omega r_2 +$

$= m_1r_1^2\omega + m_2r_2^2\omega +$

$= \omega \Sigma mr^2$

$= I\omega$

অর্থাৎ $\boxed{L = I\omega}$ (6)

এটি হল কৌণিক ভরবেগ এবং কৌণিক বেগের সম্পর্ক। উক্ত সম্পর্ক হতে কৌণিক ভরবেগের অপর একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে কোন একটি বস্তুর জড়তার ভ্রামক এবং কৌণিক বেগের গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

৫·৭ ঘূর্ণায়মান বস্তুর গতিশক্তি
Kinetic energy of a rotating body

ধরি একটি দৃঢ় বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষ AB-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। স্থির অবস্থা হতে শুরু করে এই কৌণিক বেগে গতিশীল করতে বস্তুর উপর কিছু কাজ করতে হয়েছে যা বস্তুতে গতিশক্তিরূপে সঞ্চিত হয়েছে। এই গতিশক্তিই আবর্ত বা ঘূর্ণন গতিশক্তি।

যেহেতু বস্তুটি ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে কাজেই তার প্রতিটি কণার কৌণিক বেগ হবে ω। কিন্তু ঘূর্ণাক্ষ হতে বিভিন্ন কণার দূরত্ব বিভিন্ন হেতু এদের রৈখিক বেগ অবস্থান ভেদে বিভিন্ন হবে।

কাজেই বস্তুটি $m_1, m_2, m_3 \ldots \quad \ldots m_n$ ভরের কণার সমন্বয়ে গঠিত হলে ও ঘূর্ণাক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে $r_1, r_2, r_3 \quad r_n$ হলে m_1 ভরের কণাটির রৈখিক বেগ, $v_1 = \omega r_1$। কাজেই তার গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1\omega^2r_1^2$

অনুরূপভাবে লেখা যায়,

m_2 ভরের কণাটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_2\omega^2r_2^2$

m_3 ভরের কণাটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_3v_3^2 = \frac{1}{2}m_3\omega^2r_3^2$

m_n ভরের কণাটির গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m_nv_n^2 = \frac{1}{2}m_n\omega^2r_n^2$

সমগ্র বস্তুটির গতিশক্তি,

$$K.E_r = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots \qquad + \frac{1}{2}m_nv_n^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\omega^2r_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2r_2^2 + \frac{1}{2}m_3\omega^2r_3^2 + \ldots \qquad \ldots + \frac{1}{2}m_n\omega^2r_n^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots \qquad \ldots + m_nr_n^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

বা $\boxed{K.\ E. = \frac{1}{2}\cdot I\omega^2}$ (7)

ঘূর্ণায়মান বস্তুর গতিশক্তি,

$$K.E_r = \frac{1}{2} \times \text{জড়তার ভ্রামক} \times \text{কৌণিক বেগ}^2 \text{।}$$

এখন $\omega = 1$ একক হলে, সমীকরণ (4) থেকে পাই,

$$\boxed{K.E. = \frac{1}{2}\ I \text{ বা}, I = 2\ K.E.}$$

অর্থাৎ, কোন নির্দিষ্ট অক্ষ বরাবর একক সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত কোন দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক, সংখ্যাগতভাবে এর গতিশক্তির দ্বিগুণ। অন্যভাবে বলা যায়, কোন নির্দিষ্ট অক্ষ বরাবর একক সমকৌণিক বেগে ঘূর্ণনরত বা আবর্তনরত কোন বস্তুর গতিশক্তি সংখ্যাগতভাবে এর জড়তার ভ্রামকের অর্ধেক।

৫.৮ কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্র
Newton's law for angular motion

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে নিউটনের গতিসূত্রগুলো পূর্বের অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে। বস্তুর কৌণিক গতির ক্ষেত্রেও নিউটনের গতিসূত্রগুলো ভিন্নরূপে প্রযোজ্য। নিম্নে সূত্রগুলো বিবৃত ও ব্যাখ্যা করা হল।

(১) প্রথম সূত্র ঃ কোন বস্তুর উপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থানে এবং ঘূর্ণনরত বস্তু সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকবে।

ব্যাখ্যা ঃ সূত্রানুযায়ী বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন সম্ভব। টর্কের ক্রিয়া ছাড়া বস্তুর কৌণিক বেগ হবে সমকৌণিক বেগ। আর বস্তু আপনা হতেই তার কৌণিক ভরবেগের উপর প্রভাব ফেলতে পারে না। কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনকারীই হচ্ছে টর্ক। সুতরাং, বস্তুর উপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে ঐ বস্তুর কৌণিক ত্বরণও শূন্য হবে।

(২) দ্বিতীয় সূত্র ঃ ঘূর্ণনরত কোন বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার ঐ বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমানুপাতিক এবং টর্ক যে দিকে ক্রিয়া করে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনও ঐ দিকে ঘটে।

ব্যাখ্যা ঃ সূত্রানুযায়ী কৌণিক ভরবেগ $L = I\omega$ -এর পরিবর্তনের হার $\frac{dL}{dt}$ প্রযুক্ত টর্ক τ-এর সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, $\tau \propto \frac{dL}{dt} \propto I\frac{d\omega}{dt}$

$\propto I\alpha$

বা, $\tau = KI\alpha$

এখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। এস. আই. এককে $K = 1$

$$\therefore \boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}} \qquad (8)$$

টর্ক τ-এর অভিমুখেই কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন dL সংঘটিত হবে।

বর্ণনা অনুযায়ী কৌণিক ত্বরণের উৎসই টর্ক।

তৃতীয় সূত্র ঃ প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক টর্কের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক আছে।

ব্যাখ্যা ঃ বস্তু A অপর একটি বস্তু B-এর উপর $\vec{\tau}_{12}$ টর্ক প্রয়োগ করলে B বস্তুও A-এর উপর সমান ও বিপরীতমুখী টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ প্রয়োগ করবে। এখানে A কর্তৃক B-এর উপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{12}$ ক্রিয়ামূলক টর্ক ও B কর্তৃক A-এর উপর প্রযুক্ত টর্ক $\vec{\tau}_{21}$ হচ্ছে প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক।

$$\vec{\tau}_{12} = -\vec{\tau}_{21} \text{ ও } \tau_{12} = \tau_{21}$$

প্রতিক্রিয়ামূলক টর্কের দিক ক্রিয়ামূলক টর্কের বিপরীতমুখী, তাই ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

৫.৯ কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র
Conservation law of angular momentum

কৌণিক গতির জন্য নিউটনের প্রথম সূত্র হতে আমরা জানি বাহ্যিক টর্কের ক্রিয়াতেই কেবলমাত্র বস্তুর কৌণিক বেগের তথা কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হয়। টর্কের ক্রিয়া না থাকলে বস্তুটি সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকে। অর্থাৎ সময়ের সাপেক্ষে কৌণিক বেগ ধ্রুব হয়। ফলে কৌণিক ভরবেগও ধ্রুব হয়। একে কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলে। সুতরাং বলা যায়, **কোন বস্তুর উপর টর্কের লব্ধি শূন্য হলে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ সংরক্ষিত থাকে।**

গাণিতিক প্রমাণ : আমরা জানি কৌণিক ভরবেগ,

$$L = I\omega \tag{9}$$

এখানে L বস্তুর কৌণিক ভরবেগ, I জড়তার ভ্রামক এবং ω কৌণিক বেগ।

সমীকরণ (9)-কে সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I\omega = I\frac{d\omega}{dt}\right)$$

কিন্তু $\frac{d\omega}{dt} = \alpha$

অতএব, $\frac{dL}{dt} = I\alpha = \tau$ [নিউটনের কৌণিক গতির ২য় সূত্র অনুসারে]

এখন $\tau = 0$, অর্থাৎ বস্তুর উপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে,

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

$$L = \text{ধ্রুবক}$$

কাজেই, **বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বহিস্থ টর্কের লব্ধি শূন্য হলে, ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হবে না। এটিই কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র।**

৫.১০ জড়তার ভ্রামক এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Moment of inertia and radius of gyration

জড়তার ভ্রামক
Moment of inertia

যখন কোন দৃঢ় বস্তু একটি নির্দিষ্ট অক্ষে আবদ্ধ থাকে, তখন ঐ বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে, আবদ্ধ থাকার কারণে বস্তুটি সরলরেখায় চলতে পারে না। বস্তুটি অক্ষের চারদিকে ঘুরে এবং বস্তুর প্রতিটি কণার কৌণিক সরণ হয়। অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুর এ ধরনের গতিকে ঘূর্ণন বা আবর্তন গতি বলে। অক্ষ বস্তুর ভেতরে বা বাইরে থাকতে পারে।

একটি দৃঢ়বস্তু কোন একটি স্থির অক্ষের চারদিকে আবর্তিত হতে থাকলে ঐ অক্ষের সাপেক্ষে বস্তুটির জড়তার ভ্রামক বলতে অক্ষ হতে প্রতিটি কণার দূরত্বের বর্গ কণাটির ভরের গুণফলের সমষ্টিকে বুঝায়। সুতরাং, জড়তার ভ্রামকের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সংজ্ঞা : কোন অক্ষ সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত কোন দৃঢ় বস্তুর প্রতিটি কণার ভর এবং অক্ষ হতে তাদের প্রত্যেকের লম্ব দূরত্বের বর্গের গুণফলকে জড়তার ভ্রামক বলে।

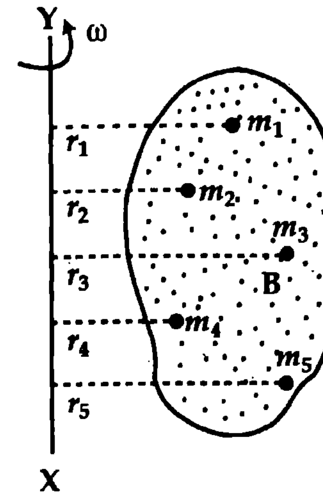
ব্যাখ্যা : মনে করি B একটি দৃঢ় বস্তু [চিত্র ৫.৪]। এটি একটি নির্দিষ্ট অক্ষ XY-এর চারদিকে ω সমকৌণিক বেগে ঘুরছে। যদি বস্তুটি m_1, m_2, m_3 .... ও m_n ভরের অসংখ্য বস্তুকণার সমষ্টি হয় এবং ভরগুলো ঘূর্ণন অক্ষ হতে যথাক্রমে r_1, r_2, r_3 .... ও r_n দূরে অবস্থিত হয় তাহলে সংজ্ঞানুসারে ঐ অক্ষ সাপেক্ষে,

প্রথম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_1r_1^2$

দ্বিতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_2r_2^2$

তৃতীয় কণার জড়তার ভ্রামক $= m_3r_3^2$

ও n-তম কণার জড়তার ভ্রামক $= m_nr_n^2$



চিত্র ৫.৪

অতএব, সংজ্ঞানুসারে সমগ্র বস্তুটির ঐ অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক,

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots\ldots\ldots m_nr_n^2$$

$$\boxed{= \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2} \qquad (10)$$

$\left[\sum_{i=1}^{n}\right.$ চিহ্ন দ্বারা রাশিগুলোর সমষ্টি বুঝানো হয়েছে।$\left.\right]$

সমাকলনের সাহায্যে জড়তার ভ্রামক নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$I = \int r^2 dm \qquad (11)$$

এখানে dm হচ্ছে বস্তুটির অতি ক্ষুদ্র অংশের ভর এবং r হচ্ছে ঘূর্ণন অক্ষ হতে ঐ ক্ষুদ্র অংশটির দূরত্ব।

জড়তার ভ্রামকের একক ও মাত্রা সমীকরণ (Unit and dimension of moment of inertia) : এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে জড়তার ভ্রামকের একক কিলোগ্রাম-মিটার² (kg-m²)।

এর মাত্রা সমীকরণ

$[I] = [\text{ভর} \times \text{দূরত্ব}^2] = [ML^2]$

চক্রগতির ব্যাসার্ধ
Radius of gyration

কোন দৃঢ় বস্তুর মোট ভরকে যদি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত ধরা হয় যাতে একটি নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে ঐ কেন্দ্রীভূত বস্তুকণার জড়তার ভ্রামক অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামকের সমান হয় তাহলে লেখা যায়,

$$\boxed{I = \sum mr^2 = MK^2} \qquad (12)$$

এখানে, $M = \sum m =$ সমগ্র বস্তুটির ভর

এবং $K =$ ঘূর্ণন অক্ষ হতে যে বিন্দুতে সমগ্র ভর কেন্দ্রীভূত আছে, ঐ বিন্দুর দূরত্ব।

K-কে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।

অতএব, চক্রগতির ব্যাসার্ধের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় :

সংজ্ঞা : যদি কোন দৃঢ় বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যেখানে বস্তুটির সমস্ত ভর কেন্দ্রীভূত আছে ধরা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ঐ বিন্দুতে জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে অক্ষ হতে ঐ বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।

সমীকরণ (12) হতে পাই,

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}} \tag{13}$$

নির্দিষ্ট অক্ষের সাপেক্ষে কোন বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0·2 m বলতে বুঝায় যে ঐ অক্ষ হতে 0·2 m দূরে বস্তুটির সমগ্র ভর কেন্দ্রীভূত আছে বিবেচনা করে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় করলে বস্তুটির মোট জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

৫·১১ জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত দুটি উপপাদ্য
Two theorems relating moment of inertia

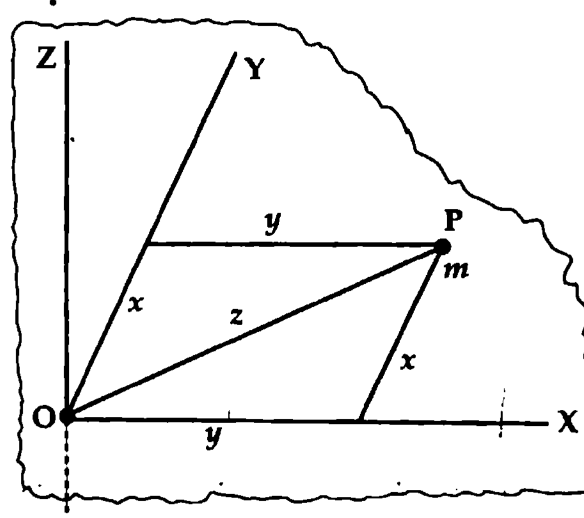
কোন একটি বিশেষ অক্ষের সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক নির্ণয়ের দুটি সহজ উপপাদ্য আছে। উপপাদ্য দুটির একটিকে (১) **লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য** এবং অপরটিকে (২) **সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য** বলে। নিম্নে পাত আকৃতির বস্তুর ক্ষেত্রে উপপাদ্য দুটি আলোচনা করা হল।

(১) লম্ব অক্ষ উপপাদ্য (Perpendicular axes theorem) : কোন পাতলা সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি ঐ পাতে অবস্থিত দু অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অংকিত লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকের সমান হবে।

ব্যাখ্যা : মনে করি কোন সমতল পাতের উপর অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষ OX এবং OY বরাবর এদের জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I_x ও I_y। ধরি ঐ পাতে অবস্থিত দুই অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অংকিত লম্ব OZ বরাবর পাতের জড়তার ভ্রামক I_z। প্রমাণ করতে হবে যে, $I_x + I_y = I_z$

অংকন : একটি পাতলা সমতল পাত নিই। এই পাতের উপর OX এবং OY দুটি পরস্পর লম্ব অংকন করি [চিত্র ৫·৫]।

এখন OX এবং OY অক্ষ দুটির ছেদ O-তে পাতের উপর লম্ব টানি।



চিত্র ৫·৫

প্রমাণ : সমতল পাতের উপর P একটি বিন্দু নিই যার ভুজ কোটি x, y এবং z। এখন P বিন্দুতে m ভরের একটি কণা বিবেচনা করি। OZ অক্ষ সাপেক্ষে কণাটির জড়তার ভ্রামক $= mz^2$।

OZ অক্ষ সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক

$$I_z = \Sigma mz^2 = \Sigma m(x^2 + y^2) = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 \tag{14}$$

কিন্তু, $\Sigma my^2 = I_x$ এবং $\Sigma mx^2 = I_y$

অতএব সমীকরণ (14) হতে পাই

$$I_z = I_y + I_x$$

বা $$\boxed{I_z = I_x + I_y} \tag{15}$$

উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

(২) সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য (Parallel axes theorem) : যে কোন অক্ষের সাপেক্ষে কোন সমতল পাতলা পাতের জড়তার ভ্রামক পাতটির ভারকেন্দ্রগামী তার সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এবং পাতের ভর ও ঐ দুই অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক কাগজের তলে অবস্থিত AB কোন একটি অক্ষ এবং CD তার সমান্তরাল আর একটি অক্ষ। CD অক্ষটি M ভরের পাতলা সমতল পাতের ভারকেন্দ্র G দিয়ে অতিক্রান্ত [চিত্র ৫·৬]। যদি সমান্তরাল অক্ষদ্বয় AB ও CD-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব h এবং AB ও CD-এর সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামক যথাক্রমে I ও I_G হয় তবে উপপাদ্য অনুসারে প্রমাণ করতে হবে যে, $I = I_G + Mh^2$

প্রমাণ : ধরি পাতটি m_1, m_2, m_3 ইত্যাদি ভরের বস্তুকণার সমন্বয়ে গঠিত। CD অক্ষ হতে কণাগুলোর দূরত্ব যথাক্রমে x_1, x_2, x_3 ইত্যাদি। তা হলে AB অক্ষের সাপেক্ষে m_1 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_1(x_1 + h)^2 = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h$$

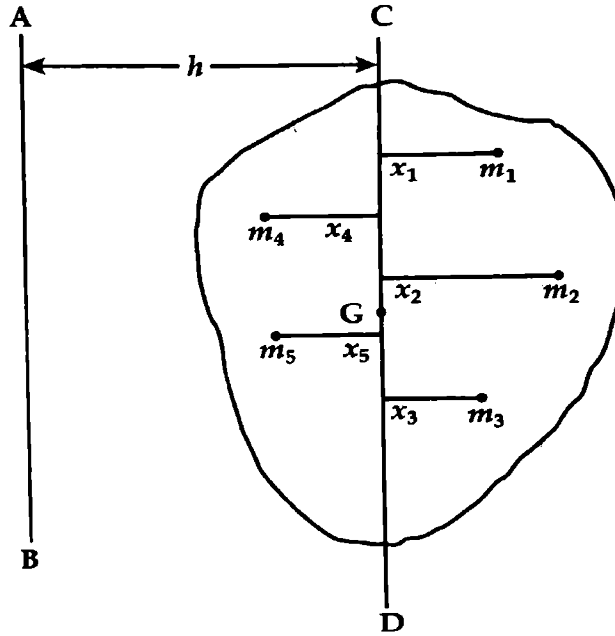
অনুরূপভাবে AB অক্ষের সাপেক্ষে m_2 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h \;;$$

m_3 ভরের কণার জড়তার ভ্রামক

$$= m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h$$ ইত্যাদি।

$\therefore$ AB অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের জড়তার ভ্রামক I হলে উপরোক্ত জড়তার ভ্রামকগুলোর সমষ্টির সমান।



চিত্র ৫·৬

$$I = m_1x_1^2 + m_1h^2 + 2m_1x_1h + m_2x_2^2 + m_2h^2 + 2m_2x_2h + m_3x_3^2 + m_3h^2 + 2m_3x_3h + \ldots$$

$$= \Sigma mx^2 + h^2\Sigma m + 2h\Sigma mx.$$

এখানে, Σmx = CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র পাতের ভর ভ্রামক। কিন্তু সমগ্র পাতের ওজন G বিন্দু দিয়ে CD রেখা বরাবর নিম্নমুখে ক্রিয়া করায় CD অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির ভর ভ্রামক,

$\Sigma mx = 0$ আবার $\Sigma m = M$ ও $I_G = \Sigma mx^2$

$$\therefore \boxed{I = I_G + Mh^2} \qquad (16)$$

১। **বৃত্তাকার চাকতির যেকোন ব্যাসের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক (Moment of inertia of a circular disc about any diameter)**

$\frac{Mr^2}{2}$

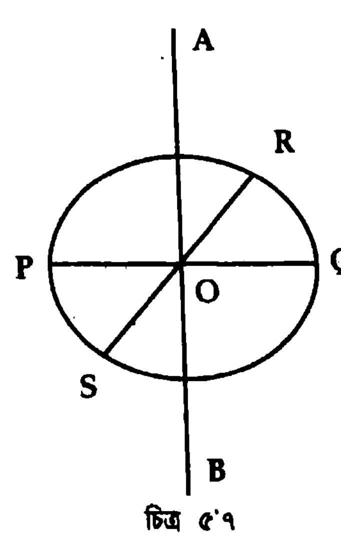
M ভরবিশিষ্ট ও r ব্যাসার্ধের একটি চাকতি নেয়া হল।

ধরা যাক, PQ ব্যাসের সাপেক্ষে বৃত্তাকার চাকতির জড়তার ভ্রামক = I। অতএব, লম্ব-ব্যাস RS সাপেক্ষেও ঐ চাকতির জড়তার ভ্রামক = I

এখন, উক্ত দুই লম্ব-ব্যাসের ছেদবিন্দু অর্থাৎ চাকতির কেন্দ্রবিন্দু O দিয়ে চাকতির তলের অভিলম্ব বরাবর গমনকারী AB অক্ষের সাপেক্ষে [চিত্র ৫·৭] চাকতির ভ্রামক I_{AB} হলে, লম্ব-অক্ষ উপপাদ্য অনুসারে,

$$I_{AB} = I + I = 2I$$

আমরা জানি, M ভরবিশিষ্ট এবং r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার চাকতির পৃষ্ঠের অভিলম্ব বরাবর চাকতির কেন্দ্র দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক হল $\boxed{\frac{Mr^2}{2}}$।



চিত্র ৫·৭

অতএব, $I_{AB} = \frac{Mr^2}{2}$

$$2I = \frac{Mr^2}{2}$$

বা, $I = \frac{Mr^2}{4}$ (17)

২। বৃত্তাকার চাকতির পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে গমনকারী স্পর্শকের সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক
(Moment of inertia of a circular disc about a tangent perpendicular to its plane)

ধরা যাক, r ব্যাসার্ধের এবং M ভরবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার চাকতির পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে গমনকারী RS একটি স্পর্শক। চাকতির কেন্দ্র O দিয়ে গমনকারী PQ অপর একটি অক্ষ যা RS অক্ষের সমান্তরাল [চিত্র ৫'৮]।

এখন সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য অনুযায়ী স্পর্শক RS এর সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক I হলে আমরা পাই,

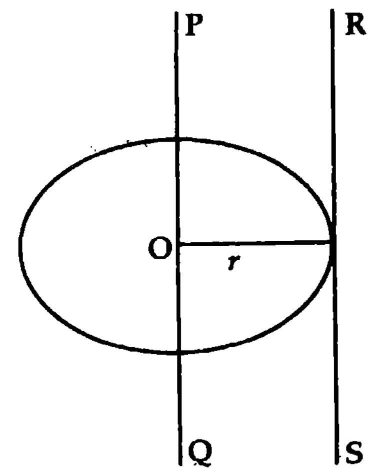
$$I = I_{PQ} + Mr^2$$

আবার, আমরা জানি r ব্যাসার্ধের এবং M ভরের একটি বৃত্তাকার চাকতির পৃষ্ঠের অভিলম্ব বরাবর চাকতির কেন্দ্র দিয়ে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক হল $\frac{Mr^2}{2}$।

সুতরাং, $I_{PQ} = \frac{Mr^2}{2}$

$$I = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2$$

$$= \boxed{\frac{3}{2} Mr^2} \quad (18)$$



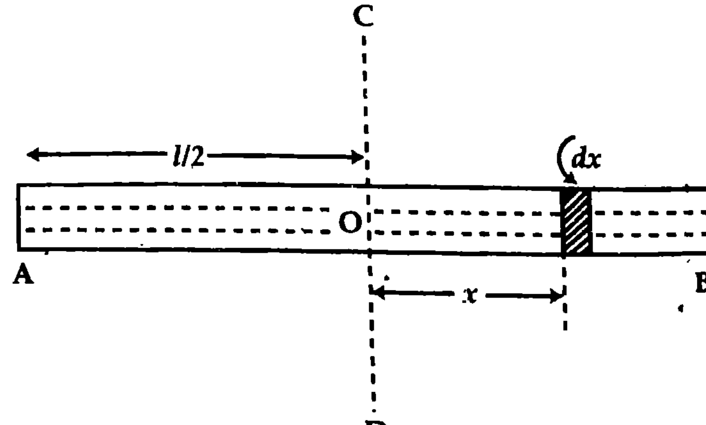
চিত্র ৫'৮

৫'১২ কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয়
Determination of moment of inertia and radius of gyration for some special cases

১। সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দু দিয়ে ও তার দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান ঐ দণ্ডের জড়তার ভ্রামক : $I = \frac{M}{12} l^2$

ধরি l দৈর্ঘ্য ও M ভরবিশিষ্ট একটি সুষম সরু দণ্ড AB-এর দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দু O দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষ CD-এর চতুর্দিকে ঘুরছে [চিত্র ৫'৯]। এই অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

দণ্ডটি সুষম হেতু তার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর = $\frac{M}{l}$। কাজেই CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর dM হলে $dM = \frac{M}{l} dx$। dx অংশটি ক্ষুদ্র হওয়ায় তার প্রতিটি কণা CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়। সুতরাং CD অক্ষের সাপেক্ষে dx অংশের জড়তার ভ্রামক $= dM \times x^2 = \frac{M}{l} \times dx \times x^2$



চিত্র ৫'৯

এবং একে $x = l/2$ এবং $x = -l/2$ সীমার মধ্যে সমাকলন করলে সমগ্র দণ্ডের জড়তা ভ্রামক পাওয়া যাবে।

CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক,

$$I = \int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{M}{l}\right)\times dx\times x^2 = \frac{M}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}$$

$$= \frac{M}{3l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3-\left(-\frac{l}{2}\right)^3\right] = \frac{M}{3l}\left(\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{8}\right) \quad \therefore \boxed{I=\frac{M}{12}l^2} \qquad (19)$$

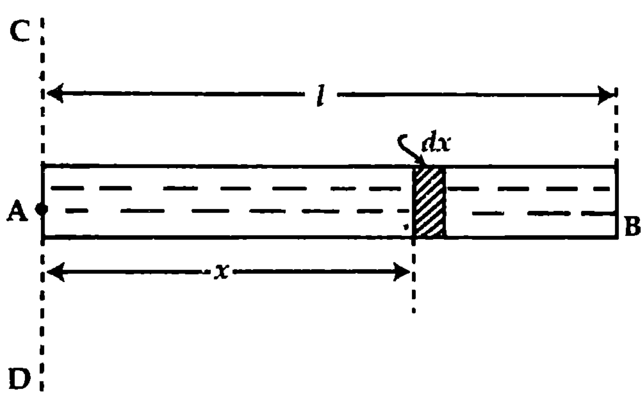
ধরি চক্রগতির ব্যাসার্ধ K

$$MK^2 = \frac{M}{12}l^2$$

$$\boxed{K=\frac{l}{\sqrt{12}}=\frac{l}{2\sqrt{3}}} \qquad (20)$$

২। সরু সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত দিয়ে ও তার দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক ঃ

ধরি AB একটি সরু ও সুষম দণ্ড। এর ভর M ও দৈর্ঘ্য l। দণ্ডটি তার এক প্রান্ত বিন্দু A দিয়ে ও দৈর্ঘ্যের লম্বভাবে অতিক্রান্ত CD-এর চারদিকে ঘুরছে [চিত্র ৫'১০]। এই CD অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তা ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র ৫'১০

বর্ণনা অনুসারে দণ্ডটি সুষম হওয়ায় তার প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর $\frac{M}{l}$। সুতরাং CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত দণ্ডটির dx দৈর্ঘ্যের একটি ক্ষুদ্র অংশের ভর $dM = \frac{M}{l}dx$। অংশটি ক্ষুদ্র হেতু এর প্রতিটি কণা CD অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত গণ্য করা যায়।

CD অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির এই ক্ষুদ্র অংশের জড়তার ভ্রামক $= \frac{M}{l}\times dx\times x^2$

এখন একে $x = 0$ ও $x = l$ এই সীমার মধ্যে সমাকলন করলে, CD অক্ষের সাপেক্ষে সমগ্র দণ্ডের জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে।

$$\text{নির্ণেয় জড়তার ভ্রামক, } I = \int_{x=0}^{x=l}\left(\frac{M}{l}\right)\times dx\times x^2 = \frac{M}{l}\int_{x=0}^{x=l}x^2dx$$

$$= \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{M}{3l}\times l^3$$

$$\boxed{\therefore I = \frac{1}{3}Ml^2} \qquad (21)$$

এখন চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে, $MK^2 = \frac{1}{3}Ml^2$

$$\boxed{\therefore K = \frac{l}{\sqrt{3}}} \qquad (22)$$

৩। সুষম পাতলা আয়তাকার পাতের কেন্দ্রবিন্দু বা ভারকেন্দ্র দিয়ে লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক ঃ

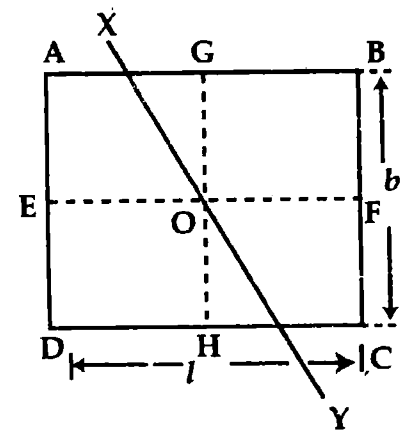
ধরি একটি সুষম পাতলা আয়তাকার পাত ABCD [চিত্র ৫'১১]। এর ভর M, দৈর্ঘ্য l = AB = CD ও প্রস্থ = b = AD = BC। পাতটি তার কেন্দ্রবিন্দু বা ভার কেন্দ্র O দিয়ে লম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষ XOY অক্ষের সাপেক্ষে ঘুরছে।

এখন, EF অক্ষর O বিন্দুগামী এবং AB বাহুর সমান্তরাল এবং GH অক্ষ O বিন্দুগামী এবং AD বাহুর সমান্তরাল। EF এবং GH পরস্পর লম্ব। XOY অক্ষ EF ও GH-এর উপর লম্ব।

লম্ব-অক্ষ উপপাদ্য অনুসারে XOY অক্ষের সাপেক্ষে ঐ পাতের জড়তার ভ্রামক,

$$I = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Mb^2}{12}$$

$$\boxed{\text{বা, } I = \frac{M}{12}(l^2 + b^2)}$$



চিত্র ৫'১১

আবার, $I = MK^2$

বা, $MK^2 = I = \frac{M}{12}(l^2 + b^2)$

বা, $K^2 = \frac{l^2 + b^2}{12}$

বা, $K = \sqrt{\frac{l^2 + b^2}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l^2 + b^2}{3}}$

চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l^2 + b^2}{3}}$ ... (23)

৪। পাতলা সুষম আয়তাকার পাতের কেন্দ্রবিন্দু বা ভারকেন্দ্র দিয়ে ও পাতের যে কোন এক বাহুর সমান্তরালভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান ঐ পাতের জড়তার ভ্রামক ঃ

ধরি একটি পাতলা ও সুষম আয়তাকার পাত ABCD [চিত্র ৫'১২]। এর ভর M ও দৈর্ঘ্য = l = AB = CD ও প্রস্থ = b = AD = BC

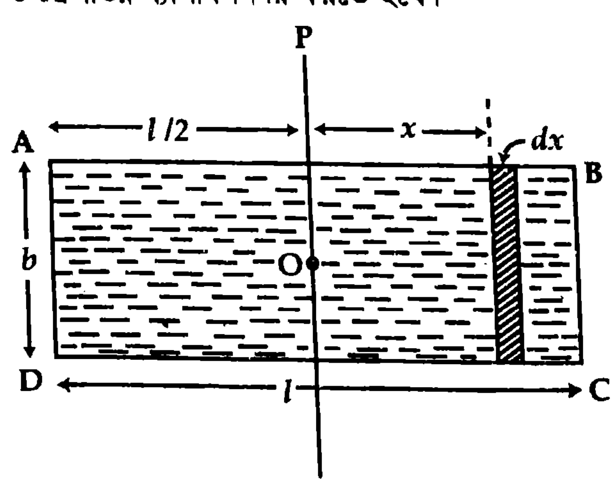
পাতটি তার কেন্দ্রবিন্দু O দিয়ে এবং তার প্রস্থ AD বা BC-এর সমান্তরালে অতিক্রান্ত অক্ষ PQ-এর চতুর্দিকে ঘুরছে। এই PQ অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

পাতটি সুষম হেতু তার প্রতি একক ক্ষেত্রফলের ভর $= \frac{M}{l \times b}$

কাজেই PQ অক্ষ হতে x দূরে অবস্থিত পাতটির ক্ষুদ্র dx দৈর্ঘ্য ও b প্রস্থবিশিষ্ট একটি সরু আয়তাকার ফালির ভর $= \frac{M}{l \times b} \times (b \times dx) = \frac{M}{l} \times dx$

পাতটি সরু হওয়ায় ঐ সরু অংশের প্রতিটি বিন্দু PQ অক্ষ হতে x দূরত্বে অবস্থিত গণ্য করা যায়।

$\therefore$ PQ অক্ষের সাপেক্ষে এই ফালিটির জড়তার ভ্রামক $= \frac{M}{l} \times dx \times x^2$



চিত্র ৫'১২

সমগ্র পাতটিকে প্রস্থের সমান্তরালে অনুরূপ কতকগুলো সমান সরু ফালিতে বিভক্ত করা যায়। তা হলে PQ অক্ষের সাপেক্ষে এই ফালিগুলোর জড়তার ভ্রামকের সমষ্টিই সমগ্র পাতটির জড়তার ভ্রামক নির্দেশ করবে।

$x = -l/2$ ও $x = l/2$ এই সীমার মধ্যে উপরোক্ত সরু ফালির জড়তার ভ্রামকের সমাকলন করলে PQ অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামক পাওয়া যাবে। ধরি পাতটির জড়তার ভ্রামক = I

$$I = \int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{M}{l}\right)dx \times x^2 = \frac{M}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx$$

$$= \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{M}{3l}\left[(l/2)^3 - (-l/2)^3\right] = \frac{M}{3l} \times \frac{2l^3}{8}$$

বা, $I = \frac{1}{12} Ml^2$ (24)

এখন চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে,

$$MK^2 = \frac{Ml^2}{12}$$

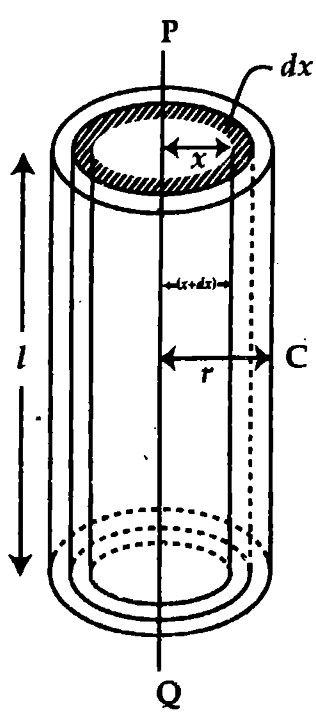
$$K = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{l}{2\sqrt{3}} \qquad (25)$$

এভাবে দেখানো যায় যে, দৈর্ঘ্যের সমান্তরালে ও দণ্ডের কেন্দ্রবিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডটির জড়তার ভ্রামক, $I = \frac{Mb^2}{12}$ এবং চক্রাকার ব্যাসার্ধ, $K = \frac{b}{2\sqrt{3}}$ ।

৫। নিজ অক্ষের চতুর্দিকে ঘূর্ণায়মান একটি নিরেট চোঙের জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ ঃ

ধরি একটি সুষম নিরেট চোঙ C-এর ভর M, দৈর্ঘ্য l ও ব্যাসার্ধ r [চিত্র ৫.১৩]। এটি নিজ অক্ষ PQ-এর চতুর্দিকে ঘুরছে। PQ সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে। বর্ণনা অনুসারে চোঙটির আয়তন = $\pi r^2 \times l$

চোঙের উপাদানের ঘনত্ব = $\frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{M}{\pi r^2 l}$



চিত্র ৫.১৩

PQ-এর চতুর্দিকে x ব্যাসার্ধ ও dx বিস্তারবিশিষ্ট একটি ফাঁপা সমাক্ষীয় পাতলা চোঙ বিবেচনা করি।

এই পাতলা চোঙের প্রস্থচ্ছেদ = $2\pi x dx$, আয়তন = $2\pi x \times dx \times l$ ও ভর = আয়তন × ঘনত্ব

$$= 2\pi x \times dx \times l \times \frac{M}{\pi r^2 l}$$

$$= \frac{2Mxdx}{r^2}$$

dx বিস্তারের এই চোঙটি পাতলা হেতু তার প্রতিটি কণা PQ হতে x দূরে বিবেচনা করা যায়। কাজেই PQ-এর সাপেক্ষে এই পাতলা চোঙের জড়তার ভ্রামক

$$= \frac{2Mxdx}{r^2} \times x^2 = \frac{2M}{r^2} x^3 dx$$

সমগ্র চোঙটিকে সমাক্ষীয় অনুরূপ অনেকগুলো পাতলা ফাঁপা চোঙের সমন্বয়ে গঠিত বিবেচনা করা যায়।

কাজেই $x = 0$ ও $x = r$ এই সীমার মধ্যে উপরোক্ত ফাঁপা চোঙের জড়তার ভ্রামককে সমাকলন করলে নিজ অক্ষ PQ-এর সাপেক্ষে সমগ্র চোঙটির জড়তার ভ্রামক I পাওয়া যাবে।

$$I = \int_0^r \frac{2M}{r^2} x^3 dx = \frac{2M}{r^2}\int_0^r x^3 dx = \frac{2M}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r$$

$$= \frac{2M}{4r^2}\left[r^4 - 0\right]$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} Mr^2 \qquad (26)$$

এক্ষেত্রে চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে,

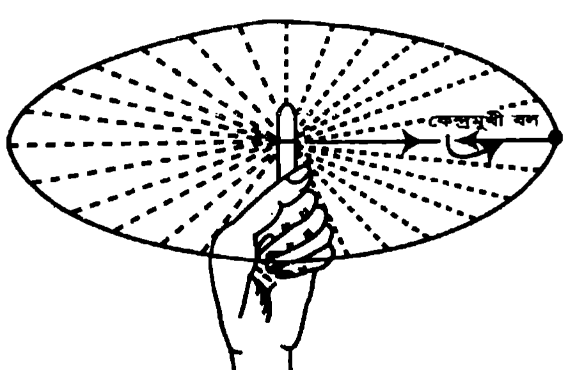
$$MK^2 = \frac{1}{2} Mr^2$$

$$\therefore K = \frac{r}{\sqrt{2}} \qquad (27)$$

৫.১১ কেন্দ্রমুখী বল
Centripetal force

বাহ্যিক বল প্রয়োগ না করলে সকল গতিশীল বস্তু গতি জড়তার দরুন সরলরেখায় সমবেগে চলতে থাকে। একটি বস্তুকে বৃত্তাকার পথে গতিশীল রাখতে হলে তার সরলরেখায় গতিশীল থাকার প্রবণতাকে প্রতি মুহূর্তে কেন্দ্রের দিকে ক্রিয়াশীল বল প্রয়োগ দ্বারা প্রতিরোধ করতে হয়। এই বলই **কেন্দ্রমুখী বল** (Centripetal Force)।

কেন্দ্রমুখী বলের সংজ্ঞা ঃ যখন কোন বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন যে বল সর্বদা বস্তুর উপরে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র অভিমুখে ক্রিয়া করে বস্তুটিকে বৃত্তপথে গতিশীল রাখে তাকে কেন্দ্রমুখী বল বলে। এই বলকে কেন্দ্রাভিক বা অভিকেন্দ্রিক বলও বলা হয়।



চিত্র ৫.১৪

উদাহরণ (Illustration) ঃ (ক) একটি ঢিল সুতার এক প্রান্তে বেঁধে হাত দিয়ে সুতার অপর প্রান্ত ধরে ঢিলটিকে সমদ্রুতিতে ঘুরাতে যেয়ে প্রতি মুহূর্তে হাত দ্বারা সুতা বরাবর ঢিলের উপর অবশ্যই বল প্রয়োগ করতে হবে; কেননা বল বস্তুর উপর গতিপথের সমকোণে ক্রিয়া করলেই বস্তুর শুধু গতির দিক পরিবর্তিত হবে। এখানে সুতা যে বলের সাহায্যে ঢিলটিকে [চিত্র ৫.14] কেন্দ্র অভিমুখে টেনে রাখে, তাকে কেন্দ্রমুখী বল বলে অর্থাৎ ঢিলের উপর সুতার যে টান বা বল তাই কেন্দ্রমুখী বল।

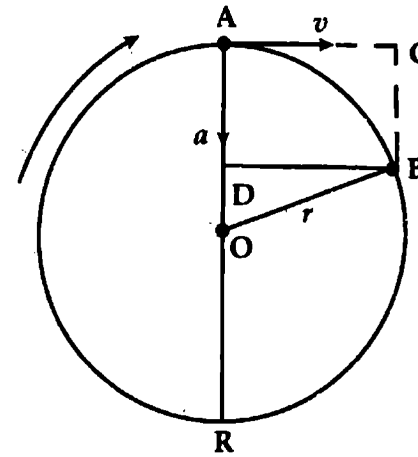
(খ) এক গোছা চাবিকে চেইন-এর এক প্রান্তে বেঁধে অপর প্রান্ত হাতে ধরে ঘুরালে চেইনটি চাবির উপর যে বল প্রয়োগ করে তার নাম কেন্দ্রমুখী বল।

পৃথিবী ও সূর্যের মধ্যকার মহাকর্ষীয় বল হতে পৃথিবী চারদিকে এবং ইলেকট্রন ও নিউক্লিয়াসের মধ্যকার তড়িতাকর্ষণ বল হতে ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসের চতুর্দিকে ঘুরবার প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল লাভ করে।

কেন্দ্রমুখী বলের সমীকরণ প্রতিপাদন—যদিও ৩নং অধ্যায়ে কেন্দ্রমুখী বা অভিলম্ব ত্বরণের সমীকরণ বের করা হয়েছে তবুও তা এ অধ্যায়ে অন্য পদ্ধতিতে বের করা হবে। কেন্দ্রমুখী ত্বরণের রাশি ব্যবহার করে নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করে কেন্দ্রমুখী বলের রাশিমালা প্রতিপাদন করা হবে।

মনে করি m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা O বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথ ABRA-এ v সমদ্রুতিতে ঘুরতে ঘুরতে কোন এক সময়ে A বিন্দুতে এসে পৌঁছল [চিত্র ৫.১৫]। যদি বস্তুকণার উপর কেন্দ্রমুখী বল ক্রিয়া না করত তবে তা স্পর্শক AC-এর দিকে অগ্রসর হত। এমতাবস্থায় মনে করি অতি অল্প সময় t-এ বস্তুটি A বিন্দু হতে C বিন্দুতে পৌঁছত। অতএব আমরা পাই,

অতিক্রান্ত দূরত্ব = বেগ × সময় বা, $AC = v \times t$ (28)



চিত্র ৫.১৫

কিন্তু যেহেতু বস্তুর উপর কেন্দ্রমুখী বল ক্রিয়া করছে, সেহেতু তা A হতে C বিন্দুতে না গিয়ে কেন্দ্রমুখী বল কর্তৃক সৃষ্ট ত্বরণ a-এর জন্য বৃত্তাকার পথে চলে উক্ত সময়ে A হতে B বিন্দুতে এসে AOR ব্যাসের সমান্তরালে CB-এর সমান দূরত্ব অতিক্রম করে গণ্য করা যায়।

কাজেই বর্ণনা অনুসারে বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে গতিশীল বস্তুর A হতে অতি অল্প t সময়ে B-তে যাওয়ার অর্থ উক্ত সময়ে বেগের জন্য AC দূরত্ব যাওয়া ও পরে C হতে ত্বরণের জন্য AC-এর সমকোণে CB-এর সমান দূরত্ব অতিক্রম করা।

$$CB = v_0 + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{বা, } CB = 0 + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \tag{29}$$

এখন B হতে AOR ব্যাসের উপর BD লম্ব টেনে ACBD সামান্তরিকটি পূর্ণ করি। তা হলে, চিত্র ও বর্ণনা হতে আমরা পাই,

$$OB^2 = DB^2 + OD^2$$

$$= DB^2 + (AO - AD)^2$$

$$= DB^2 + AO^2 - 2AO.AD + AD^2 \qquad OB = AO = r$$

$$\text{বা, } r^2 = (vt)^2 + r^2 - 2r \times \frac{1}{2}at^2 + (\frac{1}{2}at^2)^2 \qquad AC = vt = DB$$

$$\text{বা, } 0 = v^2t^2 - rat^2 + \frac{1}{4}a^2t^4 \qquad CB = \frac{1}{2}at^2 = AD$$

বা, $0 = v^2 - ra + \frac{1}{4}a^2t^2$ [t ক্ষুদ্র হেতু $\frac{1}{4}a^2t^2$-কে অগ্রাহ্য করা যায়]

বা, $0 = v^2 - ra$

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}} \tag{30}$$

$$\text{বা, } \boxed{a = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r} \qquad [\because v = \omega r]$$

বৃত্তাকার পথে ঘূর্ণনরত বস্তুর উপর ক্রিয়ারত কেন্দ্রমুখী বল F হলে নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র ($F = ma$) অনুযায়ী,

$$\boxed{F = m\frac{v^2}{r}} \tag{31}$$

বস্তুটির কৌণিক বেগ ω হলে, $v = \omega r$ হেতু

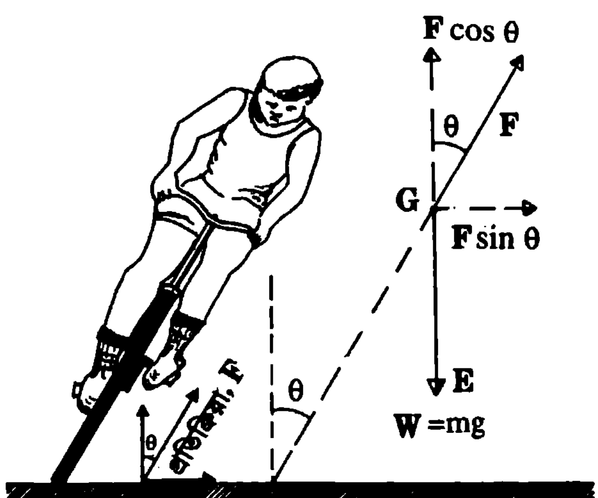
$$\boxed{F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r} \tag{32}$$

উল্লেখ্য : ভেক্টরের সাহায্যে লেখা যায়, $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$ $\vec{r}$ = কেন্দ্রের সাপেক্ষে বস্তুর অবস্থান বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর। $\vec{F}$ ও $\vec{r}$ পরস্পর বিপরীতমুখী হওয়ায় ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।

৫.১২ যানবাহন ও রাস্তার বাঁক
Vehicles and banking of roads

(১) বক্র পথে সাইকেল আরোহীর গতি : কোন সাইকেল আরোহী বক্র পথে চলার সময় সাইকেলসহ তার শরীরকে কেন্দ্রের দিকে হেলিয়ে রাখে। বক্র পথে চলার সময় কেন্দ্রমুখী বলের অভাবে তার উপর ক্রিয়ারত গতি জড়তাই তাকে রাস্তার অপর পাড়ে ছিটকিয়ে ফেলার চেষ্টা করে। এই প্রবণতাকে প্রশমিত করার জন্য সাইকেল আরোহী সাইকেলসহ তার শরীরকে বক্র পথে কেন্দ্রের দিকে হেলিয়ে রাখে। এভাবে কেন্দ্রমুখী বল সৃষ্টি করে।

ধরা যাক, একজন সাইকেল আরোহীকে v সমদ্রুতিতে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোন বৃত্তাকার পথে মোড় ঘুরার সময় মোড়ের কেন্দ্রের দিকে উল্লম্বের সাথে θ কোণে হেলে থাকতে হয় [চিত্র ৫.১৬]। আরও ধরা যাক সাইকেলসহ আরোহীর ওজন $W = mg$ এবং সাইকেলের উপর রাস্তার প্রতিক্রিয়া বল F। তা হলে তাদের মিলিত ওজন ভারকেন্দ্র দিয়ে সোজা নিচের দিকে GE বরাবর এবং F বল উল্লম্ব রেখার সাথে θ কোণে উপরের দিকে ক্রিয়া করবে। ভারসাম্যাবস্থায় মোড়ের কেন্দ্র বরাবর, F-এর অংশক, $F\sin\theta = \frac{mv^2}{r}$ এবং উল্লম্ব বরাবর F-এর অংশক, $F\cos\theta = W = mg$।



চিত্র ৫.১৬

$$\tan\theta = \frac{F\sin\theta}{F\cos\theta} = \frac{mv^2}{r} \div W$$

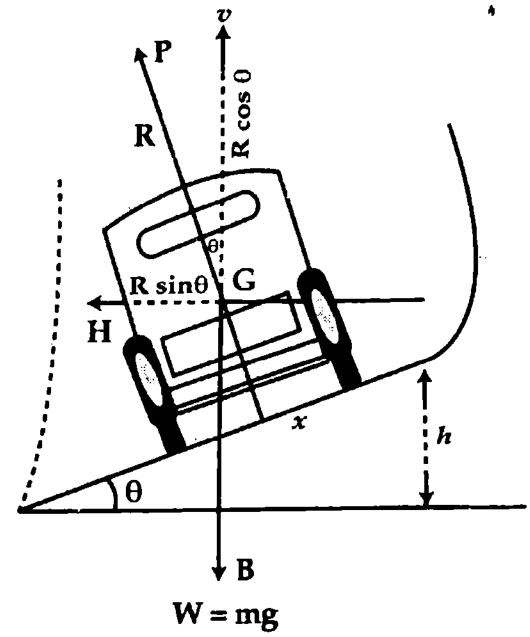
$$= \frac{mv^2}{r} \div mg = \frac{v^2}{rg}$$

বা $$\boxed{\tan\theta = \frac{v^2}{rg}} \tag{33}$$

সুতরাং (i) আরোহীকে বেশি বেগে মোড় নিতে উল্লম্ব রেখার সাথে বেশি কোণ করে হেলে থাকতে হবে।

(ii) উল্লম্ব রেখা হতে মোড়ের কেন্দ্রের দিকে কম বাঁকের রাস্তায় কম এবং বেশি বাঁকের রাস্তায় বেশি হেলে থাকতে হবে।

(২) রেল লাইন বা রাস্তা ঢালু রাখা : বক্রপথে মোটর বা রেলগাড়ি চলার সময় একটি কেন্দ্রমুখী বলের প্রয়োজন হয়। কেন্দ্রমুখী বলের অভাবে গতি জড়তার কারণে যানবাহন উল্টে যাওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এই জড়তাকে প্রশমিত করার জন্য বক্রপথে বাইরের রেল বা রাস্তা ভেতরের দিকের চেয়ে কিছুটা উঁচু করে কেন্দ্রমুখী বল সৃষ্টি করা হয়। এ ব্যবস্থাকে **রাস্তার ব্যাংকিং** (Banking of road) বলে।



চিত্র ৫.১৭

সমতল রাস্তা ও চাকার ঘর্ষণে যে কেন্দ্রমুখী বল পাওয়া যায় তা ক্ষেত্রবিশেষে প্রয়োজনের তুলনায় কম হয় এবং এ সব ক্ষেত্রে গাড়ি আস্তে না চালালে রাস্তা হতে পিছলিয়ে কাত হয়ে পড়ার সম্ভাবনা থাকে। কিন্তু মোড়ের রাস্তার কেন্দ্র যে দিকে সেই পার্শ্ব অপেক্ষা অপর পার্শ্ব উঁচু হলে রাস্তা ও চাকার মধ্যকার ঘর্ষণ বলের মান একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। ফলে ঐ রাস্তায় গাড়ির বেগ একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকলে গাড়ি প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল রাস্তা হতে সংগ্রহ করে চলতে পারে।

ধরা যাক, $W = mg$ ওজনের একটি গাড়ি v দ্রুতিতে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি রাস্তায় মোড় নিচ্ছে এবং রাস্তাটি অনুভূমিকের সাথে θ কোণে আনত [চিত্র ৫.১৭]। এ অবস্থায় গাড়ির ভারকেন্দ্র G দিয়ে mg খাড়া নিচের দিকে GB বরাবর এবং রাস্তার অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া R উল্লম্ব রেখা GV-এর সাথে θ কোণে আনত হয়ে GP বরাবর ক্রিয়া করছে। ভারসাম্য অবস্থায় অনুভূমিক রেখা GH বরাবর R-এর অংশক,

$$R \sin\theta = \frac{mv^2}{r}$$

এবং উল্লম্ব রেখা GV বরাবর R-এর অংশক,

$$R \cos\theta = mg$$

$$\tan\theta = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta} = \frac{mv^2}{r} \div mg = \frac{v^2}{rg}$$

বা, $\tan\theta = \dfrac{v^2}{rg}$ (34)

সুতরাং (i) v বেশি হলে, θ-ও বেশি হতে হবে।

(ii) বেশি বাঁকের রাস্তায় θ বড় হতে হবে।

অনুসিদ্ধান্ত : রেল লাইনের ক্ষেত্রে যদি বহিস্থ লাইনটি অন্তস্থ লাইন অপেক্ষা h উচ্চতায় থাকে এবং দুটি লাইনের মধ্যবর্তী দূরত্ব যদি x হয়, তবে

$\sin\theta = \dfrac{h}{x}$ (35)

এবং $\tan\theta = \dfrac{h}{\sqrt{x^2 - h^2}}$ (36)

অবশ্য θ ক্ষুদ্র হলে, $\tan\theta = \sin\theta = \dfrac{h}{x}$

৫.১৩ রৈখিক ও কৌণিক গতির মধ্যে সাদৃশ্য
Similarities between linear and angular motion

রৈখিক গতি ও ঘূর্ণন গতির মধ্যে কতকগুলো সাদৃশ্য পরিলক্ষিত হয়। যেমন—

(i) রৈখিক গতির ক্ষেত্রে বস্তুর রৈখিক ভরবেগ = ভর × বেগ $= mv$

ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে বস্তুর কৌণিক ভরবেগ = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক বেগ $= I\omega$

(ii) রৈখিক গতির ক্ষেত্রে রৈখিক ত্বরণের উৎস বল এবং বল = ভর × ত্বরণ, $ma = m\dfrac{dv}{dt}$

কৌণিক গতির ক্ষেত্রে কৌণিক ত্বরণের উৎস টর্ক এবং টর্ক = জড়তার ভ্রামক × কৌণিক ত্বরণ $= I\alpha = I\dfrac{d\omega}{dt}$

(iii) রৈখিক গতির ক্ষেত্রে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}$ × ভর × (রৈখিক বেগ)$^2 = \frac{1}{2}mv^2$

ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে, গতিশক্তি $= \frac{1}{2}$ × জড়তার ভ্রামক × (কৌণিক বেগ)$^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$

উপরোক্ত আলোচনা হতে বুঝা যায় যে,

(ক) রৈখিক গতিতে বস্তুর ভরের যে ভূমিকা, কৌণিক গতির ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামকেরও সেই ভূমিকা।

(খ) সংক্ষেপে বলা যায় যে, রৈখিক গতির ক্ষেত্রে বস্তুর ভর ও ঘূর্ণন গতির ক্ষেত্রে জড়তার ভ্রামক দুটি সদৃশ রাশি। অবশ্য রাশি দুটি সমান নয়। বস্তুর ভর অপরিবর্তিত থাকলে রৈখিক জড়তা অপরিবর্তিত থাকে। কিন্তু বিভিন্ন ঘূর্ণাক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক বিভিন্ন মান ধারণ করে।

স্মরণিকা

দ্বন্দ্ব বা কাপল : একটি বস্তুর দুটি বিভিন্ন বিন্দুতে প্রযুক্ত দুটি সমান, সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী বলকে দ্বন্দ্ব বা কাপল বলে।

টর্ক : অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর উপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের ভেক্টর গুণফলকে টর্ক বলে।

কৌণিক ভরবেগ : ঘূর্ণনরত কোণ বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

জড়তার ভ্রামক : কোন অক্ষ সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত কোন দৃঢ় বস্তুর প্রতিটি কণার ভর এবং অক্ষ হতে তাদের প্রত্যেকের লম্ব দূরত্বের বর্গের গুণফলকে জড়তার ভ্রামক বলে।

কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র : বস্তুর উপর ক্রিয়ারত বহিস্থ টর্কের লব্ধি শূন্য হলে, ঘূর্ণায়মান বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তন হবে না। একে কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বলে।

চক্রগতির ব্যাসার্ধ : যদি কোন দৃঢ় বস্তুর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যেখানে বস্তুটির সমস্ত ভর কেন্দ্রীভূত আছে ধরা হয় এবং ঘূর্ণন অক্ষ সাপেক্ষে ঐ বিন্দুতে জড়তার ভ্রামক সমগ্র বস্তুটির জড়তার ভ্রামকের সমান হয়, তবে ঐ অক্ষ হতে ঐ বিন্দুর দূরত্বকে চক্রগতির ব্যাসার্ধ বলা হয়।

লম্ব অক্ষ উপপাদ্য : কোন পাতলা সমতল পাতের তলে অবস্থিত দুটি পরস্পর লম্ব অক্ষের সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকদ্বয়ের সমষ্টি ঐ পাতে অবস্থিত দু' অক্ষের ছেদ বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব সাপেক্ষে পাতটির জড়তার ভ্রামকের সমান হবে।

সমান্তরাল অক্ষ উপপাদ্য : যে কোন অক্ষের সাপেক্ষে কোন সমতল পাতলা পাতের জড়তার ভ্রামক পাতটির ভার কেন্দ্রগামী এবং তার সমান্তরাল অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক এবং পাতের ভর ও দুই অক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের গুণফলের সমষ্টির সমান।

কেন্দ্রমুখী বল : যখন কোন বস্তু বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন যে বল সর্বদা বস্তুর উপরে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র অভিমুখে ক্রিয়া করে বস্তুটিকে বৃত্তপথে গতিশীল রাখে তাকে কেন্দ্রমুখী বল বলে।

নিউটনের কৌণিক গতিসূত্র :

প্রথম সূত্র : কোন বস্তুর উপর টর্ক ক্রিয়াশীল না হলে স্থির বস্তু স্থির অবস্থানে এবং ঘূর্ণনরত বস্তু সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকবে।

দ্বিতীয় সূত্র : ঘূর্ণনরত কোন বস্তুর কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার ঐ বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল টর্কের সমানুপাতিক এবং টর্ক যে দিকে ক্রিয়া করে কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনও ঐ দিকে ঘটে।

তৃতীয় সূত্র : প্রত্যেক ক্রিয়ামূলক টর্কের একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়ামূলক টর্ক আছে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

দ্বন্দ্বের ভ্রামক = বল × লম্ব দূরত্ব = $F \times d$ (1)

টর্ক বা বলের ভ্রামক = বল × লম্ব দূরত্ব = $F \times d$ (2)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (3)$$

$$\tau = I d\omega / dt = I\alpha \quad (4)$$

$$L = I\omega \quad (5)$$

$$K.E = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad (6)$$

$$I = \Sigma mr^2 \quad (7)$$

$$= MK^2 \quad (8)$$

$$I_z = \Sigma mx^2 + \Sigma my^2 = I_x + I_y \quad (9)$$

$$I = I_G + Mh^2 \quad (10)$$

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (11)$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (12)$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \quad (13)$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad (14)$$

$\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{x}$ (θ ক্ষুদ্র হলে) (15)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। হাইড্রোজেন পরমাণুর ইলেকট্রন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে $5{\cdot}3 \times 10^{-11}$ m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে $2{\cdot}21 \times 10^6$ ms^{-1} সমদ্রুতিতে ঘুরছে। ইলেকট্রনের উপর ক্রিয়ারত লম্ব ত্বরণ ও কেন্দ্রমুখী বল নির্ণয় কর। একবার আবর্তনে ইলেকট্রনের কত সময় লাগে ? [ইলেকট্রনের ভর = $9{\cdot}1 \times 10^{-31}$ kg] [সি. বো. ২০০১]

ধরি লম্ব ত্বরণ = a, কেন্দ্রমুখী বল = F ও একবার আবর্তনে ব্যয়িত সময় = T

এখানে, $v = 2{\cdot}21 \times 10^6$ ms^{-1}
$r = 5{\cdot}3 \times 10^{-11}$ m

আমরা পাই, (i) $a = \frac{v^2}{r}$

$$a = \frac{(2{\cdot}21 \times 10^6 \text{ ms}^{-1})^2}{5{\cdot}3 \times 10^{-11} \text{m}}$$

$$= \frac{4{\cdot}884}{5{\cdot}3} \times 10^{23} \text{ ms}^{-2} = 9{\cdot}215 \times 10^{22} \text{ ms}^{-2}$$

এখানে, $m = 9{\cdot}1 \times 10^{-31}$ kg

(ii) $F = \frac{mv^2}{r}$

$$F = 9{\cdot}1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 9{\cdot}215 \times 10^{22} \text{ ms}^{-2}$$

$$= 83{\cdot}86 \times 10^{-9} \text{ N}$$

(iii) $v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2 \times 3{\cdot}142 \times 5{\cdot}3 \times 10^{-11} \text{ m}}{2{\cdot}21 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}} = 1{\cdot}5 \times 10^{-16} \text{ s}$$

২। একটি ঘূর্ণনরত কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর $r = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N হলে টর্কের মান ও দিক নির্ণয় কর।

এখানে,
ব্যাসার্ধ ভেক্টর, $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m
বল, $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N
টর্ক, $\vec{\tau} = ?$
টর্কের মান, $\tau = ?$

আমরা জানি, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6 + 3) - \hat{j}(-6 + 6) + \hat{k}(6 - 12)$$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{k}$$

$\vec{\tau} = -(3\hat{i} + 6\hat{k})\text{N-m}$

τ-এর মান $= \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

উত্তর ঃ $-(3\hat{i} + 6\hat{k})\text{N-m}, \sqrt{45}$

৩। 500 g ভরের একটি বস্তু 2 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে আবর্তন করছে। আবর্তনকাল 10 s হলে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ বের কর।

আমরা জানি, $L = I\omega$

এখানে, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

এবং $I = mr^2$

অতএব, $L = mr^2 \times \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi mr^2}{T} = \frac{2 \times 3.14 \times 0.5 \times (2)^2}{10}$

$= 1.256 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$

এখানে,

বস্তুর ভর, $m = 500 \text{ g} = 0.5 \text{ kg}$

বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ, $r = 2 \text{ m}$

আবর্তনকাল, $T = 10 \text{ s}$

কৌণিক ভরবেগ, $L = ?$

৪। একটি চাকার ভর 5 kg এবং কোন অক্ষ সাপেক্ষে চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0.2 m। এর জড়তার ভ্রামক কত ? চাকাটিতে 2 rad s⁻² কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ? [ঢা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$I = MK^2$

$= 5 \times (0.2)^2$

$= 5 \times 0.04$

$= 0.2 \text{ kg m}^2$

এখানে,

$M = 5 \text{ kg}$

$K = 0.2 \text{ m}$

$I = ?$

আবার,

$\tau = I\alpha$

$= 0.2 \times 2$

$= 0.4 \text{ N-m}$

এখানে,

$I = 0.2 \text{ kgm}^2$

$\alpha = 2 \text{ rad s}^{-2}$

$\tau = ?$

৫। 0.250 kg ভরের একটি পাথর খণ্ডকে 0.75 m লম্বা একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 90 বার ঘুরালে সুতার উপর কত টান পড়বে ? [ব. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$F = m\omega^2 r$

$F = 0.25 \times (3\pi)^2 \times 0.75$

$= 0.25 \times (3 \times 3.14)^2 \times 0.75$

$= 16.66 \text{ N}$

এখানে,

$m = 0.25 \text{ kg}$

$r = 0.75 \text{ m}$

$\omega = 2\pi \frac{N}{t} = 2\pi \times \frac{90}{60}$

$= 3\pi \text{ rads}^{-1}$

৬। 0.15 kg ভরের একটি পাথর খণ্ডকে 0.75m লম্বা একটি সুতার এক প্রান্তে বেঁধে বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 90 বার ঘুরালে সুতার উপর টান নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$F = m\omega^2 r$

$= 0.15 \times (3\pi)^2 \times 0.75$

$= 9.98 \text{ N}$

এখানে,

$m = 0.15 \text{ kg}$

$r = 0.75 \text{ m}$

$\omega = 2\pi \frac{N}{t} = 2\pi \times \frac{90}{60}$

$= 3\pi \text{ rad s}^{-1}$

৭। 0.1 kg ভরের একটি পাথরকে 0.5 m লম্বা একটি সুতার সাহায্যে কক্ষপথে ঘুরানো হচ্ছে। পাথরটি প্রতি মিনিটে বৃত্তপথে 30 বার পূর্ণ-ঘূর্ণন সম্পন্ন করে। সুতার টান নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৬]

আমরা জানি,

$F = m\omega^2 r$

$= 0.1 \times \pi^2 \times 0.5$

$= 0.1 \times 9.87 \times 0.5$

$= 0.4935 \text{ N}$

এখানে,

$m = 0.1 \text{ kg}$

$r = 0.5 \text{ m}$

$\omega = 2\pi n = 2\pi \frac{N}{t} = 2\pi \frac{30}{60}$

$= \pi \text{ rads}^{-1}$

BG & JEWEL

৮। একটি চাকার ভর 5 kg এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm। এর জড়তার ভ্রামক কত? চারদিকে 1 rad s^{-2} কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ? [চ. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$$I = Mk^2$$
$$I = 5 \times (0.25)^2$$
$$= 0.3125 \text{ kg-m}^2$$

এখানে,
$M = 5$ kg
$k = 25$ cm
$= 0.25$ m
$I = ?$

আবার, $\tau = I\alpha$
$$\tau = 0.3125 \times 4$$
$$= 1.25 \text{ N-m}$$

এখানে,
$I = 0.3125$ kg - m^2
$\alpha = 4$ rads^{-2}
$\tau = ?$

P✓

৯। একজন সাইকেল চালক ঘণ্টায় 35.28 km বেগে চলাকালীন 32.6 m ব্যাসার্ধের একটি মোড়ে বাঁক নেয়। উল্লম্বের সাথে তার আনতি কোণের ট্যানজেন্ট বের কর। [$g = 9.8$ ms^{-2}]

আমরা পাই, $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$\tan\theta = \frac{(9.8 \text{ ms}^{-2})^2}{32.6 \text{ m} \times 9.8 \text{ ms}^{-2}} = 0.3$$

এখানে,
$v = 35.28$ km h^{-1}
$= \frac{35.28 \times 10^3 \text{m}}{60 \times 60 \text{s}} = 9.8$ ms^{-1}
$r = 32.6$m
$g = 9.8$ ms^{-2}

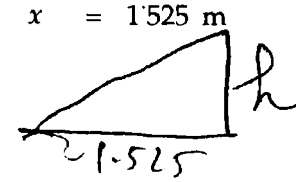
১০। রেললাইনের একটি বাঁকের ব্যাসার্ধ 98 m এবং লাইনের দুই পাতের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1.525 m। ভিতরের পাত অপেক্ষা বাইরের পাত কতখানি উঁচু হলে বাইরের পাতে কোনরূপ চাপ প্রয়োগ না করে একটি ট্রেন 9.8 ms^{-1} দ্রুতিতে বাঁক নিতে পারবে ?

মনে করি নির্ণেয় উচ্চতা $= h$

আমরা পাই, $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$\tan\theta = \frac{(9.8 \text{ ms}^{-1})^2}{98 \text{ m} \times 9.8 \text{ ms}^{-2}} = 0.1$$

এখানে, $r = 98$ m
$g = 9.8$ ms^{-2}
$v = 9.8$ ms^{-1}
$x = 1.525$ m



θ-এর মান ক্ষুদ্র হেতু $\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{x}$ লেখা যায়

$$\sin\theta = 0.1 = \frac{h}{x}$$

বা, $h = 0.1 \times x = 0.1 \times 1.525 \text{ m} = 0.1525 \text{ m}$

$\frac{v^2}{rg} = \tan\theta = h/1.525$

১১। একটি রেল লাইনের বাঁকের ব্যাসার্ধ 200 m এবং রেল লাইনের পাতদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 m। ঘণ্টায় 50.4 km বেগে চলন্ত গাড়ির ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় ব্যাংকিং-এর জন্য বাইরের লাইনের পাতকে ভিতরের লাইনের পাত অপেক্ষা কতটুকু উঁচু করতে হবে ? [সি. বো. ২০০৩]

মনে করি, উচ্চতা $= h$

আমরা পাই, $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$\tan\theta = \frac{(14)^2}{200 \times 9.8} = 0.1$$

θ-এর মান ক্ষুদ্র হলে, $\tan\theta = \sin\theta = \frac{h}{x}$ লেখা যায়,

এবং $\sin\theta = \frac{h}{x}$

$$0.1 = \frac{h}{1}$$

বা, $h = 0.1 \times 1$
$h = 0.1$ m

এখানে,
$r = 200$ m
$g = 9.8$ m
$v = 50.4$ km h^{-1}
$= \frac{50.4 \times 1000}{60 \times 60}$
$= 14$ ms^{-1}
$x = 1$ m
$h = ?$

$\frac{v^2}{rg} = \tan\theta = h$

১২। একটি বৃত্তাকার পাতের ব্যাসার্ধ 0·3m এবং প্রতি বর্গমিটার ক্ষেত্রের ভর 0·1 kg। এর কেন্দ্র দিয়ে এবং তলের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

একটি বৃত্তাকার পাতের কেন্দ্র দিয়ে এবং এর পৃষ্ঠের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক $I = \frac{1}{2}Mr^2$

$$I = \frac{1}{2} \times (9 \times 3{\cdot}14 \times 10^{-3}\,kg) \times (0{\cdot}3\,m)^2$$
$$= 12{\cdot}717 \times 10^{-4}\,kgm^2$$

এখানে, $r = 0{\cdot}3\,m$

M = ক্ষেত্রফল × প্রতি বর্গমিটারে ভর
$= \pi r^2 \times$ প্রতি বর্গমিটারে ভর
$= 3{\cdot}14 \times (0{\cdot}3\,m)^2 \times 0{\cdot}1\,kgm^{-2}$
$= 9 \times 3{\cdot}14 \times 10^{-3}\,kg$

১৩। 100 m ব্যাসের বৃত্তাকার পথে কোন মোটর সাইকেল আরোহী কত বেগে ঘুরলে উল্লম্ব তলের সাথে তিনি 30° কোণে আনত থাকবেন ? [চ. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$v = \sqrt{rg\tan\theta}$$
$$= \sqrt{(50m)\,(9{\cdot}8ms^{-2})\tan 30^\circ}$$
$$= \sqrt{50m \times 9{\cdot}8\,ms^{-2} \times 0{\cdot}5773}$$
$$= 16{\cdot}82\ ms^{-1}$$

এখানে,
$r = \frac{100}{2} = 50\,m$
$g = 9{\cdot}8\,ms^{-2}$
$\theta = 30^\circ$
$v = ?$

১৪। 100 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বাঁকা পথে 60 kmh⁻¹ বেগে গাড়ি চালাতে হলে পথটিকে কত ডিগ্রী কোণে আনত রাখতে হবে ? [য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

$$\tan\theta = \frac{50 \times 50}{3 \times 3 \times 100 \times 9{\cdot}8}$$

বা, $\tan\theta = 0{\cdot}2834$

$\theta = 15{\cdot}82^\circ$

এখানে,
$r = 100\,m$
$v = 60\,kmh^{-1} = \frac{50}{3}\,ms^{-1}$
$\theta = ?$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\,ms^{-2}$

১৫। 3, 4 ও 5 একক ভরের তিনটি কণার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (4, 0, −1), (3, − 2, 3) ও (2, 1, 4)। z-অক্ষের সাপেক্ষে তাদের জড়তার ভ্রামক ও চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $I_z = \Sigma m_i x_i^2 + \Sigma m_i y_i^2 = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2)$

প্রশ্নানুযায়ী, $I_z = 3\,(4^2 + 0^2) + 4(3^2 + (-2)^2) + 5(2^2 + 1^2)$

$= 48 + 52 + 25 = 125$ একক

চক্রগতির ব্যাসার্ধ K হলে, $\Sigma m_i K^2 = I$

বা, $(3 + 4 + 5)K^2 = 125$

$K = \sqrt{\frac{125}{12}} = 3{\cdot}227$ একক

১৬। কোন অক্ষ সাপেক্ষে একটি বস্তুর জড়তার ভ্রামক 100 kgm²। উক্ত অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির চক্রগতির ব্যাসার্ধ কত ? (বস্তুটির ওজন 9·8 N)

আমরা জানি,

$I = MK^2$

বা, $K^2 = \frac{I}{M}$

বা, $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$

$K = \left(\frac{100}{1}\right)^{\frac{1}{2}} = 10$

$K = 10m$

এখানে,
জড়তার ভ্রামক, $I = 100\,kgm^2$
ভর, $M = \frac{9{\cdot}8}{9{\cdot}8}\,kg = 1\,kg$
চক্রগতির ব্যাসার্ধ, $K = ?$

১৭। একটি ঘূর্ণায়মান লোহার গোলকের ভর 0·03kg। ঘূর্ণন অক্ষ হতে এর দূরত্ব 1·5m। অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$I = mr^2$

$I = 0{\cdot}03 \times (1{\cdot}5)^2$

$= 0{\cdot}0675\ kgm^2$

এখানে,

ভর, $m = 0{\cdot}03$ kg

ঘূর্ণন অক্ষ হতে দূরত্ব, $r = 1{\cdot}5$m

জড়তার ভ্রামক, I = ?

P.V

১৮। 0·01 kg ভর ও 0·08 m দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডের এক প্রান্তের চারদিকে একটি বস্তু দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে প্রতি মিনিটে 50 বার ঘুরছে। এর কৌণিক গতিশক্তি নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $K.E_r. = \frac{1}{2} I\omega^2$

প্রশ্নানুযায়ী, $I = \frac{1}{3} m l^2$, $m = 0{\cdot}01$ kg, $l = 0{\cdot}08$ m ও

কৌণিক বেগ, $\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 50\ rad}{60s} = \frac{5}{3} \times 3{\cdot}14\ rad\ s^{-1}$

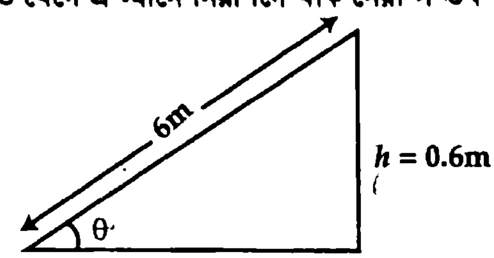
নির্ণেয় কৌণিক গতিশক্তি, $K.E_r. = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} ml^2\right) \times \omega^2$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3} \times 0{\cdot}01 kg \times (0{\cdot}08\ m)^2\right\} \times \left(\frac{5}{3} \times 3{\cdot}14\ rad\ s^{-1}\right)^2$

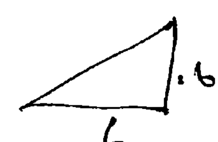
$= 2{\cdot}92 \times 10^{-4}$ J

P.V

১৯। একটি রাস্তা 60m ব্যাসার্ধে বাঁক নিয়েছে। ঐ স্থানে রাস্তাটি 6m চওড়া এবং এর ভিতরের কিনারা হতে বাইরের কিনারা 0·6m উঁচু। সর্বোচ্চ কত বেগে ঐ স্থানে নিরাপদে বাঁক নেয়া সম্ভব ?



চিত্র ঃ ৫·১৮



$\tan\theta = .1 = \frac{v^2}{rg}$

$\Rightarrow v = 7.67m$

আমরা জানি, নিরাপদ বাঁকের জন্য,

$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$

বা, $v^2 = rg \tan\theta$

বা, $v^2 = 60 \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}1$

$= 58{\cdot}8$

$v = \sqrt{58{\cdot}8}$

$= 7{\cdot}67 ms^{-1}$

এখানে,

$\sin\theta = \frac{0{\cdot}6}{6} = 0{\cdot}1$

$\theta = \sin^{-1}(0{\cdot}1) = 5{\cdot}74°$

$\tan\theta = \tan 5{\cdot}74° = 0{\cdot}1$

ব্যাসার্ধ, $r = 60$ m

$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

সর্বোচ্চ বেগ, $v = ?$

২০। কোন অক্ষ সাপেক্ষে একটি লৌহ নির্মিত বস্তুর চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0·5 m। বস্তুটির ভর 0·5 kg হলে এর জড়তার ভ্রামক কত ? [কু. বো. ২০০০]

$I = MK^2$

$= 0{\cdot}5 \times (0{\cdot}5)^2$

$= 0{\cdot}125\ kg\ m^2$

দেয়া আছে,

K = 0·5 m

M = 0·5 kg

I = ?

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। সমবেগে চলমান বস্তুর ত্বরণ থাকে না, কিন্তু বৃত্তাকার পথে সমদ্রুতিতে চলতে থাকলেও বস্তুর ত্বরণ ঘটে কেন ?

২। বাঁকা পথে অতি দ্রুত গতিশীল গাড়ি কেন উল্টে যায়—ব্যাখ্যা কর।

৩। নিম্নলিখিত ঘটনাসমূহ ব্যাখ্যা কর ঃ

(ক) বৃত্তাকার পথে চলার সময় সাইকেল আরোহীর গা আপনা-আপনি খাড়া অবস্থা হতে বৃত্তাকার পথের কেন্দ্রের দিকে অবনত হয়ে যায়।

(খ) বাঁকের মুখে রাস্তা কিংবা রেল লাইন কাত করে রাখা হয়।

(গ) গাড়ি মোড় ঘুরার সময় তার আরোহী বাঁকের কেন্দ্রের বিপরীত দিকে ঝুঁকে পড়ে। [রা. বো. ২০০২]

৪। টর্ক কাকে বলে ? [য. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০০; চ. বো. ২০০১; সি. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০০]
বা, টর্ক বলতে কি বুঝ? [ঢা. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৪; সি. বো. ২০০৩]
৫। কৌণিক ভরবেগ কাকে বলে ? [য. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০০ ; চ. বো. ২০০৬, ২০০২]
৬। কেন্দ্রমুখী বল বলতে কি বুঝ? [কু. বো. ২০০৩]
৭। জড়তার মোমেন্ট বা ভ্রামক কাকে বলে? [য. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০১; চ. বো. ২০০০]
৮। কৌণিক ভরবেগের ভেক্টর সংজ্ঞা দাও? [সি. বো. ২০০৪]
৯। কৌণিক গতি সংক্রান্ত নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রটি বিবৃত কর। [চ. বো. ২০০২]
১০। চক্রগতির ব্যাসার্ধ কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৬, চ. বো. ২০০৬, ব. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০২]
১১। টর্কের মাত্রা কি ? [কু. বো. ২০০১]
১২। সংজ্ঞা দাও ঃ
কৌণিক বেগ, কৌণিক ত্বরণ [রা. বো. ২০০১]
কৌণিক ভরবেগ, [ঢা. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৪, ২০০২]
চক্রগতির ব্যাসার্ধ [সি. বো. ২০০৬, ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০১]
কেন্দ্রমুখী বল, জড়তার ভ্রামক [ঢা. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০০]
দ্বন্দ্ব, টর্ক [চ. বো. ২০০৩]।
কেন্দ্রমুখী ত্বরণ [চ. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০১]

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। রৈখিক বেগ ও কৌণিক বেগের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা কর। [ঢা. বো. ২০০৫]

২। টর্ক বলতে কি বুঝ ? দেখাও যে, কোন স্থির অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান একটি বস্তুর উপর ক্রিয়ারত টর্ক তার জড়তার ভ্রামক ও কৌণিক ত্বরণের গুণফলের সমান। বা, $\tau = I\alpha$ সমীকরণটি প্রতিপাদন কর।
[কু. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০৩; য. বো. ২০০২ ; চ. বো. ২০০২]

অথবা, প্রমাণ কর যে, $\tau = I\alpha$ যখন প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ব. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৫]

৩। $L = I\omega$ সমীকরণটি প্রতিপাদন কর। [চ. বো. ২০০৪]

৪। কৌণিক ভরবেগ বা ভরবেগের ভ্রামকের সংজ্ঞা দাও। একটি স্থির অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান একটি দৃঢ় বস্তুর কৌণিক ভরবেগের জন্য একটি রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [রা. বো. ২০০১; কু. বো. ২০০০]

৫। টর্ক ও কৌণিক ত্বরণ কাকে বলে ? এদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর।

৬। একটি কণার কৌণিক ভরবেগের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, সময়ের সাথে কোন বস্তুকণার কৌণিক ভরবেগের পরিবর্তনের হার তার উপর ক্রিয়ারত টর্কের সমান। [কু. বো. ২০০০]

৭। কৌণিক গতির জন্য নিউটনের সূত্র বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০২]

৮। কৌণিক ভরবেগের সংরক্ষণ সূত্র বর্ণনা ও ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০২]

৯। প্রমাণ কর যে, একক সমকৌণিক বেগে আবর্তনরত কোন দৃঢ় বস্তুর গতিশক্তি সংখ্যাগতভাবে এর জড়তার ভ্রামকের অর্ধেক। [ঢা. বো. ২০০১]

১০। দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক কি ? প্রমাণ কর যে, একক সমকৌণিক বেগে আবর্তনরত কোন দৃঢ় বস্তুর জড়তার ভ্রামক সংখ্যাগতভাবে এর গতিশক্তির দ্বিগুণ। [ঢা. বো. ২০০১]

১১। কোন অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণায়মান কোন বস্তুর গতিশক্তির সমীকরণ নির্ধারণ কর।

১২। জড়তার ভ্রামক সংক্রান্ত উপপাদ্য দুটি ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০২]

১৩। জড়তার ভ্রামকের উপর লম্ব অক্ষসমূহের উপপাদ্য বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০২; সি বো. ২০০২]

১৪। জড়তার ভ্রামক বুঝিয়ে দাও। জড়তার ভ্রামক সম্পর্কে অক্ষ উপপাদ্য দুটি চিহ্নিত কর। [সি. বো. ২০০৫]

১৫। জড়তার ভ্রামকের উপর সমান্তরাল অক্ষসমূহের উপপাদ্য বিবৃত কর ও এর একটি প্রয়োগ দেখাও।

১৬। একটি সরু ও সুষম দণ্ডের এক প্রান্ত দিয়ে এবং দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে অতিক্রান্ত অক্ষের সাপেক্ষে তার জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০১; চ. বো. ২০০৫]

১৭। একটি পাতলা ও সুষম বৃত্তাকার চাকতির ভর M ও ব্যাসার্ধ r_1। যে কোন একটি ব্যাসের সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০১]

১৮। একটি সরু ও সুষম দণ্ডের মধ্যবিন্দু দিয়ে এর দৈর্ঘ্যের সাথে লম্বভাবে গমনকারী অক্ষের সাপেক্ষে দণ্ডের জড়তার ভ্রামক এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধের রাশিমালা নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০২; রা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; য. বো. ২০০৫, ২০০১]

১৯। রাস্তার ব্যাংকিং বলতে কি বুঝ ? রাস্তার মোড়ে আনতি কোণের রাশিমালা নির্ণয় কর।

২০। কেন্দ্রমুখী বল বলতে কি বুঝ ? m ভরের একটি বস্তু r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পথে v সমদ্রুতিতে ঘুরছে। দেখাও যে, কেন্দ্রমুখী বল, $F = \frac{mv^2}{r}$। [কু. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০১; সি. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০০; চ. বো. ২০০০]

অথবা, বৃত্তাকার পথে আবর্তনরত কোন বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল কেন্দ্রমুখী বলের রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [কু. বো. ২০০৬]

২১। কেন্দ্রমুখী বল কি ? এর রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [রা. বো. ২০০৫

$F = m\omega^2 r$
$\omega = 2\pi N$

গাণিতিক সমস্যাবলি :

১। 0·2 kg ভরের একটি পাথরকে 0·6 m লম্বা একটি সুতার সাহায্যে বেঁধে অপর প্রান্তের চারদিকে অনুভূমিক বৃত্তাকার পথে প্রতি মিনিটে 150 বার ঘুরানো হল। সুতার টান নির্ণয় কর। [উঃ 29·6 N]

২। 4g ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 1·5m দীর্ঘ সুতার সাহায্যে বৃত্তাকার পথে ঘুরানো হচ্ছে। বস্তুটি 5 সেকেন্ডে 20 বার পূর্ণ আবর্তন করছে। সুতার টান নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৬] [উত্তর : 3·79 N]

৩। 2 kg ভরের একটি পাথরকে 12 m দীর্ঘ একটি সুতার সাহায্যে বেঁধে অনুভূমিক তলে ঘুরানো হচ্ছে। সুতাটি সর্বোচ্চ 19·6 N টান সহ্য করতে পারে। সুতা না ছিঁড়ে পাথরটিকে সর্বোচ্চ কত সমদ্রুতিতে ঘুরানো যেতে পারে ? [উঃ 10·84 ms^{-1}]

৪। একজন মোটর সাইকেল আরোহী 100 m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে কত বেগে মোড় নিলে উল্লম্ব তলের সাথে 30° কোণে আনত থাকবে ? [$g = 9·8\ ms^{-2}$] [উঃ 23·79 ms^{-1}]

৫। একটি গাড়ি 50 km/hr বেগে 60 m ব্যাসার্ধের একটি রাস্তায় মোড় নিতে হলে অনুভূমিকের সাথে রাস্তাটির আনতি কোণ বা ব্যাংকিং কোণ কত হওয়া প্রয়োজন ? 18·16°

৬। 5 m চওড়া কোন একটি রাস্তার মোড়ের বৃত্তাকার অংশের ব্যাসার্ধ 36·7m। রাস্তার কেন্দ্র যে পার্শ্বে ঐ পার্শ্ব অপেক্ষা অপর পার্শ্ব কত উঁচু হলে ঐ রাস্তায় সর্বোচ্চ 6 ms^{-1} সমদ্রুতিতে গাড়ি চালানো যাবে ? [উঃ 0·5 m]

৭। কোন অক্ষ সাপেক্ষে একটি বস্তুর জড়তার ভ্রামক 100 kg–m^2। উক্ত অক্ষ সাপেক্ষে বস্তুটির চক্রগতির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। (বস্তুটির ওজন 29·4 N) [উঃ 5·77 m]

৮। একটি চাকার ভর 10kg এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ 0·5m। এর জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০০] [উত্তর : 2·5 kgm^2]

৯। একটি চাকার ভর 4kg এবং চক্রগতির ব্যাসার্ধ 25 cm। এর জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর। চাকাটিতে 2 $rads^{-2}$ কৌণিক ত্বরণ সৃষ্টি করতে কত মানের টর্ক প্রয়োগ করতে হবে ? [য. বো. ২০০০] [উত্তর : 0·25kgm^2 ; 0·5N-m]

১০। একটি ঘূর্ণায়মান লোহার গোলকের ভর 0·5 kg। ঘূর্ণন অক্ষ হতে এর দূরত্ব 1 m। অক্ষ সাপেক্ষে জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর। [উঃ 0·5 kg-m^2]

১১। একটি সিলিন্ডারের ভর 40 kg এবং ব্যাসার্ধ 0·115 m। সিলিন্ডারটির অক্ষের সাপেক্ষে এর জড়তার ভ্রামক 1·0 kg-m^2। সিলিন্ডারটি যখন 1·5 ms^{-1} বেগে অনুভূমিকভাবে গড়াতে থাকে তখন তার মোট গতিশক্তি কত ? [উঃ 95 J]

১২। ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ এবং বল $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$ হলে টর্ক $\vec{\tau}$ নির্ণয় কর।

[উঃ $(yF_z - zF_y)\hat{i} + (zF_x - xF_z)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$]

১৩। কেন্দ্রগামী লম্ব বরাবর অক্ষের সাপেক্ষে একটি চাকতি ঘুরছে। এই অক্ষের সাপেক্ষে চাকতির জড়তার ভ্রামক 1·5 kg-m^2। টর্ক প্রয়োগের ফলে চাকতিটি স্থির অবস্থান থেকে সমকৌণিক ত্বরণে ঘুরে 6 সেকেন্ড পরে 6π$rads^{-1}$ কৌণিক বেগ প্রাপ্ত হল। টর্কের মান নির্ণয় কর। [উঃ 4·71 N.m]

১৪। 40 kg ভরবিশিষ্ট একটি বালক নাগরদোলার প্রান্তভাগে চড়ে 25 m ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে 5 rpm কৌণিক বেগে পাক খাচ্ছে। বালকটির কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর। [উঃ 3273 kgm^2s^{-1}]

১৫। একটি ফ্লাই হুইলের জড়তার ভ্রামক 0·05 kgm^2। এর কৌণিক বেগ 8 সেকেন্ডে 60 rmp হতে 300 rpm পর্যন্ত বৃদ্ধি পেলে হুইলের উপর ক্রিয়ারত টর্কের মান নির্ণয় কর। [উঃ 0·157 N.m]

১৬। হাইড্রোজেন নিউক্লিয়াসকে কেন্দ্র করে ইলেকট্রন $5·3 \times 10^{-11}$ m ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে চলে $1·51 \times 10^{-16}$ s-এ একবার ঘুরে আসে। কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর। [উঃ $1·07 \times 10^{-34}$ kg m^2s^{-1}]

১৭। কৌণিক ভরবেগ কত হলে 480 kgm^2 জড়তার ভ্রামকে কৌণিক বেগ 5 rad s^{-1} হবে? [উঃ2400 kg m^2s^{-1}]

১৮। কি পরিমাণ টর্কের ক্রিয়ায় 250 kg m^2 জড়তার ভ্রামকের কৌণিক ত্বরণ 4 $rads^{-2}$ হবে ? [উঃ1000 Nm]

১৯। একটি চাকতির ব্যাস 2 m ও ভর 20 kg। 1800 rpm কৌণিক দ্রুতিতে চাকতির কৌণিক ভরবেগ কত হবে?

[উঃ 600 π kg m^2s^{-1}]

২০। একটি ফ্লাই হুইলের কৌণিক বেগ 2π rad s^{-1} হতে 6π rad s^{-1} -এ উন্নীত করতে 100 J কাজ সম্পন্ন করতে হয়। হুইলটির জড়তার ভ্রামক নির্ণয় কর। [উঃ 0·63 kg m^2]

২১। 2·4 kg ভর ও 0·2 m চক্রগতির ব্যাসার্ধসম্পন্ন একটি চাকতিতে কি পরিমাণ টর্ক ক্রিয়া করলে তার কৌণিক ত্বরণ 3 rad s^{-2} হবে ? [উঃ 0·288 Nm]

২২। একটি মোটর 80 N m মানের টর্ক উৎপন্ন করে প্রতি সেকেন্ডে 10 বার ঘুরছে। এর ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উঃ 5026·55 W]

২৩। 5 kg ভর ও 0·5 m চক্রগতির ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি চাকা প্রতিমিনিটে 300 বার ঘুরছে। চাকাটির গতিশক্তি নির্ণয় কর। [উঃ 616·87 J]

২৪। 10 kg ভরের একটি বস্তু 4 m দৈর্ঘ্যের একটি নগণ্য ভরের সুতার এক প্রান্তে বেধে অপর প্রান্তের চারদিকে ঘুরানো হলে বস্তুটির জড়তার ভ্রামক কত হবে ? [উঃ 160 kg m^2]

৬
কাজ, শক্তি ও ক্ষমতা
WORK, ENERGY AND POWER

৬·১ সূচনা
Introduction

কাজ, শক্তি ও ক্ষমতা এ তিনটি শব্দ আমাদের অতি পরিচিত। আমরা দৈনন্দিন জীবনে কাজ শব্দটিকে শারীরিক কিংবা মানসিক যে কোন কাজের জন্য ব্যবহার করে থাকি। তাই সাধারণ অর্থে **কোন কিছু করার নামই কাজ**। যেমন রিক্‌শাওয়ালা যখন রিক্সা টানে তখন সে কাজ করে। কুলি যখন মাল বহন করে তখন সে কাজ করে, ঘোড়া যখন গাড়ি টানে তখন এটি কাজ করে ইত্যাদি। এ থেকে স্পষ্ট যে কাজ শব্দটি দৈনন্দিন জীবনে কোন নির্দিষ্ট অর্থে ব্যবহৃত না হয়ে ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়। পদার্থবিজ্ঞানে কাজ বলতে নির্দিষ্ট একটি অর্থ বুঝায়। আবার ক্ষমতা ও শক্তি উভয়ই সাধারণভাবে একই অর্থে ব্যবহার করি। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে এরা এক নয়। এ অধ্যায়ে কাজ, ক্ষমতা ও শক্তির প্রকৃত ব্যাখ্যা এবং এদের সম্পর্কিত বিভিন্ন সম্পর্ক আলোচনা করা হবে।

৬·২ কাজ
Work

পদার্থবিজ্ঞানের ভাষায় কোন বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে বলের অভিমুখে যদি বস্তুটির সরণ ঘটে তবে ক্রিয়াশীল বল কাজ করেছে বুঝায়। কাজের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : **কোন বস্তুর উপর বল প্রয়োগে বস্তুর সরণ ঘটলে প্রযুক্ত বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফলকে কাজ বলে।**

উপরের সংজ্ঞা থেকে স্পষ্ট যে কোন বস্তুর উপরে শুধু বল প্রয়োগ করলেই কাজ হয় না। যেমন একটি কাঠের গুড়ির উপর বল প্রয়োগ করা হল ; কিন্তু গুড়িটির কোন স্থানান্তর হল না। সুতরাং প্রযুক্ত বল কোন কাজ করল না। অতএব, সিদ্ধান্ত এই যে, **বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে যদি বলের ক্রিয়া রেখায় ঐ বস্তুর স্থানান্তর না ঘটে, তবে কাজ সম্পাদিত হয় না।**

বলের দ্বারা কাজ বা ধনাত্মক কাজ :

কাজের জন্য বলের প্রয়োজন। বল দুভাগে কাজ করতে পারে। যথা–(১) **বলের দ্বারা বা বলের দিকে কাজ** এবং (২) **বলের বিরুদ্ধে বা বলের বিপরীত দিকে কাজ।**

১। বলের দ্বারা কাজ : যদি বল প্রয়োগে বলের প্রয়োগ বিন্দু বলের ক্রিয়ার অভিমুখে সরে যায় বা বলের দিকে সরণের ধনাত্মক উপাংশ থাকে তবে বলের দ্বারা কাজ হয়েছে বুঝায়। বলের দ্বারাকৃত কাজকে ধনাত্মক কাজ বলে।

উদাহরণ :

(ক) একটি বস্তুকে ছাদের উপর হতে নিচে ফেলা হল। এক্ষেত্রে বলের দ্বারা কাজ হল বুঝায়।

(খ) একটি ফুটবল চলন্ত অবস্থায় আছে। বল প্রয়োগ করার ফলে ফুটবলটি বলের দিকে সরে গেল। এ ক্ষেত্রেও বলের দ্বারা কাজ হয়েছে বুঝায়।

২। বলের বিরুদ্ধে কাজ বা ঋণাত্মক কাজ :

সংজ্ঞা : বল প্রয়োগের ফলে যদি বলের প্রয়োগ বিন্দু বলের ক্রিয়ার বিপরীত দিকে সরে যায় বা বলের দিকে সরণের ঋণাত্মক উপাংশ থাকে তবে যে কাজ সম্পাদিত হবে তাকে বলের বিরুদ্ধে কাজ বা ঋণাত্মক কাজ বলে।

উদাহরণ :

(ক) একটি বস্তুকে মাটি হতে টেবিলের উপর উঠানো হল। এক্ষেত্রে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে সরানো হল। অতএব বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়েছে বুঝাবে।

(খ) সমবেগে গতিশীল একটি গাড়ি ব্রেক করলে কিছুদূর গিয়ে থেমে যাবে। এক্ষেত্রে ব্রেকজনিত বল গাড়ির গতির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করায় বলের বিরুদ্ধে কাজ হয়েছে বুঝাবে।

৬.৩ কাজের পরিমাপ (ধ্রুব বলের ক্ষেত্রে)

Measurement of work (In case of constant force)

সময়ের প্রেক্ষিতে বলের মান ও দিক পরিবর্তন না হলে তাকে ধ্রুব বল বলে।

মনে করি A বিন্দুতে অবস্থিত কোন একটি বস্তুর উপর AB বরাবর F বল প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি A বিন্দু হতে B বিন্দুতে যেতে s দূরত্ব অতিক্রম করল [চিত্র ৬.১ (ক)]। তা হলে,

কৃত কাজ = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

বা, $W = F \times s$ (1)

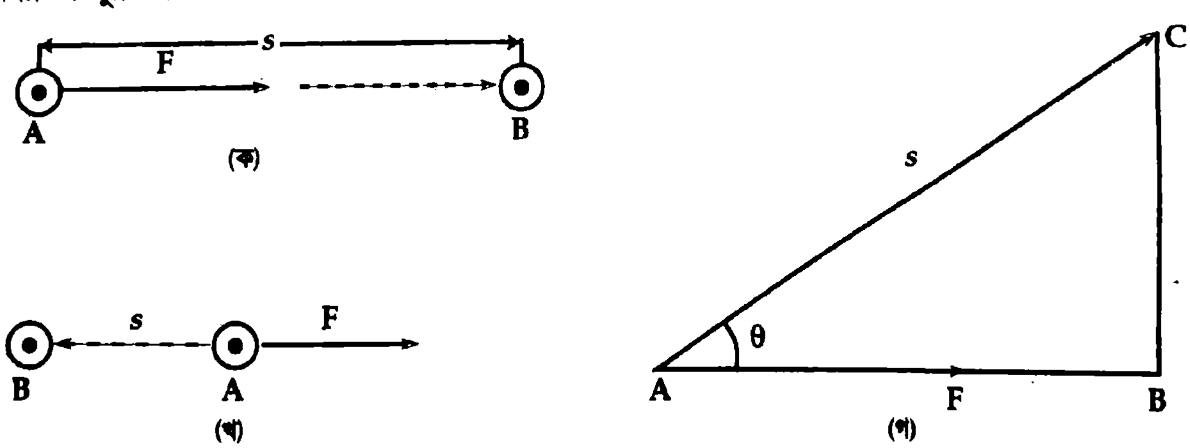
যদি বল প্রয়োগের ফলে বস্তুর তথা বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ, বলের বিপরীত দিকে $AB = s$ হয় [চিত্র ৬.১(খ)] তবে,

কৃত কাজ = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

$W = F \times (-s) = -F \times s$ (2)

ঋণ চিহ্ন বল ও সরণ বিপরীতমুখী বুঝাতে ব্যবহৃত হয়েছে।

এবার মনে করি একটি বস্তুর উপর F পরিমাণ বল AB অভিমুখে প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুটি বলের অভিমুখের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে s পরিমাণ দূরত্ব সরে C বিন্দুতে পৌঁছল [চিত্র ৬.১(গ)]। তা হলে বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর বস্তুর সরণ $= AB = s \cos\theta$।



চিত্র ৬.১

এখানে $BC \perp AB$

$\therefore$ কৃত কাজ, W = বলের মান × বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান

বা $\boxed{W = Fs\cos\theta}$ (3)

= বলের মান × বলের দিকে সরণের উপাংশের মান।

= সরণের মান × সরণের দিকে বলের উপাংশের মান।

ভেক্টর বীজগণিতের সাহায্যে কাজকে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় :

কাজকে বল ও সরণ এই দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফল দ্বারা পরিমাপ করা হয়। মনে করি বল $\vec{F}$ একটি ভেক্টর বা দিক রাশি এবং সরণ s একটি ভেক্টর বা দিক রাশি

অতএব কাজ = বল . সরণ

বা $W = \vec{F} . \vec{s}$

$= \vec{s} . \vec{F} = Fs\cos\theta$, [$s\cos\theta$ **হল বল** F-এর দিকে সরণের উপাংশ বা অংশক] (4)

এখানে $\theta = \vec{F}$ এবং $\vec{s}$ -এর মধ্যবর্তী কোণ।

(ক) $\theta = 0°$ হলে, অর্থাৎ বলের দিকে যখন বস্তুর সরণ হয়, তখন

$W = \vec{F} . \vec{s} = Fs\cos\theta = Fs\cos 0°$

$= Fs \quad [\because \cos 0° = 1]$

এখানে কাজ ধনাত্মক (positive)। এক কথায় θ সূক্ষ্মকোণ হলে কাজ ধনাত্মক। **কাজ ধনাত্মক হলে বলের দ্বারা কাজ বুঝায়।**

(খ) $\theta = 90°$ হলে

$W = F.s\cos\theta = F.s\cos 90° = 0 \quad [\because \cos 90° = 0]$

অর্থাৎ $\theta = 90°$ **হলে বল দ্বারা কাজের পরিমাণ শূন্য হবে।**

(গ) $\theta = 180°$ হলে কাজ ঋণাত্মক (negative) হবে অর্থাৎ

$W = \vec{F} . \vec{s} = Fs\cos 180° = -Fs \qquad [\because \cos 180° = -1]$

কাজ ঋণাত্মক হলে বলের বিরুদ্ধে কাজ বুঝায়।

উপরের সমীকরণগুলো হতে সিদ্ধান্ত করা যায় যে, **বল প্রয়োগের ফলে যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ ঘটে তবেই কাজ সাধিত হবে।** এটিই কাজের শর্ত।

কাজ দুটি দিক রাশি $\vec{F}$ ও $\vec{s}$ এর ডট বা স্কেলার গুণফল। এটি একটি স্কেলার রাশি। কাজের শুধুমাত্র মান রয়েছে।

কতকগুলো বল যদি একসাথে বস্তুর উপর কাজ করে, তবে প্রতিটি বল দ্বারা কাজের পরিমাণ পৃথক পৃথকভাবে নির্ণয় করে সবগুলোকে একত্রে যোগ করে মোট কাজের পরিমাণ পাওয়া যায়। অর্থাৎ মোট কাজের পরিমাণ

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n \qquad (5)$$

এখানে w_1, w_2, w_3, w_n ইত্যাদি হল যথাক্রমে $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_n}$ ই ত্যাদি বল দ্বারা কৃত কাজ।

শূন্য কাজ :

কাজ পরিমাপের সংজ্ঞা এবং সমীকরণ অনুসারে বল প্রয়োগের ফলে যদি বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ না ঘটে, তবে কাজ $W = 0$।

সুতরাং শূন্য কাজের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : বল প্রয়োগের ফলে যদি বস্তুর সরণ না হয় ($\vec{s} = 0$), অর্থাৎ বলের প্রয়োগ বিন্দু স্থির থাকে অথবা প্রয়োগ বিন্দু বলের উল্লম্ব অভিমুখে ($\theta = 90°$) সরে যায়। তবে বলের দ্বারা শূন্য কাজ হয়েছে বুঝাবে।

উদাহরণ :

(ক) একজন লোক একটি ভারী বাক্স মাথায় নিয়ে দাঁড়িয়ে থাকলে লোকটি কোন কাজ করছে না, কারণ বাক্সটির কোন সরণ নেই।

(খ) স্রোতের বিরুদ্ধে সাঁতার কেটে স্থির থাকলে কোন কাজ করা হয় না।

(গ) একটি বস্তু দড়িতে বেঁধে বৃত্তাকার পথে ঘুরালে কোন কাজ হবে না। কেননা প্রতি মুহূর্তে বস্তুটির বেগ বা সরণ বস্তুর অবস্থান বিন্দু হতে বৃত্তের স্পর্শক বরাবর এবং বলের দিক কেন্দ্রমুখী। অর্থাৎ কেন্দ্রমুখী বল ও সরণের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°। সুতরাং, কেন্দ্রমুখী বল দ্বারা কৃত কাজ শূন্য।

কাজ শূন্য হওয়ার শর্ত ঃ

আমরা জানি, কাজ

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs \cos\theta$$

উপরের সমীকরণের ডানপাশে F, s ও $\cos\theta$ তিনটি রাশি রয়েছে। এদের যে কোন একটি শূন্য হলে ডানপক্ষ অর্থাৎ কাজ শূন্য হবে।

(ক) যদি বস্তুতে বল প্রয়োগ না করা হয় তবে কাজ $W = 0$ হবে।

(খ) বল প্রয়োগ করার ফলে যদি বস্তুর সরণ না ঘটে, তবে $W = 0$ হবে।

(গ) যদি $\cos\theta = 0$ হয়, অর্থাৎ $\theta = 90°$ হয়, তবে $W = 0$ হবে। এ অবস্থা ঘটবে যখন বল F ও সরণ s-এর মধ্যবর্তী কোণ 90° হবে।

৬·৪ বলের দ্বারা কাজ ও বলের বিরুদ্ধে কাজের পার্থক্য
Distinction between work done by and against a force

অথবা, ধনাত্মক কাজ ও ঋণাত্মক কাজের পার্থক্য
Distinction between positive and negative work

বলের দ্বারা কাজ	বলের বিরুদ্ধে কাজ
১। যদি বল প্রয়োগের ফলে বলের দিকে বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ ঘটে বা বলের দিকে সরণের ধনাত্মক উপাংশ থাকে তবে ঐ সরণের জন্য কৃতকাজকে বলের দ্বারা কাজ বলে।	১। যদি বল প্রয়োগের ফলে বলের বিপরীত দিকে বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ ঘটে বা বলের দিকে সরণের ঋণাত্মক উপাংশ থাকে তবে ঐ সরণের জন্য কৃতকাজকে বলের বিরুদ্ধে কাজ বলে।
২। বলের দ্বারা কাজ ধনাত্মক রাশি।	২। বলের বিরুদ্ধে কাজ ঋণাত্মক রাশি।
৩। বলের দ্বারা কাজ হলে বস্তুতে ত্বরণের সৃষ্টি হয়।	৩। বলের বিরুদ্ধে কাজ হলে বস্তুর উপর মন্দন সৃষ্টি হয়।
৪। বলের দ্বারা কাজ হলে স্থিতিশক্তি হ্রাস পায়।	৪। বলের বিরুদ্ধে কাজ হলে স্থিতিশক্তি বৃদ্ধি পায়।
৫। বলের দ্বারা কাজ হলে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়।	৫। বলের বিরুদ্ধে কাজ হলে গতিশক্তি হ্রাস পায়।
৬। বলের দ্বারা কাজের ক্ষেত্রে $90° < \theta \geq 0°$	৬। বলের বিরুদ্ধে কাজের ক্ষেত্রে $180° \geq \theta < 90°$।

৬·৫ কাজের একক ও মাত্রা সমীকরণ
Unit and dimension of work

কাজের একক আলোচনা করার আগে **একক কাজ** কি তা জানা দরকার। **কোন বস্তুর উপর একক বল প্রয়োগে বলের ক্রিয়ারেখা বরাবর যদি বস্তুর একক সরণ হয়, তবে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন হয়, তাকে একক কাজ বলে।**

এস. আই. বা আন্তর্জাতিক পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে কাজের পরম একক হল জুল (Joule)। **এক নিউটন বল প্রয়োগের ফলে বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর বস্তুর সরণ যদি এক মিটার হয়, তবে যে কাজ সম্পন্ন হয় তাকে এক জুল বলে।**

$\therefore$ 1 জুল = 1 নিউটন $\times$ 1 মিটার।

তাৎপর্য : ধরা যাক 50 J পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করা হয়েছে।

এখন, $50\,J = 50\,N \times 1\,m = 1\,N \times 50\,m = 5\,N \times 10\,m$ ইত্যাদি।

সুতরাং, 50 J কাজ সম্পাদন বলতে বুঝায় 50 N বল প্রয়োগ করে বলের দিকে 1 m সরণ ঘটান বা 1 N বল প্রয়োগ করে 50 m সরণ ঘটান ; কিংবা 5N বল প্রয়োগ করে 10 m সরণ ঘটান ইত্যাদি।

পারমাণবিক পদার্থবিজ্ঞানে কাজ পরিমাপের জন্য **ইলেকট্রন ভোল্ট** (eV) নামে পরিচিত একটি সুবিধাজনক একক ব্যবহার করা হয়। **এক ভোল্ট বিভব পার্থক্যে একটি ইলেকট্রনের অর্জিত শক্তিই এক ইলেকট্রন ভোল্ট।**

$1\,eV = 1{\cdot}6 \times 10^{-19}$ জুল।

বিদ্যুৎবিজ্ঞানে কাজের আর একটি ব্যবহারিক একক আছে। এর নাম **কিলোওয়াট-ঘণ্টা (K. W. H.)। এক কিলোওয়াট ক্ষমতাসম্পন্ন কোন উৎস এক ঘণ্টায় যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাকে এক কিলোওয়াট-ঘণ্টা বলে।**

কাজের মাত্রা সমীকরণ :

কাজের মাত্রা সমীকরণ, [W] = [বল] $\times$ [সরণ] = $[MLT^{-2}]\,[L] = [ML^2T^{-2}]$

৬.৬ অভিকর্ষীয় কাজ
Gravitational Work

অভিকর্ষ বলের দরুন কৃত কাজ :

(১) মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে অভিকর্ষ বলের প্রভাবে 'h' উচ্চতা হতে ফেলা হল।

কৃত কাজ = বল $\times$ সরণ

বা, $W = F \times h = mgh$ $\quad [\because F = mg]$ (6)

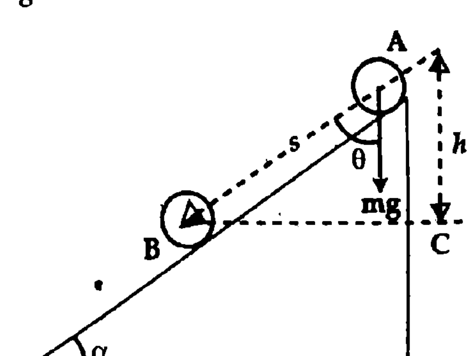
বা, W = ভর $\times$ অভিকর্ষীয় ত্বরণ $\times$ উচ্চতা

অভিকর্ষ বলের দিক নিচের দিকে এবং এক্ষেত্রে সরণও নিচের দিকে। অর্থাৎ, বল ও সরণ একই দিকে হওয়ায় কাজ ধনাত্মক।

(২) 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে 'h' উচ্চতা উপরে উঠালে

কৃত কাজ = ভর $\times$ অভিকর্ষীয় ত্বরণ $\times$ উচ্চতা বা, $W = mgh$ (7)

এক্ষেত্রে বল ও সরণ বিপরীত দিকে হওয়ায় এই কাজ ঋণাত্মক।



চিত্র ৬.২

(৩) মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু কোন একটি মসৃণ নততল বেয়ে A হতে B-তে সরে এল। যদি g অভিকর্ষীয় ত্বরণ হয়, তবে অভিকর্ষ বল mg বস্তুটিকে খাড়াভাবে নিচের দিকে টানবে।

ধরি সরণের অভিমুখ এবং অভিকর্ষ বলের অভিমুখের মধ্যে θ কোণ আছে এবং $AB = s$

অভিকর্ষ বল mg-এর দিকে সরণের অংশ = $s \cos\theta$

যদি তল না থাকত তবে বস্তুটি যে সময়ে A হতে B-তে যায়, সে সময়ে তা $AC = h$ দূরত্ব নিচে নামত।

$h = s\cos\theta$

কৃত কাজ, $W = mgs\cos\theta$ বা, $W = mgh$ (8)

তলটি অনুভূমিকের সাথে α কোণে অবস্থান করলে, $\theta = (90° - \alpha)$

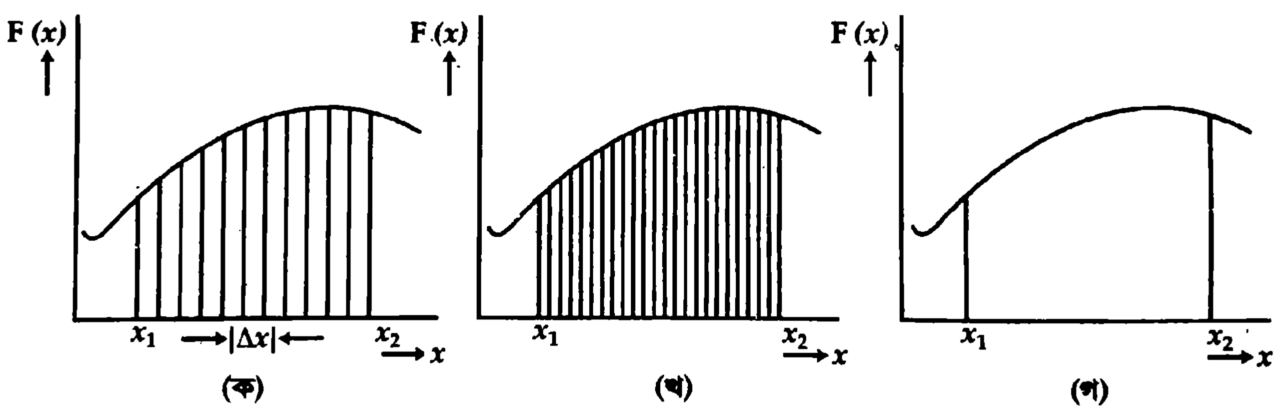
$W = mgs\cos(90° - \alpha) = mgs\sin\alpha$ [8(a)]

৬·৭ পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কৃত কাজের সমীকরণ
Equation of work done by variable force

৬·৫ অনুচ্ছেদে অভিকর্ষীয় কাজ আলোচনা করার সময় বল অপরিবর্তনশীল ধরা হয়েছে। স্বল্প উচ্চতায় বলের পরিবর্তন খুবই নগণ্য। কিন্তু পৃথিবী পৃষ্ঠের বেশ উপরের দিকে কিংবা নিচের দিকে অভিকর্ষীয় বলের মান কমতে থাকে। সেক্ষেত্রে বল ধ্রুব ধরা যায় না। বল একটি ভেক্টর রাশি; সুতরাং এর দিক ও মান উভয়ই আছে। প্রথমে বলের মান পরিবর্তনশীল বিবেচনা করে আমরা নিম্নে কৃত কাজের সমীকরণ বের করব।

(ক) বলের মান যখন পরিবর্তনশীল : ধরি কোন একটি পরিবর্তনশীল বল $\vec{F}$ বস্তুর উপর X-অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করায় বস্তুটি X-অক্ষ বরাবর x_1 অবস্থান থেকে x_2 অবস্থানে সরে গেল এবং বলটি মানের সাপেক্ষে পরিবর্তী। এই পরিবর্তী বল দ্বারা বস্তুটির সরণ $(x_2 - x_1)$ ঘটাতে সম্পাদিত কাজ নিম্নোক্ত উপায়ে বের করতে পারি।

এখন মোট সরণ $(x_2 - x_1)$ কে বহুসংখ্যক অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমমানের সরণ Δx-এ বিভক্ত করা হল [চিত্র ৬·৩ (ক)]।



চিত্র ৬·৩

ফলে প্রতিটি ক্ষুদ্র সরণের শুরুতে বস্তুর উপর যে বল ক্রিয়া করে ঐ বলের ক্রিয়াতেই ঐ সরণ সংঘটিত হয়েছে বিবেচনা করা যায়। প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশে ক্রিয়ারত বল ভিন্ন ভিন্ন মানের। সুতরাং x_1 অবস্থান থেকে $x_1 + \Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণের ক্ষেত্রে F_1 বল ক্রিয়াশীল হলে কৃত কাজ,

$\Delta W_1 = F_1 \Delta x$

অনুরূপভাবে $x_1 + \Delta x$ থেকে $x_1 + 2\Delta x$ পর্যন্ত সরণ Δx-এর ক্ষেত্রে F_2 বল ক্রিয়াশীল হলে কৃত কাজ,

$\Delta W_2 = F_2 \Delta x$

মোট সরণ $(x_2 - x_1)$ কে যদি এরূপ N সমসংখ্যক ক্ষুদ্র সরণ Δx-এ বিভক্ত করা হয় তবে মোট কাজ হবে এই ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের সরণের জন্য কাজের সমষ্টির সমান।

$$\text{কৃত কাজ, } W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \dots\dots\dots + \Delta W_N$$

$$= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + \dots\dots\dots + F_N\Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x$$

লক্ষণীয় যে প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশ Δx-এ বলের মান ধ্রুব ধরা হয়েছে। কিন্তু এটা সম্পূর্ণ সঠিক নয়। ঐ প্রতিটি ক্ষুদ্র অংশকে যদি আরও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করি [চিত্র ৬·৩ (খ)] এবং নব ক্ষুদ্র অংশের জন্য বল ধ্রুব ধরি, তবে কৃত কাজের মান আরও সঠিক হবে। এভাবে ক্ষুদ্র অংশ আরও ক্ষুদ্র অর্থাৎ Δx যদি প্রায় শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং বিভক্ত অংশের সংখ্যা N-কে অসীম করা হয়। তবে সঠিক মান পাওয়া যাবে। অতএব, কাজের সঠিক মান লেখা যায়।

$$W = \underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x$$

ক্যালকুলাসের ভাষায়,

$$\underset{\Delta x \to 0}{\mathrm{Lt}} \sum_{k=1}^{N} F_k \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

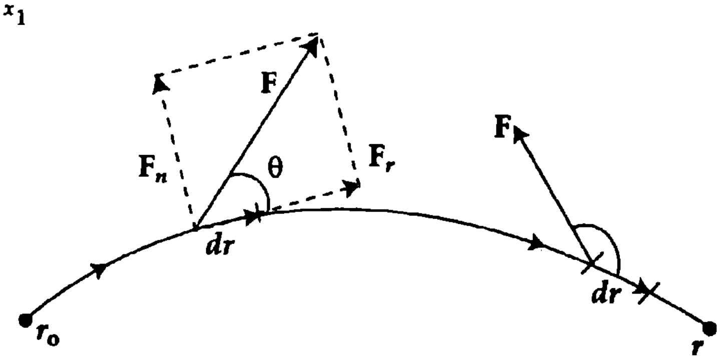
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx \qquad (9)$$

$= x_1$ ও x_2 সীমার মধ্যে আবদ্ধ লেখচিত্রের ক্ষেত্রফল [চিত্র ৬·৩ (গ)]

বল ও সরণের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে [চিত্র ৬·৪]

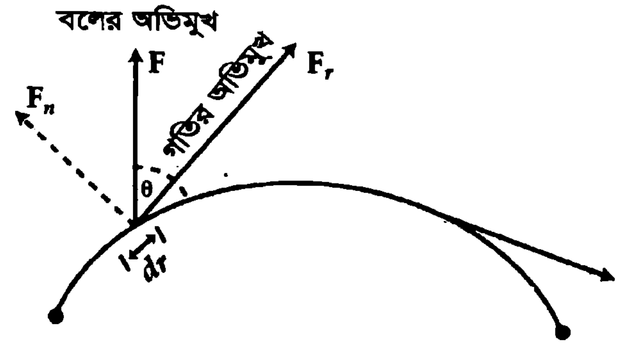
$$W = \int \vec{F} \cdot \vec{dx} = \int_{x_1}^{x_2} F\cos\theta\, dx, \qquad (10)$$

$F\cos\theta$ হচ্ছে X-অক্ষ বরাবর বল $\vec{F}$-এর উপাংশ।



চিত্র ৬·৪

(খ) বলের মান ও দিক উভয়ই যখন পরিবর্তনশীল : বল মানে ও অভিমুখে পরিবর্তনশীল হলে ঐ বলের ক্রিয়ায় বস্তু একটি রেখায় গতিশীল হতে পারে। বস্তুটির গতি দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক। এ ক্ষেত্রে রেখাটির কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক দ্বারা ঐ বিন্দুতে বস্তুর গতি অভিমুখ নির্দিষ্ট হবে। এক্ষেত্রে সরণ = $\vec{r}$।



চিত্র ৬·৫

কাজেই এই প্রকার বলের কৃত কাজ নির্ণয়ে সমগ্র গতিপথকে অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরণ $d\vec{r}$-এর সমষ্টি হিসেবে গণ্য করা যায়।

প্রত্যেক ক্ষুদ্র সরণের শুরুতে বস্তুর উপর যে বল F ক্রিয়ারত থাকে ঐ বল উক্ত সরণের জন্য অপরিবর্তী বিবেচনা করা যায়। ধরি কোন একটি ক্ষুদ্র সরণ $d\vec{r}$ এবং ঐ সরণের জন্য ক্রিয়ারত বল $\vec{F}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ। বলটিকে $d\vec{r}$ বরাবর একটি অংশে এবং তার লম্ব দিকে অপর একটি অংশে বিভক্ত করি। ধরি অংশক দুটি যথাক্রমে

$F_r = F\cos\theta$ এবং $F_n = F\sin\theta$

এই ক্ষুদ্র সরণের জন্য বলের F_n অংশক কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য, কেননা এই ক্ষুদ্র সরণ ও F_n-এর মধ্যবর্তী কোণ 90°। তা হলে ঐ ক্ষুদ্র সরণের জন্য কৃত কাজ

$$dW = F\,dr\cos\theta = \vec{F}.d\vec{r}$$

কাজেই গতিপথের r_0 অবস্থান হতে r অবস্থানে স্থানান্তরের ক্ষেত্রে কৃত কাজ,

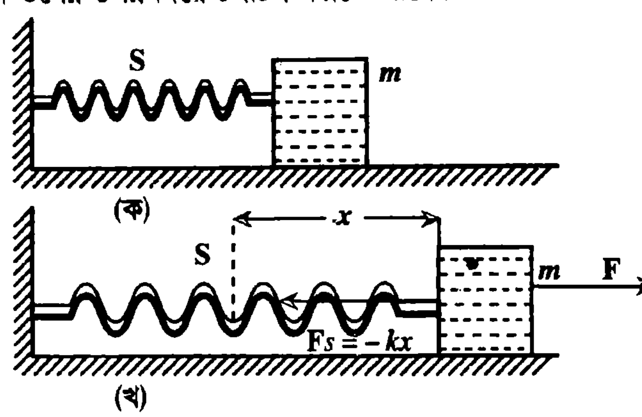
$$W = \int_{r_0}^{r} (F\cos\theta)\,dr = \int_{r_0}^{r} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (11)$$

৬৮ পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কৃত কাজের উদাহরণ
Examples of work done by variable force

(ক) স্প্রিং প্রসারণে সম্পাদিত কাজ (বল $\propto x$)

মনে করি একটি অনুভূমিক আদর্শ স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দেয়ালের সাথে আটকিয়ে অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু যুক্ত রয়েছে। বস্তুটি অনুভূমিক এবং ঘর্ষণবিহীন তলের উপর দিয়ে চলাচল করতে পারে।

বস্তুটিকে টেনে স্প্রিং S-কে দৈর্ঘ্য বরাবর বিকৃত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের দরুন প্রযুক্ত বলের বিপরীত স্প্রিং-এ প্রত্যায়নকারী বলের উদ্ভব হবে। স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করলে, প্রত্যায়নী বলের মান হুকের সূত্রানুযায়ী দৈর্ঘ্য পরিবর্তনের সমানুপাতিক হবে।



চিত্র ৬.৬

মনে করি F_s অনুভূমিক বল প্রয়োগে বস্তুটিকে বাম হতে ডান দিকে সরানোর ফলে এর দৈর্ঘ্য অনুভূমিক বরাবর x পরিমাণ বৃদ্ধি পেল। এই ক্রিয়ার দরুন স্প্রিং-এ $-kx$ পরিমাণ প্রত্যায়নী বল উৎপন্ন হবে। কেননা

$$F_s \propto x.$$

$$\text{বা, } F_s = -kx \qquad (12)$$

[এই প্রত্যায়নী বলের দিক বস্তুটির সরণের বিপরীত দিকে হওয়ায় ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।]

এখানে k একটি ধ্রুব সংখ্যা। একে স্প্রিং ধ্রুবক (spring constant) বলা হয়।

স্প্রিংটিকে প্রসারিত করতে হলে সমমানের বাহ্যিক বল প্রয়োগ করতে হবে। মনে করি প্রযুক্ত বল F।

$$F = -F_s = -(-kx) = kx \qquad (13)$$

স্প্রিংটিকে x_1 অবস্থান হতে x_2 অবস্থানে প্রসারিত করতে প্রযুক্ত বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x)\,d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx \qquad [\because \vec{F} \text{ ও } d\vec{x} \text{-এর মধ্যবর্তী কোণ শূন্য}]$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}k\left[x_2^2 - x_1^2\right]$$

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad (14)$$

এই কাজ ধনাত্মক। সাধিত কাজ স্প্রিং-এর মধ্যে স্থিতিশক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে।

স্প্রিং-এর আদি অবস্থান $x_1 = 0$ এবং শেষ অবস্থান $x_2 = x$ ধরলে,

$$W = \frac{1}{2}x^2 \tag{15}$$

অর্থাৎ, সরণের পরিমাণ x হলে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ হবে $\frac{1}{2}kx^2$।

[পুনঃ, স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত হলেও সঞ্চিত স্থিতি শক্তির পরিমাণ $W = \frac{1}{2}kx^2$ হবে] ।

(খ) মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কৃত কাজ $\left(\text{বল} \propto \frac{1}{r^2}\right)$

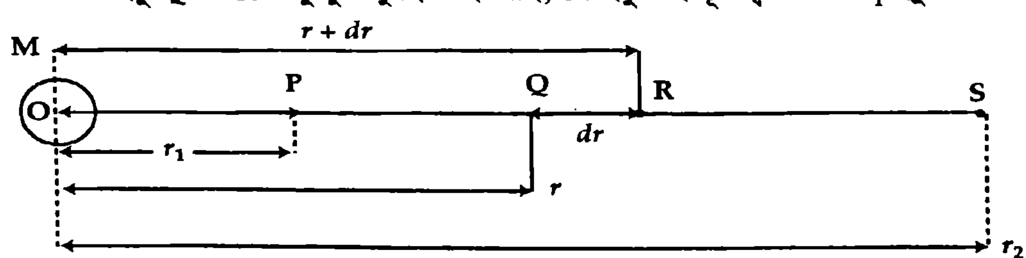
Work done in gravitational field

আমরা জানি কোন একটি বৃহদাকার গুরুভার বস্তুর চারদিকে যে স্থান জুড়ে এর আকর্ষণ বল অনুভূত হয়, সেই স্থানকে উক্ত বস্তুর **মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র** বলে।

মনে করি একটি গুরুভার বস্তুর ভর M এবং এর ভারকেন্দ্র O। O হতে r দূরত্বে Q বিন্দুতে m ভরের একটি বস্তু স্থাপন করি। অতএব $OQ = r$। মহাকর্ষীয় সূত্র হতে বস্তু দুটির মধ্যে মহাকর্ষীয় বল

$$F_1 = G\frac{Mm}{r^2} \tag{16}$$

এই বল QO রেখা বরাবর ক্রিয়া করে। Q হতে dr দূরত্বে R একটি বিন্দু বিবেচনা করি। অতএব $OR = r + dr$ যেহেতু Q ও R বিন্দু দুটি খুবই কাছাকাছি, সেহেতু এই দূরত্বের মধ্যে F_1 ধ্রুব ধরা যায়। ছোট



চিত্র ৬.৭

বস্তুটিকে Q হতে R বিন্দুতে নিতে বাইরের কোন উৎসকে মহাকর্ষীয় বলের বিপরীত দিকে সমপরিমাণের একটি বল প্রয়োগ করতে হবে। ধরি এই বল F_2

$$\therefore F_2 = G\frac{Mm}{r^2} \tag{17}$$

এই বল Q হতে R বিন্দুর দিকে ক্রিয়া করবে।

এখন, ছোট বস্তুটিকে Q হতে R বিন্দুতে নিতে বাইরের উৎস কর্তৃক কৃত কাজ

$dW = \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = F_2\,dr$ [এখানে $\vec{F_2}$ ও $d\vec{r}$-এর মধ্যবর্তী কোণ শূন্য]

$$\text{বা,}\quad dW = \frac{GMm}{r^2}dr \tag{18}$$

ছোট বস্তুটিকে P হতে S বিন্দুতে নিতে কৃত কাজ

$$W = \int dW = \int_{r_1}^{r_2}\frac{GMm}{r^2}dr = GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = GMm\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,dr$$

$$= GMm\left[\frac{r^{-2+1}}{-2+1}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left[\frac{r^{-1}}{-1}\right]_{r_1}^{r_2} = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$= GMm\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \quad \text{[সমাকলন-এর মাত্রা পরিবর্তন করে]}$$

অর্থাৎ $\boxed{W = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$ (19)

উক্ত সমীকরণ হতে দেখা যাচ্ছে যে বাইরের উৎস কর্তৃক মহাকর্ষীয় বলের বিপরীতে কাজ ধনাত্মক।

৬.৯ শক্তি
Energy

কোন ব্যক্তি, বস্তু বা পদার্থের কাজ করার সামর্থ্য বা ক্ষমতাকে এর শক্তি বলে। একটি বস্তু এই শক্তি তার আপেক্ষিক অথবা পারিপার্শ্বিক অবস্থা বা অবস্থানের সাপেক্ষে অথবা গতির দরুন অর্জন করতে পারে। বিশেষ অবস্থায় বস্তু মোট যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করতে পারে, তা দ্বারাই শক্তি পরিমাপ করা হয়। যার কাজ করার সামর্থ্য যত বেশি তার শক্তিও তত বেশি। আর যার কাজ করার সামর্থ্য যত কম তার শক্তিও তত কম। অতএব বলা যায় কাজ শক্তির মাপকাঠি। যদি বলা হয় কোন বস্তু W পরিমাণ কাজ করল, তবে বুঝতে হবে যে, তার ব্যয়িত শক্তির মান W।

মোটর ইঞ্জিনে পেট্রোলের বাষ্প, বাষ্পীয় ইঞ্জিনে জলীয় বাষ্পের চাপ পিস্টনকে চালায়। সুতরাং বাষ্পের শক্তি আছে। বিদ্যুতেরও শক্তি আছে। এই শক্তিতেই ট্রেন, ট্রাম, কল-কারখানা চলে। শক্তি আছে বলেই এই মহাবিশ্ব চলছে। শক্তির অভাবে জগৎ অচল।

যখন কোন বস্তু বলের বিরুদ্ধে কাজ করে, তখন তা শক্তি হারায়। আবার কোন বস্তুর উপর বল ক্রিয়া করলে তা শক্তি লাভ করে।

শক্তির একক ও মাত্রা সমীকরণ (Unit and dimension of energy)

কাজ দ্বারাই শক্তির পরিমাপ করা হয় অর্থাৎ কাজই শক্তির মাপকাঠি। অতএব কাজ এবং শক্তির একক ও মাত্রা সমীকরণ সম্পূর্ণ অভিন্ন।

শক্তিকে বিভিন্ন ভাগে বিভক্ত করা হয়েছে; যথা— ৯ প্রকার

(১) যান্ত্রিক শক্তি (Mechanical energy) (২) তাপ শক্তি (Heat energy) (৩) শব্দ শক্তি (Sound energy) (৪) আলোক শক্তি (Light energy) (৫) চুম্বক শক্তি (Magnetic energy) (৬) বিদ্যুৎ শক্তি (Electric energy) (৭) রাসায়নিক শক্তি (Chemical energy) (৮) পারমাণবিক শক্তি (Atomic energy) (৯) সৌরশক্তি (Solar energy)।

যান্ত্রিক শক্তি ঃ কোন বস্তুর মধ্যে তার পারিপার্শ্বিক অবস্থা বা অবস্থানের সাপেক্ষে অথবা গতির জন্য কাজ করার সামর্থ্য তথা শক্তি থাকে, তবে ঐ শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তি বলে।

এই অধ্যায়ে আমরা যান্ত্রিক শক্তি আলোচনা করব। এটি প্রধানত দুই প্রকার ; যথা—

(১) **গতিশক্তি** (Kinetic energy)। একে সংক্ষেপে K. E. লেখা হয় এবং

(২) **বিভব বা স্থিতিশক্তি** (Potential energy)। একে সংক্ষেপে P. E. লেখা হয়।

৬.১০ গতিশক্তি
Kinetic energy

সংজ্ঞা ঃ গতিশক্তির অর্থ গতিজনিত শক্তি, অর্থাৎ গতিশীল অবস্থা থাকার ফলে কোন একটি বস্তু কাজ করার জন্য যে সামর্থ্য অর্জন করে তাকে ঐ বস্তুর গতিশক্তি বলে।

রাইফেলের একটি গুলি লক্ষ্যবস্তুতে সজোরে আঘাত করার পর তা বস্তুর বাধা অতিক্রম করে খানিকটা ঢুকে যায়। অর্থাৎ গুলি কিছু কাজ করে। গুলি যতক্ষণ বন্দুকের ভিতর থাকে ততক্ষণ তার এই কাজ করার সামর্থ্য থাকে না।

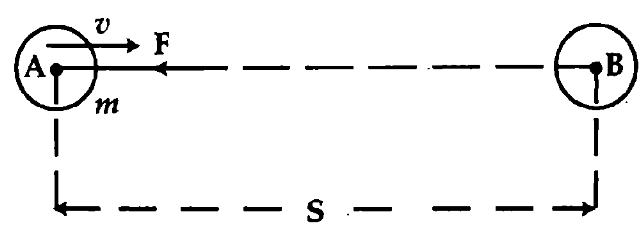
কাজেই বুঝা যায় গুলি এই কাজ করার সামর্থ্য অর্থাৎ শক্তি অর্জন করে গতি হতে। বায়ুর গতির দিকে নৌকা চালালে তার গতি বৃদ্ধি পায় এবং বিপরীত দিকে চালালে তার গতি হ্রাস পায়। নৌকা পানির বাধা অতিক্রম করার শক্তি সংগ্রহ করে গতি হতে।

আরও সংক্ষেপে বলা যায়, **গতির জন্য বস্তুতে যে শক্তির উদ্ভব হয় তাকে তার গতিশক্তি বলে।** দোলায়মান দোলক, ঘূর্ণায়মান ফ্লাই হুইল, নিক্ষিপ্ত তীর, চলন্ত ফুটবল, প্রচণ্ড ঝড়, চলন্ত সাইকেল ইত্যাদি সকলের শক্তিই গতিশক্তি। **কোন গতিশীল বস্তু গতিতে থাকাকালীন অর্থাৎ স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তা দ্বারা তার গতিশক্তি পরিমাপ করা হয়।**

গতিশক্তির পরিমাপ (Measurement of K. E.) :

রৈখিক গতির ক্ষেত্রে : গতিশীল বস্তু স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাই গতিশক্তির পরিমাপ।

মনে করি, 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু AB বরাবর v বেগে চলছে। গতির বিপরীত দিকে BA বরাবর তার উপর F পরিমাণ ধ্রুব বল প্রয়োগ করা হল। এতে সম-মন্দনের সৃষ্টি হবে। মনে করি, সম-মন্দন $= a$ এবং বস্তুটি A হতে s দূরত্ব অতিক্রম করার পর B বিন্দুতে এসে থেমে গেল। এ ক্ষেত্রে শেষ বেগ = 0.



চিত্র ৬'৮

গতিশক্তি = স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত কৃত কাজ

= বল × স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্ত পর্যন্ত অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= F \times s$

নিউটনের ২য় গতি সূত্র হতে আমরা জানি, বল = ভর × ত্বরণ বা মন্দন

$F = ma$

বর্ণনা অনুসারে, $0 = v^2 - 2as$

বা, $2as = v^2$ বা, $s = \frac{v^2}{2a}$

উপরের সমীকরণে F এবং s-এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

গতিশক্তি $= ma \times \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2$

বা, K. E. $= \frac{1}{2}mv^2$

অর্থাৎ **গতিশক্তি** (K. E.) $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times$ ভর $\times$ বেগ^2 (20)

উপরের সমীকরণ হতে আমরা সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে,

(ক) কোন মুহূর্তে বস্তুর গতিশক্তি (K. E.) = ঐ মুহূর্তে বস্তুর বেগের বর্গ ও ভরের গুণফলের অর্ধেক।

(খ) নির্দিষ্ট ভরের কোন বস্তুর গতিশক্তি K. E. $\propto v^2$ অর্থাৎ বেগের বর্গের সমানুপাতিক কেননা m ধ্রুব।

(গ) গতিশক্তি $= \frac{1}{2}\frac{(\text{ভর}\times\text{বেগ})^2}{\text{ভর}} = \frac{p^2}{2m}$

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : ধরা যাক, m ভরের একটি বস্তুর উপর নির্দিষ্ট দিকে F বল প্রয়োগ করে গতিশীল করা হয়। বলের দিক অপরিবর্তী, কিন্তু মান পরিবর্তনশীল। বস্তুটির সরণ X-অক্ষ বরাবর।

বস্তুর সরণ ঘটার ফলে বল দ্বারা মোট কৃত কাজ

$$W = \int F dx = \int madx \qquad [\because F = ma]$$

$$= m\int adx$$

ত্বরণ a-কে লেখা যায়,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = v\frac{dv}{dx}$$

$$W = m\int\frac{vdv}{dx}dx = m\int vdv$$

ধরা যাক, বস্তুতে ক্রিয়াশীল বল বস্তুটির বেগ 0 হতে v-তে উন্নীত করে।

অতএব, $$W = m\int_0^v vdv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v$$

$$= \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mv^2$$

এই কৃত কাজই হচ্ছে বস্তুটির গতিশক্তি।

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{21}$$

গতিশক্তি ও ভরবেগের সম্পর্ক :

m ভরের একটি বস্তু v বেগে গতিশীল হলে এর ভরবেগ, $P = mv$

এবং গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

বা, $$E_k = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m}\cdot v^2 = \frac{1}{2m}(mv)^2$$

$$= \frac{1}{2m}P^2$$

$E_k = \frac{P^2}{2m}$

অতএব $$\boxed{E_k = \frac{P^2}{2m}} \tag{22}$$

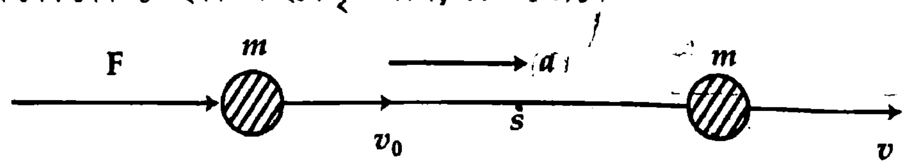
এটিই গতিশক্তি ও ভরবেগের সম্পর্ক।

৬.১১ কাজ-শক্তি উপপাদ্য
Work–energy theorem

কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান।

নিম্নোক্ত দুটি সমীকরণের সাহায্যে কাজ-শক্তি উপপাদ্য প্রমাণ করা হবে। একটি হল **শক্তি লাভ** (Gain of energy) আর অপরটি হল **শক্তি ক্ষয়** (Loss of energy)। সমীকরণ দুটি সাধারণভাবে **কাজ-শক্তি উপপাদ্য** নামে পরিচিত।

(১) **শক্তি লাভ :** মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 'v_0' আদি বেগে চলছে। গতির দিকে নির্দিষ্ট মানের একটি বল F বস্তুর উপর প্রয়োগ করলে বস্তুর বেগ বৃদ্ধি পাবে। ফলে বস্তু শক্তি লাভ করবে। মনে করি s দূরত্ব অতিক্রম করার পর শেষ বেগ 'v' হল। তা হলে কৃত কাজ, $W = F \times s$।



চিত্র ৬.৯

বল কর্তৃক সৃষ্ট ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$ $\quad [\because v^2 = v_0^2 + 2as]$

বা, $$F = ma = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2s}\right)$$

কৃত কাজ, W $= F \times s = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2s}\right) \times s = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$

$$W = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \quad (23)$$

= শেষ গতিশক্তি – আদি গতিশক্তি।

বলের দ্বারা কৃত কাজ = শক্তি লাভ = গতিশক্তির পরিবর্তন

(২) শক্তি ক্ষয় ঃ মনে করি, 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু 'v_0' আদি বেগে চলছে। গতির বিপরীত দিকে নির্দিষ্ট মানের বল প্রয়োগ করলে তার বেগ কমবে এবং বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে গিয়ে বস্তু শক্তি হারাবে।

গতির বিপরীতে F বল প্রয়োগে মন্দন a হলে এবং s দূরত্ব অতিক্রমের পর বস্তুর বেগ v হলে, মন্দনের ক্ষেত্রে,

$$a = \frac{v_0^2 - v^2}{2s}$$

কাজেই কৃত কাজ, $W = Fs = ma \times s = m\left(\frac{v_0^2 - v^2}{2}\right)$

$$W = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv^2 \quad (24)$$

বলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ = শক্তি ক্ষয়

= আদি গতিশক্তি – শেষ গতিশক্তি

কৃত কাজ = গতিশক্তির পরিবর্তন

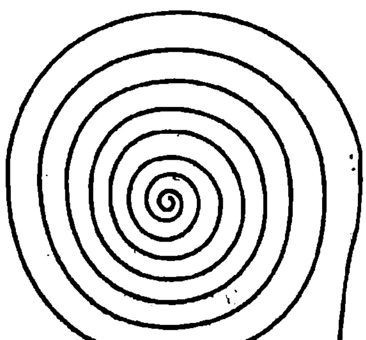
সুতরাং কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান। এটি **'কাজ-শক্তি উপপাদ্য'** নামে পরিচিত। সমীকরণ (23) ও (24) উপপাদ্যটি প্রমাণ করে।

৬·১২ স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি
Potential energy

স্থিতিশক্তির দুটি সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে ঃ

(১) স্থিতিশক্তির অর্থ স্থিতিজনিত শক্তি অর্থাৎ নির্দিষ্ট অবস্থানে বা অবস্থায় স্থিতিশীল থাকার দরুন বস্তু যে শক্তি প্রাপ্ত হয় তাকে স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি বলে।

(২) কোন বস্তুর বিভিন্ন অংশের পরিবর্তনের দরুন অথবা পারিপার্শ্বিক সাপেক্ষে বস্তুর অবস্থানের দরুন বস্তু যে শক্তি প্রাপ্ত হয় তাকে ঐ বস্তুর স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি বলে। যেমন ছাদের উপর রক্ষিত একখণ্ড ইট, পানির ট্যাংকে রক্ষিত পানি ইত্যাদি কম-বেশি শক্তি প্রাপ্ত হয়। এরূপ সকল শক্তিই স্থিতিশক্তি। স্থিতিশক্তির আরও কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে দেয়া হল ঃ



চিত্র ৬·১০

(ক) খেলনার মোটর গাড়িতে স্প্রিং লাগানো থাকে [চিত্র ৬·১০]। এই স্প্রিং-এ দম দিলে তা আকারে ছোট হয়। এই আকার পরিবর্তনের জন্য আমরা কাজ করি যা স্থিতিশক্তিরূপে স্প্রিং-এ সঞ্চিত হয়। দম ছেড়ে দিলে স্প্রিং-এর প্যাঁচ খুলে পুনরায় পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে। স্প্রিং-এর সাথে খেলনার চাকা লাগানো থাকে। ফলে চাকা ঘুরতে থাকে অর্থাৎ স্প্রিং স্থিতি শক্তির দরুন গাড়ি চালাতে কাজ করে।

(খ) হাত ঘড়িতে স্থিতিস্থাপক স্প্রিং-এর সাথে ঘড়ির চাকা যুক্ত থাকে [চিত্র ৬·১০]। এই স্প্রিং-এ দম দিলে তা আকারে ছোট হয়। এই আকার পরিবর্তন তথা দম দেওয়ার জন্য আমরা কাজ করি যা স্প্রিং-এর

মধ্যে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত হয়। স্প্রিং-এর সাথে ঘড়ির কাঁটার এমন একটি সংযোগ থাকে যে স্প্রিং প্যাঁচ খুলে উল্টা দিকে ঘুরে আগের অবস্থায় ফিরে আসার সময় ঘড়ির কাঁটা ঘুরতে থাকে। স্প্রিং-এর স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে পরিণত হয়।

এরূপ ধনুকের ছিলাতে তীর লাগিয়ে টানলে, ধাতব পাতকে বাঁকালে, রবারকে প্রসারণ করলে সকলেই আকার পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি লাভ করে।

(গ) উচ্চে অবস্থিত পানিতে, পাহাড়ের চূড়ায় বরফে এবং আকাশের মেঘে অবস্থান পরিবর্তনের জন্য স্থিতিশক্তি সঞ্চিত থাকে।

স্থিতিশক্তির পরিমাপ (Measurement of P. E.)

কোন একটি বস্তু বর্তমান অবস্থা হতে অন্য কোন স্বাভাবিক বা প্রমাণ অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাই স্থিতিশক্তির পরিমাপ।

স্থিতিশক্তির প্রকারভেদ (Types of potential energy)

স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি বিভিন্ন প্রকার, যথা :

(১) অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি বা অভিকর্ষীয় বিভব শক্তি (Gravitational potential energy)

(২) স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি (Elastic potential energy)

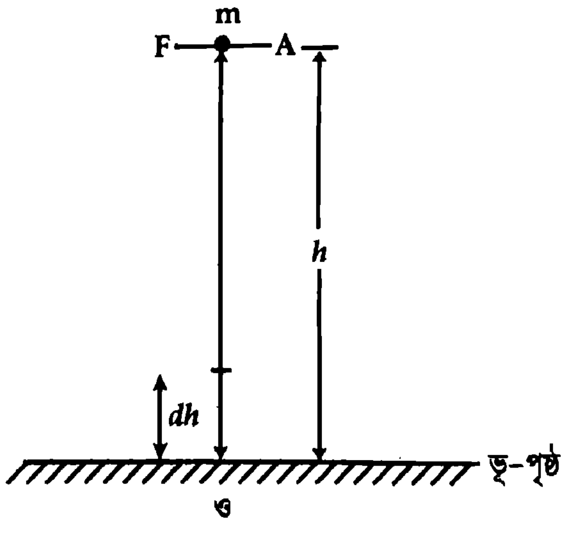
(৩) তড়িৎ বিভব শক্তি (Electric potential energy)

৬·১৩ অভিকর্ষীয় স্থিতি শক্তি বা বিভব শক্তি
Gravitational Potential energy

কোন একটি বস্তুকে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে উপরে তুলতে বাইরের কোন উৎস বা এজেন্টের প্রয়োজন হয়। এই কাজ বস্তুর মধ্যে স্থিতিশক্তি বা বিভব শক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে। এর নাম অভিকর্ষীয় বিভব শক্তি। এক্ষেত্রে ভূ-পৃষ্ঠকে প্রমাণ্য তল (reference level) হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

এখন শক্তির পরিমাপ করা যাক—

ক্যালকুলাস পদ্ধতি : মনে করি m ভরের একটি বস্তুকে ভূ-পৃষ্ঠ থেকে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে অতি ক্ষুদ্র উচ্চতা dh পর্যন্ত উঠানো হল। এতে কৃত কাজ



চিত্র ৬·১১

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dh}$$

$$\text{বা,} \quad dW = Fdh \qquad (25)$$

এখানে F = বাহ্যিক উৎস কর্তৃক প্রযুক্ত বল এবং F ও dh-এর মধ্যবর্তী কোণ শূন্য।

একটি বস্তুকে উপরে উঠাতে হলে এর ওজনের সমপরিমাণ বল উপর দিকে প্রয়োগ করতে হবে।

প্রযুক্ত বল, F = বস্তুর ওজন = mg

সুতরাং, বস্তুটিকে h উচ্চতায় A স্থানে উঠাতে হলে মোট কৃত কাজের পরিমাণ সমীকরণ (25)-এ প্রদত্ত ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কাজের সমষ্টির সমান।

অভিকর্ষীয় বিভব শক্তি = বস্তুটিকে ভূ-পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায় তুলতে মোট কৃত কাজ।

$$\text{P. E.} = \int_0^h F dh = \int_0^h mg dh$$

স্বল্প উচ্চতার জন্য g-এর মান ধ্রুব ধরে আমরা লিখতে পারি,

$$\text{P.E.} = mg \int_0^h dh = mg[h]_0^h = mg[h-0] = mgh$$

অর্থাৎ অভিকর্ষীয় বিভব শক্তি

$$\text{P.E.} = mgh \qquad (26)$$

$$= \text{ভর} \times \text{অভিকর্ষীয় ত্বরণ} \times \text{উচ্চতা}$$

উল্লেখ্য বস্তু যতই নিচে নামতে থাকবে h-এর মান ততই কমবে এবং অভিকর্ষীয় বিভব শক্তিও কমতে থাকবে। ভূ-পৃষ্ঠে h = শূন্য হওয়ায় অভিকর্ষীয় বিভব শক্তি শূন্য হবে।

কোন বস্তুর অভিকর্ষীয় বিভব শক্তির মান প্রামাণ্য তলের সাপেক্ষে বস্তুর অবস্থানের উপরে নির্ভর করে। সমুদ্র পৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল বিবেচনা করে কোন অবস্থানের বিভব শক্তি এবং কোন উঁচু পাহাড়ের চূড়া প্রামাণ্য তল বিবেচনা করলে ঐ একই অবস্থানের বিভব শক্তি এক হবে না, ভিন্নতর হবে। প্রকৃতপক্ষে কোন স্থানের বিভব শক্তির পরম মান নির্ণয় করা যায় না, বিভব প্রমাণ তল বা প্রসজ্ঞা তল সাপেক্ষে বিভব শক্তির পরিবর্তন নির্ণয় করা হয়।

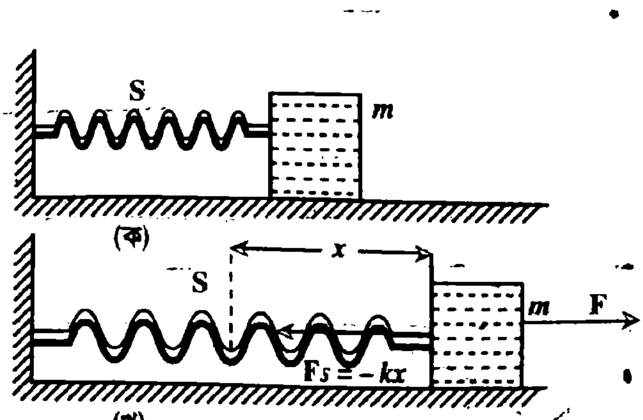
বিভব শক্তির মান ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। এটা নির্ভর করে প্রসজ্ঞা বা প্রামাণ্য তলের উপরে। ভূ-পৃষ্ঠকে প্রামাণ্য তল বিবেচনা করলে উপরের দিকে বিভব শক্তি ধনাত্মক হবে আবার ভূগর্ভে বা খনিতে বিভব শক্তি ঋণাত্মক হবে।

৬.১৪ স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি
Elastic potential energy

স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে একটি বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুর বিকৃতি ঘটে। বিকৃতি ঘটাতে বস্তুর উপর কাজ সাধিত হয়। এই কাজ বস্তুর মধ্যে স্থিতি বা বিভব শক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে। এর নাম স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি।

নিম্নে স্প্রিং-এর বিভব শক্তি আলোচনা করা হল।

স্প্রিং-এর বিভব শক্তি ঃ ধরি একটি অনুভূমিক আদর্শ স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দেওয়ালের সাথে আটকানো এবং অপর প্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যুক্ত আছে। বস্তুটি অনুভূমিক ও ঘর্ষণহীন তলের উপর দিয়ে যাতায়াত করতে পারে [চিত্র ৬.১২]। বস্তুটিকে টেনে স্প্রিংটিকে দৈর্ঘ্য বরাবর বিকৃত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের দরুন প্রযুক্ত বলের বিপরীতে স্প্রিং-এ প্রত্যায়নী বলের উদ্ভব ঘটবে। F অনুভূমিক বল প্রয়োগে বস্তুটিকে বাম হতে ডানদিকে দৈর্ঘ্য অনুভূমিক বরাবর তার দৈর্ঘ্য x পরিমাণ বৃদ্ধি পেলে স্প্রিং-এ $-kx$ পরিমাণ প্রত্যায়নী বল উৎপন্ন হবে। এখন বস্তুটিকে x দূরত্ব সরাতে তার উপর এর সমান ও বিপরীতমুখী $F = kx$ বল প্রয়োগ করে কাজ করতে হবে। এই সম্প্রসারণে প্রযুক্ত বল দ্বারা কৃত কাজই হবে বস্তুটির মধ্যে সঞ্চিত বিভব শক্তি।



চিত্র ৬.১২

সুতরাং বিভব শক্তি, $U = \int_0^x F dx = \int_0^x kx\, dx$

$$= k\int_0^x x\, dx = \frac{1}{2}k \ [x^2]_0^x = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (27)$$

স্প্রিংটিকে দৈর্ঘ্য x পরিমাণ সংকুচিত করলেও সঞ্চিত বিভব শক্তি $\frac{1}{2}kx^2$ হবে।

৬·১৫ শক্তির রূপান্তর
Transformation of energy

এই মহাবিশ্ব জুড়ে শক্তি বিভিন্ন রূপে বিরাজিত। বিভিন্ন প্রকার শক্তি পরস্পরের সাথে সম্বন্ধযুক্ত। এক শক্তিকে অন্য শক্তিতে রূপান্তর সম্ভব। এর নামই **শক্তির রূপান্তর** (Transformation of energy)। শক্তি রূপান্তরের কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে প্রদত্ত হল।

(১) পানি উচ্চ স্থান হতে নিম্ন স্থানে প্রবাহিত হয়। উচ্চ স্থানে থাকার সময় তার শক্তি স্থিতিশক্তি। নিম্ন স্থানে প্রবাহিত হবার সময় স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হয়। এই গতিশক্তির সাহায্যে টারবাইন ঘুরিয়ে বিদ্যুৎ শক্তি উৎপন্ন করা হয়। অর্থাৎ **যান্ত্রিক শক্তি বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(২) বিদ্যুৎ শক্তি যখন বৈদ্যুতিক বাতির মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হয় তখন আমরা আলো পাই। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি আলোক শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(৩) বৈদ্যুতিক ইস্ত্রিতে তড়িৎ বা বিদ্যুৎ চালনা করে তাপ উৎপন্ন করা হয়। এই তাপের সাহায্যে কাপড়-চোপড় ইস্ত্রি করা হয়। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি তাপ শক্তিতে এবং তাপ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

বৈদ্যুতিক পাখার মধ্য দিয়ে বিদ্যুৎ প্রবাহিত করলে পাখা ঘুরতে থাকে। এ স্থলেও বৈদ্যুতিক শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হল।

(৪) একটি কাঁচা লোহার উপর অন্তরীত (insulated) তামার তার জড়িয়ে বিদ্যুৎ চালনা করলে লোহার পাতটি চুম্বকে পরিণত হয়। এক্ষেত্রে **বিদ্যুৎ শক্তি চুম্বক শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(৫) ক্যালসিয়াম, পটাসিয়াম, রুবিডিয়াম প্রভৃতি ধাতুর উপর আলো পড়লে ইলেকট্রন নির্গত হতে দেখা যায়। ফটো-ইলেকট্রিক কোষ এই নীতির উপর প্রতিষ্ঠিত। এরূপ একটি কোষে আলো ফেলে বিদ্যুৎ প্রবাহ তৈরি করা হয়। এক্ষেত্রে **আলোক শক্তি বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(৬) দুই হাতের তালু পরস্পরের সাথে ঘষলে তাপ উৎপন্ন হয়। এক্ষেত্রে **যান্ত্রিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(৭) ফটোগ্রাফিক ফিল্মের উপর আলোক সম্পাত করে রাসায়নিক ক্রিয়ার মাধ্যমে আলোক চিত্র তৈরি করা হয়। এক্ষেত্রে **আলোক শক্তি রাসায়নিক শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(৮) ওষুধের কারখানায় শ্রবণোত্তর বা শব্দোত্তর তরঙ্গের সাহায্যে জীবাণু ধ্বংস করা হয় এবং কর্পূরকে পানিতে দ্রবণীয় করা হয়। এ ছাড়া শব্দোত্তর তরঙ্গ দ্বারা বস্ত্রাদির ময়লাও পরিষ্কার করা হয়। এসব ক্ষেত্রে **শব্দ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

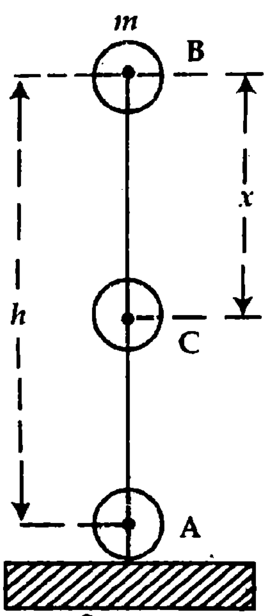
(৯) আমরা জানি বৈদ্যুতিক ঘণ্টা বিদ্যুতের সাহায্যে চলে। টেলিফোনও বিদ্যুতের সাহায্যে চলে। দুই ক্ষেত্রেই আমরা শব্দ শুনতে পাই। এস্থলে **বিদ্যুৎ শক্তি শব্দ শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(১০) কয়লা পোড়ালে তাপ উৎপন্ন হয়। রাসায়নিক ক্রিয়ার ফলে এটি ঘটে। এক্ষেত্রে **রাসায়নিক শক্তি তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

(১১) বিদ্যুৎ কোষে রাসায়নিক দ্রব্যের বিক্রিয়ার ফলে বিদ্যুৎ উৎপন্ন হয়। এক্ষেত্রে **রাসায়নিক শক্তি তড়িৎ বা বিদ্যুৎ শক্তিতে রূপান্তরিত হল।**

শক্তি যখন একরূপ হতে অন্যরূপে পরিবর্তিত হয় তখন এর কোন ঘাটতি বা বাড়তি ঘটে না। অর্থাৎ শক্তির বিনাশ ও সৃষ্টি উভয়ই অসম্ভব। যখন এক প্রকার শক্তি বিলুপ্ত হয় তখন তা অন্যরূপে কোথাও আত্মপ্রকাশ করে। এর নাম **শক্তির নিত্যতা বা শক্তির অবিনশ্বরতা** (Conservation of Energy)। **এ সম্পর্কে একটি সূত্র বা বিধি আছে।** এর নাম শক্তির নিত্যতা সূত্র বা শক্তির নিত্যতা বিধি। **একে শক্তির সংরক্ষণ সূত্রও বলা হয়।**

৬.১৬ যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র
Principle of conservation of mechanical energy



চিত্র ৬.১৩

এই সূত্রানুসারে "শক্তি অবিনশ্বর ; এর সৃষ্টি বা বিনাশ নেই। এটি কেবল একরূপ হতে অন্য এক বা একাধিক রূপে পরিবর্তিত হতে পারে। রূপান্তরের আগে ও পরে মোট শক্তির পরিমাণ নির্দিষ্ট এবং অপরিবর্তনীয়।" একে শক্তির অবিনাশিতাবাদও বলা হয়।

প্রমাণ (Proof) : নিম্নের দৃষ্টান্ত দ্বারা শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রমাণিত হয়।

(ক) পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে : "বিনা বাধায় উচ্চ হতে নিম্নে পড়ন্ত বস্তুর যে কোন মুহূর্তে স্থিতিশক্তি এবং গতিশক্তির সমষ্টি সমান।"

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকে পৃথিবী পৃষ্ঠের A বিন্দু হতে অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে খাড়া h উচ্চতায় উঠিয়ে B বিন্দুতে স্থাপন করা হল।

B বিন্দুতে থাকাকালীন বস্তুর সমস্ত শক্তিই স্থিতিশক্তি

এখন B বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি, $P.\ E_B = mgh$

B বিন্দুতে বস্তুর গতিশক্তি, $K.\ E_B = 0$

B বিন্দুতে বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

$$= P.E_B + K.E_B = mgh + 0 = mgh \qquad (28)$$

বস্তুটিকে B বিন্দু হতে ছেড়ে দিলে তা অভিকর্ষ বলের প্রভাবে নিচে নামতে থাকবে। বস্তুটি যতই নিচে নামবে ততই তার বেগ বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ স্থিতিশক্তি গতিশক্তিতে রূপান্তরিত হবে। বিনা বাধায় পড়লে বস্তু যে পরিমাণ স্থিতিশক্তি হারাবে ঠিক সমপরিমাণ গতিশক্তি লাভ করবে। ফলে সর্বত্র স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির সমষ্টি সমান থাকবে।

ধরি t সময় পর বস্তুটি x দূরত্ব অতিক্রম করে C বিন্দুতে এল। C বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি দুই-ই থাকবে। কারণ তা এখনও মাটি হতে উপরে আছে এবং তা কিছু বেগ প্রাপ্ত হয়েছে।

C বিন্দুতে স্থিতিশক্তি, $P.\ E_C =$ ভর $\times$ অভিকর্ষীয় ত্বরণ $\times$ উচ্চতা $= mg\,(h - x)$

C বিন্দুতে গতিশক্তি, $K.\ E_C = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\ (v_0{}^2 + 2gx)$

$$= \frac{1}{2} m \times 2gx = mgx \quad [\because v_0 = 0]$$

C বিন্দুতে বস্তুর মোট যান্ত্রিক শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি = $P.\ E_C + K.\ E_C$

$$= mg\,(h - x) + mgx$$

$$= mgh - mgx + mgx = mgh \qquad (29)$$

সমীকরণ (28) এবং (29) হতে আমরা সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে পারি যে,

$$P.\ E_B + K.\ E_B = P.\ E_C + K.\ E_C = mgh$$

অর্থাৎ **অভিকর্ষ বলের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর মোট শক্তির পরিমাণ একটি ধ্রুব রাশি। অতএব যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রমাণিত হল।**

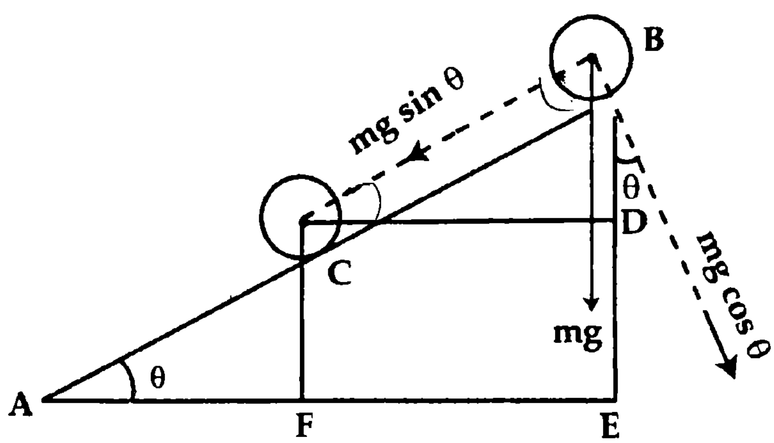
বস্তু যতই নিচে নামবে ততই তার স্থিতিশক্তি হ্রাস পাবে এবং গতিশক্তি বৃদ্ধি পাবে। কিন্তু তাদের যোগফল সর্বদা স্থির থাকবে। বস্তুটি যখন মাটি স্পর্শ করবে তখন স্থিতিশক্তি এবং গতিশক্তি উভয়েই লোপ পেয়ে তাপ শক্তি, শব্দ শক্তি, যান্ত্রিক শক্তি প্রভৃতিতে রূপান্তরিত হবে।

উল্লেখ্য : বাধাহীন পথে এবং স্থিরাবস্থা হতে পড়ন্ত বস্তু প্রথম সেকেন্ডে $\frac{1}{2}mg^2$, দ্বিতীয় সেকেন্ডে $\frac{3}{2}mg^2$, তৃতীয় সেকেন্ডে $\frac{5}{2}mg^2$, ...t-তম সেকেন্ডে $\frac{1}{2}mg^2(2t-1)$ পরিমাণ স্থিতিশক্তি হারাবে এবং সমপরিমাণ গতিশক্তি লাভ করবে ; কেননা $s_t = \frac{(2t-1)}{2}g$ এবং t-তম সেকেন্ডে হারানো স্থিতিশক্তি $= mg \times s_t = \frac{1}{2}mg^2(2t-1)$।

(খ) আনত তল বরাবর গতিশীল বস্তুর ক্ষেত্রে : ধরা যাক ভূমি AFE-এর সাথে θ কোণে আনত একটি মসৃণ তল AB-এর উপর B বিন্দুতে m ভরের একটি বস্তু রাখা আছে এবং AFE হতে বস্তুটির উচ্চতা BE=h [চিত্র ৬.১৪]। তা হলে B বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি $= mg \times \text{BE} = mgh$ ও B বিন্দুতে বস্তুর গতিশক্তি $= 0$ ($\because v_0 = 0$)

B বিন্দুতে বস্তুর মোট শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি $= mgh + 0 = mgh$।

এখন ধরা যাক বস্তুটি ছেড়ে দেয়ায় তা B বিন্দু হতে তল বরাবর x দূরত্ব অতিক্রম করার পর C বিন্দুতে পৌঁছল এবং C বিন্দুতে বস্তুর বেগ v হল। ধরা যাক CD ‖ AFE এবং CF = y ।



চিত্র ৬.১৪

বর্ণনা অনুসারে আনত তল বরাবর বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল বল

$= mg\cos(90° - \theta) = mg\sin\theta$

ত্বরণ, $a = g\sin\theta$ এবং সরণ $= x$

C বিন্দুতে বস্তুর স্থিতিশক্তি $= mg \times \text{CF} = mgy = mg(\text{BE} - \text{BD}) = mg(h - x\sin\theta)$

C বিন্দুতে বস্তুর গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \times 2gx\sin\theta$ ($\because v_0 = 0$ এবং $v^2 = v_0^2 + 2as$)

$= mgx\sin\theta$

সুতরাং C বিন্দুতে বস্তুর মোট শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

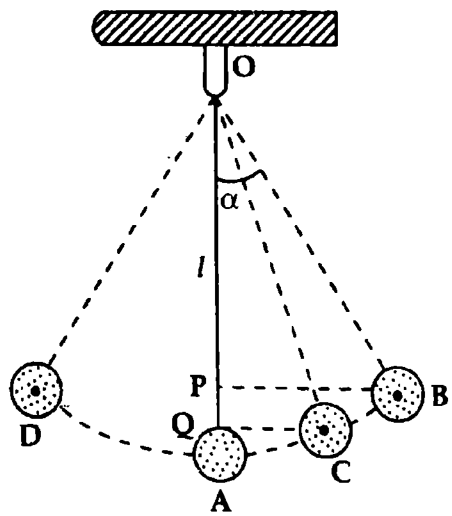
$= mg(h - x\sin\theta) + mgx\sin\theta$

$= mgh$

B বিন্দুতে বস্তুর মোট শক্তি = C বিন্দুতে বস্তুর মোট শক্তি। সুতরাং প্রমাণিত হল যে, আনত তল বরাবর গতিশীল বস্তুর মোট শক্তি সর্বদা একই থাকে।

উল্লেখ্য : তল বরাবর x পরিমাণ সরণে কৃত কাজ $= mgx\sin\theta = mg \times \text{BD} =$ ওজন $\times$ আদি ও অন্ত অবস্থানের মধ্যে (উল্লম্ব) উচ্চতা।

(গ) আন্দোলিত সরল দোলকের ক্ষেত্রে : ধরা যাক একটি সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য l = OA, দোলক পিণ্ডের ভর m, কৌণিক বিস্তার α, দোলনের সর্বোচ্চ বিন্দু B বা D এবং সর্বনিম্ন বিন্দু A [চিত্র ৬.১৫]।



চিত্র ৬.১৫

দোলক B অথবা D বিন্দুতে পৌঁছালে তা মুহূর্তের জন্য স্থির অবস্থায় থাকবে এবং যতই D অথবা B হতে A-এর দিকে যাবে তার বেগ ততই বৃদ্ধি পাবে। সর্বনিম্ন বিন্দু A অতিক্রম করার সময় দোলকের বেগ সর্বাধিক হবে। সুতরাং B অথবা D বিন্দুতে দোলকের সমস্ত শক্তি স্থিতিশক্তি এবং A বিন্দুতে দোলকের সমস্ত শক্তি গতিশক্তি। দোলক যত B অথবা D হতে A-এর দিকে যাবে তার স্থিতিশক্তি তত গতিশক্তিতে এবং দোলক A হতে যত B অথবা D-এর দিকে যাবে তার গতিশক্তি তত স্থিতিশক্তিতে রূপান্তরিত হবে।

ধরা যাক দোলকটি OB অবস্থিতি হতে কোন এক মুহূর্তে OC অবস্থিতিতে পৌঁছল এবং OC অবস্থিতিতে দোলকটির বেগ v হল। OA-এর উপর BP ও CQ লম্ব হলে বর্ণনা অনুসারে, A বিন্দুর সাপেক্ষে OB অবস্থিতিতে দোলকের স্থিতিশক্তি $= mg \times AP$

OB অবস্থিতিতে দোলকের গতিশক্তি $= 0$

OB অবস্থিতিতে দোলকের মোট শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

$$= mg \times AP + 0 = mg \times AP$$

আবার OC অবস্থিতিতে দোলকের স্থিতিশক্তি $= mg \times AQ$

OC অবস্থিতিতে দোলকের গতিশক্তি $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \times 2g \times PQ = mg \times PQ$

($v_0 = 0$ এবং $v^2 = v_0{}^2 + 2gs$)

$$= mg \times (AP - AQ)$$

OC অবস্থিতিতে দোলকের মোট শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

$$= mg \times AQ + mg \times (AP - AQ) = mg \times AP$$

OB অবস্থিতিতে দোলকের মোট শক্তি = OC অবস্থিতিতে দোলকের মোট শক্তি।

সুতরাং প্রমাণিত হল আন্দোলিত দোলকের অনুসৃত পথের যে কোন অবস্থিতিতে তার মোট শক্তির পরিমা সর্বদা একই থাকে।

উল্লেখ্য ঃ OA অবস্থিতিতে দোলকের বেগ v_m হলে, v_m-ই সর্বোচ্চ বেগ।

OA অবস্থিতিতে তার মোট শক্তি $= \frac{1}{2} m v_m{}^2$

শক্তির নিত্যতা সূত্র অনুসারে, $\frac{1}{2} mv_m{}^2 = mg \times AP$

কিন্তু, $AP = OA - OP = OA - OB \cos\alpha = l(1 - \cos\alpha) = 2l \sin^2(\alpha/2)$

কাজেই, $\frac{1}{2} mv_m{}^2 = mg \times 2l \sin^2(\alpha/2)$

$v_m = 2\sqrt{gl} \sin(\alpha/2)$ = দোলকের সর্বোচ্চ বেগ। (30)

গতিশক্তি ও বিভব শক্তির মধ্যে পার্থক্য :

গতিশক্তি	বিভব বা স্থিতি শক্তি
১। কোন একটি গতিশীল বস্তু গতির জন্য যে শক্তি লাভ করে তাকে ঐ বস্তুর গতি শক্তি বলে।	১। নির্দিষ্ট অবস্থানে বা স্থিতিশীল অবস্থায় কোন বস্তুর মধ্যে যে পরিমাণ শক্তি সঞ্চিত থাকে, তাকে ঐ বস্তুর বিভব শক্তি বলে।
২। বস্তু স্থিতিতে আসার পূর্ব মুহূর্তে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তা দ্বারা গতিশক্তি পরিমাপ করা হয়।	২। বস্তু এক অবস্থান হতে অন্য অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তা দ্বারা বিভব শক্তি পরিমাপ করা হয়।
৩। গতিশক্তির সমীকরণ হল $\frac{1}{2}mv^2$।	৩। অভিকর্ষীয় বলের ক্ষেত্রে বিভব শক্তির সমীকরণ হল mgh।
৪। বেগ বৃদ্ধিতে বস্তুর গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। বেগ হ্রাসে বস্তুর গতিশক্তি হ্রাস পায়।	৪। উচ্চতা বৃদ্ধিতে বস্তুর বিভব শক্তি বৃদ্ধি পায়। উচ্চতা হ্রাসে বস্তুর বিভব শক্তি হ্রাস পায়।
৫। গতিশক্তি একটি স্কেলার রাশি।	৫। বিভব শক্তি একটি স্কেলার রাশি।

৬.১৭ শক্তির অপচয়
Dissipation of energy

আমরা জানি শক্তি অবিনশ্বর। শক্তি শুধু একরূপ হতে অন্য রূপে রূপান্তরিত হতে পারে ; রূপান্তরের পূর্বে ও পরে মোট শক্তির কোন পরিবর্তন হয় না। লর্ড কেলভিন (Lord Kelvin) প্রথম উপলব্ধি করেন যে, শক্তি অবিনশ্বর হলেও প্রত্যেক রূপান্তরে কিছু শক্তি এমনভাবে আত্মপ্রকাশ করে যে, তা প্রয়োজনীয় কোন কাজে লাগে না। শক্তির এই অকার্যকর রূপান্তরের নাম **শক্তির অপচয়**। কোন যন্ত্র হতে কাজ পাবার জন্য ঐ যন্ত্রে শক্তি সরবরাহ করতে হয়। কিন্তু প্রযুক্ত বা প্রদত্ত (input) শক্তি এবং প্রাপ্ত বা লব্ধ (output) শক্তি সমান হয় না। লব্ধ শক্তি কিছু কম হয়। যেমন রেলগাড়ির বাষ্পীয় ইঞ্জিনে তাপ শক্তি যান্ত্রিক শক্তিতে পরিণত হয়। কিন্তু যান্ত্রিক শক্তির কিছু অংশ রেলের চাকার এবং বিয়ারিং-এর ঘর্ষণ বল অতিক্রম করতে তাপ শক্তিরূপে নষ্ট হয়।

মহাবিশ্বে নিয়ত একরূপ শক্তি অন্যরূপ শক্তিতে রূপান্তরিত হচ্ছে। প্রত্যেক রূপান্তরে কিছু না কিছু শক্তি অকার্যকর কাজে ব্যয় হচ্ছে।

৬.১৮ কার্য বা কর্মদক্ষতা
Efficiency

কোন যন্ত্রের কর্মদক্ষতা বলতে কার্যকর শক্তি এবং প্রদত্ত মোট শক্তির অনুপাতকে বুঝায়। একে সাধারণত η (ইটা) দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং সংক্ষেপে **দক্ষতাও** বলে।

সংজ্ঞানুসারে $\boxed{\eta = \dfrac{\text{কার্যকর শক্তি (output)}}{\text{প্রদত্ত মোট শক্তি (input)}}}$

যেমন কোন যন্ত্রের কর্মদক্ষতা 80% বলতে বুঝা যায় যে, 100 একক শক্তি সরবরাহ করলে তার মাত্র 80 একক শক্তি কাজে লাগবে এবং 20 একক শক্তির অপচয় হবে।

মনে করি কোন যন্ত্রে E_1 পরিমাণ শক্তি প্রদান করা হল এবং E_2 পরিমাণ শক্তির অপচয় ঘটল।

$$\therefore \boxed{\text{কর্মদক্ষতা}, \eta = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) E_1 \times 100\% \ ..} \qquad (31)$$

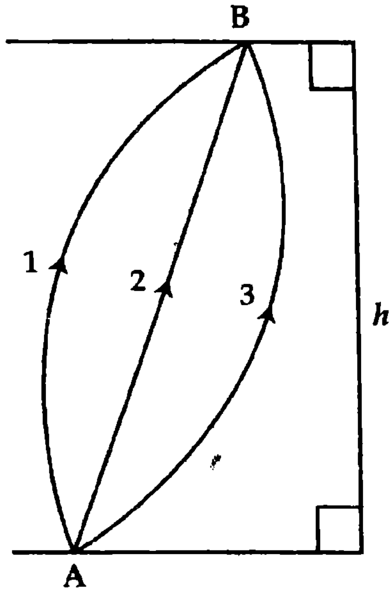
৬.১৯ সংরক্ষণশীল এবং অসংরক্ষণশীল বল
Conservative and Non-conservative force

বল দু'প্রকার যথা : (১) **সংরক্ষণশীল বল** এবং (২) **অসংরক্ষণশীল বল**।

এদের নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে ঃ

(১) **যে বল কোন বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে তাকে যে কোন পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।** উদাহরণ—অভিকর্ষীয় বল, বৈদ্যুতিক বল, আদর্শ স্প্রিং-এর বিকৃতি প্রতিরোধী বল প্রভৃতি। আর **যে বল কোন বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে তাকে যে কোন পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ঐ বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় না তাকে অসংরক্ষণশীল বল বলে।** উদাহরণ—ঘর্ষণ বল, সান্দ্র বল প্রভৃতি।

(২) **কোন বলের ক্রিয়া অভিমুখ যদি বস্তুর গতি অভিমুখের উপর নির্ভর না করে তবে ঐ বলই সংরক্ষণশীল বল, আর যদি নির্ভর করে তবে ঐ বল অসংরক্ষণশীল বল।**



চিত্র ৬.১৬

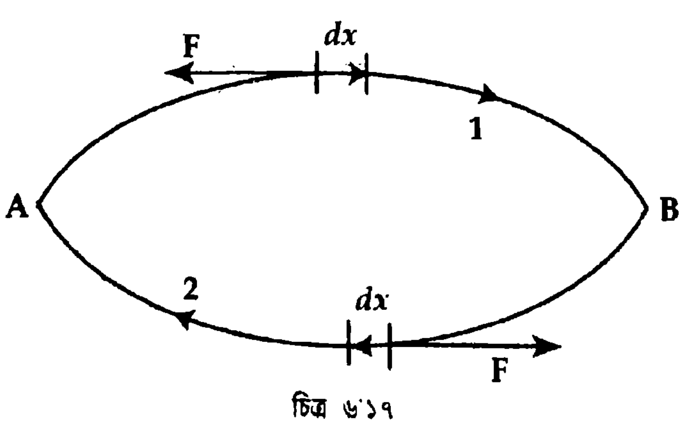
ধরি m ভরের একটি বস্তুকে A বিন্দু হতে উপরে উঠিয়ে B বিন্দুতে স্থাপন করা হল এবং এতে বস্তুটির উল্লম্ব সরণ h হল [চিত্র ৬.১৬]। এই স্থানান্তর 1নং, 2নং বা 3নং পথে হলেও প্রত্যেক পথের সকল বিন্দুতে অভিকর্ষীয় বল mg খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে এবং প্রত্যেক পথে অভিকর্ষীয় বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর বস্তুর সরণ h। এই তিন পথের প্রত্যেক পথে কৃত কাজের পরিমাণ সমান এবং কৃত কাজ $W = -mgh$।

আবার বস্তুটিকে A বিন্দু হতে 1নং পথে B বিন্দুতে এনে পুনরায় তাকে B বিন্দু হতে A বিন্দুতে স্থানান্তর করলে, প্রথম স্থানান্তরে অভিকর্ষীয় বলের বিপরীত দিকে সরণ $= h$ ও কৃত কাজ $W_1 = -mgh$ এবং দ্বিতীয় স্থানান্তরে অভিকর্ষীয় বলের অভিমুখে সরণ $= h$ ও কৃত কাজ $W_2 = mgh$.

মোট কৃত কাজ, $W_2 + W_1 = mgh + (-mgh) = 0$

কাজেই **অভিকর্ষীয় বল সংরক্ষণশীল বল এবং এই বল কর্তৃক কৃত কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব।** সংরক্ষণশীল বলের বৈশিষ্ট্য অনুসারে তার আর একটি সংজ্ঞা দেয়া যায়। যেমন **যে বলের ক্রিয়ায় কোন বস্তুকে এক বিন্দু হতে অপর কোন বিন্দুতে নিয়ে যেতে ঐ বল কর্তৃক কৃত কাজ শুধু বিন্দুদ্বয়ের অবস্থানের উপর নির্ভর করে—পথের উপর নির্ভর করে না তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।**

আবার ধরি একটি বস্তুকে মসৃণ অনুভূমিক মেঝের উপর দিয়ে ঠেলে A বিন্দু হতে 1নং পথে B বিন্দুতে আনা হল [চিত্র ৬.১৮]। এই ক্ষেত্রে ঘর্ষণ বল বস্তুর গতি অভিমুখের বিপরীতে ক্রিয়া করবে। কাজেই এই স্থানান্তরে ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে কাজ করতে হবে ; কারণ ঘর্ষণ বল সর্বদাই গতিপ্রতিরোধী বল। গতিপথে একটি ক্ষুদ্র সরণ dx এবং এই সরণ গড় F ঘর্ষণ বলের বিপরীতে সংঘটিত হলে, কৃত কাজ $W = -Fdx$।



চিত্র ৬.১৭

1নং পথে A হতে B পর্যন্ত নিতে মোট কৃত কাজ এরূপ ছোট ছোট কৃত কাজের সমষ্টির সমান ও মোট কৃত কাজ, $W_1 = -\int_1 Fdx$।

এখন যদি বস্তুটিকে B হতে 2নং পথে পুনরায় A বিন্দুতে নিয়ে যাওয়া হয় তবে এই ক্ষেত্রেও ঘর্ষণ বল বস্তুর গতিপথের বিপরীতে ক্রিয়া করবে।

কাজেই এই ক্ষেত্রেও কৃত কাজ,

$$W_2 = -\int_2 Fdx.$$

উভয় ক্ষেত্রে কাজ ঘর্ষণ বলের বিরুদ্ধে হওয়ায় উভয় কাজ ঋণাত্মক এবং তাদের যোগফল শূন্য হবে না।

অর্থাৎ $W_1 + W_2 = -\int_1 Fdx - \int_2 Fdx \neq 0$

কাজেই ঘর্ষণ বল কর্তৃক কৃত কাজ পুনরুদ্ধার করা সম্ভব নয়। অতএব ঘর্ষণ বল অসংরক্ষণশীল বল।

সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বল ক্ষেত্রের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী দেখান যায় যে,

কোন বস্তুকে অভিকর্ষ বল F-এর বিরুদ্ধে মাটি হতে h উপরে তুলতে কাজের পরিমাণ $= -Fh$। এখন তাকে সেখান থেকে ছেড়ে দিলে মাটিতে ফিরে আসতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজের পরিমাণ হবে $+Fh$.

সুতরাং বস্তুর মাটি হতে উপরে উঠার পর আবার মাটিতে ফিরে আসতে অভিকর্ষ বল দ্বারা কাজের পরিমাণ $(-Fh + Fh)$ শূন্য হবে। সুতরাং অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বল সংরক্ষণশীল বল। তেমনি বিদ্যুৎ বল, চৌম্বক বল ইত্যাদি সংরক্ষণশীল বল।

অপর পক্ষে, ঘর্ষণের ক্ষেত্রে, ঘর্ষণ বল বস্তুকে চলতে বাধা দেয়। সেজন্যে এর দ্বারা বস্তুর উপর কাজ ঋণ হয়। অতএব ঘর্ষণ বল হল অসংরক্ষণশীল বল।

৬.২০ সংরক্ষণশীল বল ও অসংরক্ষণশীল বলের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between conservative and non-conservative force

সংরক্ষণশীল বল ও অসংরক্ষণশীল বলের মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য করা যায় ঃ

সংরক্ষণশীল বল	অসংরক্ষণশীল বল
১। সংরক্ষণশীল বল ক্ষেত্রে একটি বস্তুকে যে কোন পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ঐ বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হবে।	১। অসংরক্ষণশীল বল ক্ষেত্রে একটি বস্তুকে যে কোন পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ঐ বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হবে না।
২। সংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়া অভিমুখ বস্তুর গতি অভিমুখের উপর নির্ভরশীল নয়।	২। অসংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়া অভিমুখ বস্তুর গতি অভিমুখের উপর নির্ভরশীল।
৩। সংরক্ষণশীল বল কর্তৃক কৃত কাজ সম্পূর্ণরূপে পুনরুদ্ধার করা সম্ভব।	৩। অসংরক্ষণশীল বল কর্তৃক কৃত কাজ সম্পূর্ণরূপে পুনরুদ্ধার করা সম্ভব নয়।
৪। বস্তুর উপর সংরক্ষণশীল বল কর্তৃক কৃত কাজ গতিপথের প্রাথমিক ও শেষ বিন্দুর উপর নির্ভরশীল।	৪। বস্তুর উপর অসংরক্ষণশীল বল কর্তৃক কৃত কাজ শুধু গতিপথের প্রাথমিক ও শেষ অবস্থানের উপর নির্ভরশীল নয়।
৫। সংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়ায় যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতার সূত্র পালিত হয়।	৫। অসংরক্ষণশীল বলের ক্রিয়ায় যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতার সূত্র সংরক্ষিত হয় না।

৬.২১ ক্ষমতা
Power

কোন একটি উৎসের (agent) কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে এবং একক সময়ের কৃত কাজ দ্বারা ক্ষমতা পরিমাপ করা হয়। বলের ক্রিয়ায় বস্তুর সরণ দ্রুত না ধীরে কিভাবে সম্পন্ন হয়েছে কাজের পরিমাণ দ্বারা তা বুঝা যায় না—বুঝা যায় ক্ষমতা দ্বারা।

মনে করি কোন ব্যক্তি বা উৎস t সময়ে W পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে।

একক সময়ের কৃত কাজ বা ক্ষমতা,

$$\boxed{P = \frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}} = \frac{W}{t}} \qquad (32)$$

$\vec{F}$ পরিমিত একটি ধ্রুব বল কোন কণার উপর dt সময় ক্রিয়া করে $d\vec{r}$ সরণ ঘটালে, ঐ ধ্রুব বল কর্তৃক উক্ত সময়ে কৃত কাজ, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

কণাটির উপর ঐ মুহূর্তে প্রযুক্ত ক্ষমতা,

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

কাজেই ঐ মুহূর্তের বেগ, $\vec{v}$ হলে $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ ও $P = \vec{F}\ \vec{v}$

ক্ষমতা স্কেলার রাশি।

ক্ষমতার একক (Unit of power)

ক্ষমতার সংজ্ঞা হতে এর একক বের করা যায়।

$$\text{ক্ষমতা} = \frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}} = \frac{\text{জুল}}{\text{সেকেন্ড}} = \text{জুল /সেকেন্ড (J/sec)}$$

এস. আই. বা আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে ক্ষমতার একক **জুল/সে. বা ওয়াট (watt)। এক সেকেণ্ডে এক জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক জুল/সে. বা এক-ওয়াট বলে।**

"কোন যন্ত্রের ক্ষমতা 50 জুল/সে.।"—উক্ত উক্তি দ্বারা বুঝি যন্ত্রটি প্রতি সেকেণ্ডে 50 জুল কাজ করতে পারে।

ওয়াট অপেক্ষা বড় মানের আরও একটি একক ক্ষমতা প্রকাশের জন্য ব্যবহৃত হয়। এর নাম **কিলোওয়াট (K. W.)**।

অশ্ব-ক্ষমতা : প্রতি সেকেণ্ডে 746 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক অশ্ব-ক্ষমতা বলে।

1 অশ্ব-ক্ষমতা = 746 জুল/সে. = 746 ওয়াট (Watt)

(খ) বৈদ্যুতিক ব্যবহারিক একক : ক্ষমতার বৈদ্যুতিক ব্যবহারিক একককে ওয়াট (Watt) বলে। 'ওয়াট' পরিমাপের আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতেও ক্ষমতার একক।

1 ওয়াট = 1 জুল/সে.

1 কিলোওয়াট = 1000 ওয়াট। অর্থাৎ কিলোওয়াট ওয়াট অপেক্ষা এক হাজার গুণ বড়। আধুনিক কালে কিলোওয়াট অপেক্ষা হাজার গুণ বড় অর্থাৎ ওয়াট অপেক্ষা দশ লক্ষ গুণ বড় ক্ষমতার আর একটি একক ব্যবহৃত হচ্ছে। এর নাম **মেগাওয়াট** (Mega watt)।

1 মেগাওয়াট (MW) = 1000 কিলোওয়াট

$= 10^6$ ওয়াট $= 10^6$ জুল/সে.

'কোন বিদ্যুৎ উৎপাদন কেন্দ্রের ক্ষমতা 2 মেগাওয়াট'। এর অর্থ—**কেন্দ্রের সরবরাহকৃত বিদ্যুৎ শক্তি দ্বারা প্রতি সেকেণ্ডে 2×10^6 জুল বা 2 মেগা-জুল কাজ করা যায়।**

ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ (Dimension of power)

আমরা জানি, $\boxed{\text{ক্ষমতা, } P = \frac{W}{t} = \frac{\text{বল} \times \text{সরণ}}{\text{সময়}}}$

ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ, $\boxed{[P] = \frac{[\text{বল}]\,[\text{সরণ}]}{[\text{সময়}]}}$

$$= \left[\frac{MLT^{-2} \times L}{T}\right] = [ML^2T^{-3}]$$

৬.২২ কাজ ও ক্ষমতার মধ্যে পার্থক্য
Distinction between work and power

কাজ ও ক্ষমতার মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য রয়েছে :

কাজ	ক্ষমতা
১। বল প্রয়োগে সরণ ঘটলে বল এবং বলের দিকে সরণের অংশকের গুণফলকে কাজ বলে।	১। কোন একটি উৎসের কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে।
২। কাজের মাত্রা = $[ML^2T^{-2}]$	২। ক্ষমতার মাত্রা = $[ML^2T^{-3}]$
৩। কাজ ঋণাত্মক ও ধনাত্মক উভয় প্রকারের হতে পারে।	৩। ক্ষমতার কোন রকমভেদ নেই।
৪। কাজের একক জুল।	৪। ক্ষমতার একক ওয়াট।
৫। কাজ পরিমাপে সময়ের প্রয়োজন হয় না।	৫। ক্ষমতার পরিমাপে সময়ের প্রয়োজন হয়।

৬.২৩ শক্তি ও ক্ষমতার মধ্যে পার্থক্য
Distinction between energy and power

শক্তি ও ক্ষমতার মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য রয়েছে ঃ

শক্তি	ক্ষমতা
১। কোন বস্তুর কাজ করার সামর্থ্য বা সক্ষমতাকে এর শক্তি বলে।	১। কোন বস্তুর কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে।
২। মোট কৃত কাজ দ্বারা শক্তি পরিমাপ করা হয়। তাই শক্তি নির্ণয়ে সময়ের প্রয়োজন হয় না।	২। একক সময়ের কাজ দ্বারা ক্ষমতা পরিমাপ করা হয়। তাই ক্ষমতা নির্ণয়ে সময়ের প্রয়োজন হয়।
৩। শক্তির রূপান্তর ঘটে।	৩। ক্ষমতার রূপান্তর নেই।
৪। শক্তির একক = কাজের একক = জুল।	৪। ক্ষমতার একক $=\dfrac{\text{কাজের একক}}{\text{সময়ের একক}}$ $=\dfrac{\text{জুল}}{\text{সেকেন্ড}}=$ (জুল/সেকেন্ড)
৫। শক্তির মাত্রা সমীকরণ = $[ML^2T^{-2}]$	৫। ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ = $\dfrac{[\text{কাজ}]}{[\text{সময়}]}=[ML^2T^{-3}]$

স্মরণিকা

কাজ ঃ কোন বস্তুর উপর বল প্রয়োগে সরণ ঘটলে প্রযুক্ত বল ও বলের অভিমুখে সরণের উপাংশের গুণফলকে কাজ বলে।

বলের দ্বারা কাজ ঃ যদি বল প্রয়োগের ফলে বলের দিকে বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ ঘটে বা বলের দিকে সরণের ধনাত্মক উপাংশ থাকে তবে ঐ সরণের জন্য কৃত কাজকে বলের দ্বারা কাজ বলে।

বলের বিরুদ্ধে কাজ ঃ যদি বল প্রয়োগের ফলে বলের বিপরীত দিকে বলের প্রয়োগ বিন্দুর সরণ ঘটে বা বলের দিকে সরণের ঋণাত্মক উপাংশ থাকে তবে ঐ সরণের জন্য কৃত কাজকে বলের বিরুদ্ধে কাজ বলে।

এক জুল ঃ এক নিউটন বল প্রয়োগের ফলে বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর বস্তুর সরণ যদি এক মিটার হয়, তবে যে কাজ সম্পন্ন হয় তাকে এক জুল বলে।

এক ইলেকট্রন ভোল্ট ঃ এক ভোল্ট বিভব পার্থক্যে একটি ইলেকট্রনের অর্জিত শক্তিই এক ইলেকট্রন ভোল্ট।

শক্তি ঃ কোন ব্যক্তি, বস্তু বা পদার্থের কাজ করার সামর্থ্য বা ক্ষমতাকে শক্তি বলে।

যান্ত্রিক শক্তি ঃ কোন বস্তুর মধ্যে তার পারিপার্শ্বিক অবস্থা বা অবস্থানের সাপেক্ষে অথবা গতির জন্য কাজ করার সামর্থ্য তথা শক্তি থাকে, তবে ঐ শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তি বলে।

গতিশক্তি ঃ গতিশীল অবস্থা থাকার ফলে কোন একটি বস্তু কাজ করার জন্য যে সামর্থ্য অর্জন করে তাকে ঐ বস্তুর গতিশক্তি বলে। অথবা, গতির জন্য বস্তুতে যে শক্তির উদ্ভব হয় তাকে তার গতিশক্তি বলে।

স্থিতিশক্তি ঃ নির্দিষ্ট অবস্থানে বা অবস্থায় স্থিতিশীল থাকার দরুন বস্তু যে শক্তি প্রাপ্ত হয় তাকে স্থিতিশক্তি বলে।

কাজ শক্তি উপপাদ্য ঃ কোন বস্তুর উপর ক্রিয়ারত লব্ধি বল কর্তৃক কৃত কাজ তার গতিশক্তির পরিবর্তনের সমান। এটি কাজ-শক্তি উপপাদ্য নামে পরিচিত।

যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র ঃ শক্তির সৃষ্টি বা বিনাশ নেই। এটি কেবল একরূপ হতে অন্য এক বা একাধিক রূপে পরিবর্তিত হতে পারে। রূপান্তরের আগে ও পরে মোট শক্তির পরিমাণ নির্দিষ্ট ও অপরিবর্তনীয়। একে শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণ সূত্র বলে।

কার্য বা কর্ম দক্ষতা ঃ কোন যন্ত্রের কর্মদক্ষতা বলতে কার্যরত শক্তি এবং প্রদত্ত মোট শক্তির অনুপাতকে বুঝায়।

সংরক্ষণশীল বল ঃ যে বল কোন বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে তাকে যে কোন পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে বল কর্তৃক কৃত কাজ শূন্য হয় তাকে সংরক্ষণশীল বল বলে।

অসংরক্ষণশীল বল ঃ যে বল কোন বস্তুর উপর ক্রিয়া করলে তাকে যে কোন পথে ঘুরিয়ে পুনরায় প্রাথমিক অবস্থানে আনলে ঐ বল কর্তৃক কৃতকাজ শূন্য হয় না তাকে অসংরক্ষণশীল বল বলে।

ক্ষমতা ঃ কোন একটি উৎসের কাজ করার হারকে ক্ষমতা বলে।

এক ওয়াট ঃ এক সেকেন্ডে এক জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক জুল / সে. বা এক ওয়াট বলে।

এক অশ্ব ক্ষমতা ঃ প্রতি সেকেন্ডে 746 জুল কাজ করার ক্ষমতাকে এক অশ্ব ক্ষমতা বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

কৃত কাজ, $W=$ বলের মান $\times$ বলের ক্রিয়া রেখা বরাবর সরণের মান $= F\times s$ (1)

$W=\vec{F}\times\vec{s}$ (2)

$W=Fs\cos\theta$ (θ হল F ও s এর মধ্যবর্তী কোণ) (3)

অভিকর্ষ বলের দরুন কৃত কাজ, $W=mgh$ (4)

ক্যালকুলাসের ভাষায় কৃত কাজ, $W = \int_{r_0}^{r} \vec{F} . d\vec{r}$ (5)

স্প্রিং প্রসারণে কৃত কাজ, $W = \frac{1}{2}kx^2$

= স্প্রিং-এ সঞ্চিত বিভব শক্তি (6)

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কৃত কাজ, $W = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ (7)

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (8)

গতিশক্তি ও ভরবেগের সম্পর্ক ঃ $E_k = \frac{P^2}{2m}$ (9)

কাজ শক্তি উপপাদ্য ঃ $W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ (10)

অভিকর্ষীয় স্থিতি বা বিভব শক্তি, $P.E = mgh$ (11)

স্প্রিং-এর বিভব শক্তি, $U = \frac{1}{2}kx^2$ (12)

কার্য বা কর্ম দক্ষতা, $\eta = \frac{\text{কার্যকর শক্তি}}{\text{প্রদত্ত মোট শক্তি}} = \frac{E_1 - E_2}{E_1}$

$= E_1\left(1 - \frac{E_2}{E_1}\right) \times 100\%$ (13)

ক্ষমতা, $P = \frac{\text{কাজ}}{\text{সময়}} = \frac{W}{t}$ (14)

$P = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{t}$ (15)

$P = \vec{F}\ \vec{v}$ (16)

দোলকের সর্বোচ্চ বেগ, $v_m = 2\sqrt{gl}\sin(\alpha/2)$ (17)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। 60 kg ভরের জনৈক ব্যক্তি 20 মিনিটে 180 m উচ্চ একটি চূড়ায় আরোহণ করেন। কৃত কাজ ও প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে অভিকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ,

W = বল × বলের ক্রিয়া রেখায় সরণ

= ওজন × উল্লম্ব সরণ

$= mg \times h$

নির্ণেয় কাজ, $W = 60\text{ kg} \times 9.8\text{ ms}^{-2} \times 180\text{ m}$

$= 10.584 \times 10^4\text{ J}$

এখানে, $m = 60\text{ kg}$, $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$, $h = 180\text{ m}$

প্রযুক্ত ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{10.584 \times 10^4\text{ J}}{20 \times 60\text{ s}}$

$= 88.2\text{ W}$

এখানে, t = 20 মিনিট $= 20 \times 60\text{ s}$

২। একটি ঘোড়া ভূমির সাথে 30° কোণে 120 N বল প্রয়োগে একটি বস্তুকে টেনে 2 ms⁻¹ সমবেগে সরাতে থাকে। 5 মিনিটে কত কাজ করে ? [cos 30° = 0.866]

আমরা পাই, $W = Fs\cos\theta$

$W = (120\text{N} \times 600\text{ m} \times \cos 30°)\text{ J}$

$= 120 \times 600 \times 0.866\text{ J}$

$= 6.2352 \times 10^4\text{ J}$।

এখানে, $F = 120\text{ N}$

$s = v \times t = 2\text{ ms}^{-1} \times 5 \times 60\text{ s} = 600\text{ m}$

$\theta = 30°$

৩। একটি ইঞ্জিন প্রতি ঘণ্টায় 37300 kg পানি 18 m উপরে উঠাতে পারে। ইঞ্জিনের ক্ষমতা নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী 1 ঘণ্টায় কৃত কাজ,

$W = mgh = 37300 \times 9.8 \times 18$ J

ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{37300 \times 9.8 \times 18}{60 \times 60}\text{ J/s}$

$= 1827.7\text{W}$

এখানে, $m = 37300\text{ kg}$, $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$, $h = 18\text{ m}$, t = 1 ঘণ্টা $= 60 \times 60$ s

৪। 1J গতিশক্তির একটি বস্তুর গতির বিপরীতে 1N বল প্রয়োগে বস্তুটি কত দূর অগ্রসর হয়ে থেমে যাবে ?

কাজ-শক্তি উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$\frac{1}{2}mv^2 = F \times s$$

বা, $$s = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{F}$$

$$= \frac{1\,J}{1\,N} = 1\,m$$

এখানে, $\frac{1}{2}mv^2 = 1\,J$

$F = 1N$

৫। দালানের ছাদের সাথে লাগানো 7·46 m লম্বা একটি মই দেয়ালের সাথে 60° কোণে আছে। 60 kg ভরের এক ব্যক্তি 15 kg ভরের একটি বোঝাসহ 30s-এ মই বেয়ে ছাদে উঠে। প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর।

অভিকর্ষীয় বলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ,

W = ওজন, mg × উল্লম্ব সরণ, h

∴ নির্ণেয় কাজ, $W = (60 + 15)\,kg \times 9{\cdot}8\,ms^{-2} \times 7{\cdot}46\,m\cos 60°\,J$

$= 75 \times 9{\cdot}8 \times 3{\cdot}73\,J$

ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{75 \times 9{\cdot}8 \times 3{\cdot}73\,J}{30\,s}$

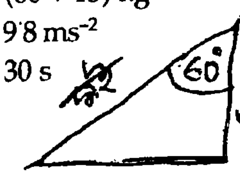
$= 91{\cdot}385\,W$

এখানে, $h = 7{\cdot}46\cos 60°$

$m = (60 + 15)\,kg$

$g = 9{\cdot}8\,ms^{-2}$

$t = 30\,s$



৬। একটি কণার উপর $\vec{F} = (5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})N$ বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})m$ সরণ হয়। বল দ্বারা সম্পাদিত কাজ কত ? [চ. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$W = \vec{F}.\vec{r}$

$= (5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}).(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

$= 5 \times 3 - 3 \times 2 - 2 \times 1 = 15 - 6 - 2 = 15 - 8$

$= 7\,J$

এখানে,

$\vec{F} = (5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})N$

$\vec{r} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})m$

৭। 150 kg ভরের এক ব্যক্তি 50 kg ভরের একটি বোঝা নিয়ে 4 m দীর্ঘ একটি সিঁড়ি বেয়ে নিচে নামল। যদি সিঁড়িটি দেয়ালের সাথে 60° কোণে থাকে তবে সে কত কাজ করল বের কর।

মনে করি, কাজ = W

আমরা পাই, $W = mgh$

বা, $W = Mg\,s\cos\theta$ (1)

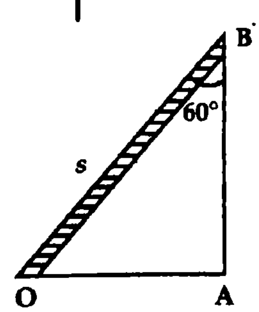
$W = 200 \times 9{\cdot}8 \times 2 = 3920\,J$

এখানে, $M = 150 + 50 = 200\,kg$

$g = 9{\cdot}8\,ms^{-2}$

$h = s\cos\theta$

$= 4 \times \frac{1}{2} = 2\,m$



চিত্র ৬·১৮

৮। একটি রাইফেলের গুলি নির্দিষ্ট পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারে। ঐরূপ 16টি তক্তা ভেদ করতে হলে এর বেগ কতগুণ হতে হবে ? [সি. বো. ২০০১]

মনে করি, গুলির ভর = m এবং আদি বেগ = v

1টি তক্তা ভেদ করতে প্রয়োজনীয় গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$ (1)

16টি তক্তা ভেদ করতে প্রয়োজনীয় গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 \times 16$

$= \frac{1}{2}m(4v)^2$ (2)

সমীকরণ দুটিকে তুলনা করলে দেখা যায় শেষ বেগ প্রাথমিক বেগের 4 গুণ

শেষোক্ত বেগ প্রাথমিক বেগের 4 গুণ হতে হবে।

P. √ **৯। একটি রাইফেলের গুলি একটি তক্তা ভেদ করে। যদি গুলীর বেগ তিনগুণ করা হয় তাহলে একই পুরুত্বের কয়টি তক্তা ভেদ করবে ?** [ব. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

কৃতকাজ = গতিশক্তির পরিবর্তন

১ম ক্ষেত্রে,

$max = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_1^2$

২য় ক্ষেত্রে,

$ma.nx = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0$

$= \frac{1}{2}m(3v_1)^2 = \frac{9}{2}mv_1^2$

অতএব, $\frac{ma.x}{ma.nx} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{9}{2}mv_1^2}$

বা, $\frac{1}{n} = \frac{1}{9}$ $n = 9$

তক্তার সংখ্যা 9টি।

$n = 9$ √

এখানে,

ধরি, গুলির ভর $= m$

1টি তক্তার পুরুত্ব $= x$

নির্ণেয় তক্তার সংখ্যা $= n$

nটি তক্তার পুরুত্ব $= nx$

প্রথমে গুলির বেগ $= v_1$

দ্বিতীয় গুলির বেগ $= v_2$

১০। 10 kg ভরবিশিষ্ট একটি বন্দুক ছুঁড়লে গুলিটি 80 cms^{-1} বেগে নির্গত হয়। গুলির ভর 40 gm হলে গুলি ও বন্দুকের গতিশক্তি নির্ণয় কর।

ধরা যাক, গুলির গতিশক্তি E_b এবং বন্দুকের গতিশক্তি E_g।

আমরা জানি,

গতিশক্তি $E = \frac{1}{2}mv^2$

গুলির গতিশক্তি, $E_b = \frac{1}{2}mv^2$

বা, $E_b = \frac{1}{2} \times 0.04 \times (0.8)^2$ J

$= 0.0128$ J

এখানে,

বন্দুকের ভর, M = 10 kg

গুলির ভর, m = 40gm = 0.04 kg

গুলির বেগ, v = 80 cms^{-1} = 0.80 ms^{-1}

ভরবেগের সংরক্ষণ নীতি হতে জানি,

গুলির ভরবেগ = বন্দুকের ভরবেগ

এখন, গুলির ভরবেগ = 0.04×0.8 kg ms^{-1}

ধরা যাক, বন্দুকের বেগ, V

অতএব, বন্দুকের ভরবেগ = $10 \times V$

সুতরাং, $10\ V = 0.04 \times 0.8$

বা $V = \frac{0.04 \times 0.8}{10} = 3.2 \times 10^{-3}$ ms^{-1}

বন্দুকের গতিশক্তি, $E_g = \frac{1}{2}MV^2$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times (3.2 \times 10^{-3})^2$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10.24 \times 10^{-6}$

$= 51 \times 10^{-6}$ J

P. √ **১১। একটি নিউট্রনের ভর 1.67×10^{-27} kg এবং এটি 4×10^4 ms^{-1} বেগে গতিশীল। এর গতিশক্তি নির্ণয় কর।** [ব. বো. ২০০২; রা. বো. ২০০১

আমরা জানি,

K. E. $= \frac{1}{2}mv^2$

K. E. $= \frac{1}{2} \times 1.6 \times 10^{-27} \times (4 \times 10^4)^2$

$= 1.28 \times 10^{-18}$ J

এখানে,

$m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg

$v = 4 \times 10^4$ ms^{-1}

১২। একজন বালক ও একজন লোক একত্রে দৌড়াচ্ছেন। বালকটির ভর লোকটির ভরের অর্ধেক এবং লোকটির গতিশক্তি বালকটির গতিশক্তির অর্ধেক। লোকটি যদি তার বেগ 1 ms⁻¹ বৃদ্ধি করেন তবে তার গতিশক্তি বালকটির গতিশক্তির সমান হয়। এদের আদিবেগ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৩; সি. বো. ২০০৩]

গতিশক্তির সমীকরণ থেকে পাই,

$KE_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$ (1)

এবং $KE_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m_1 v_2^2$

$= m_1 v_2^2$ (2)

এখানে, বালকের ভর $= m_1$
লোকের ভর, $m_2 = 2m_1$
বালকের আদিবেগ $= v_1 = ?$
লোকের আদিবেগ $= v_2 = ?$
লোকের শেষ বেগ $= v_2 + 1$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 2\, m_1 v_2^2$ (3)

এবং $\frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 = m_1 (v_2 + 1)^2$ (4)

সমীকরণ (3) ও (4) হতে পাই, $2m_1 v_2^2 = m_1 (v_2 + 1)^2$

বা, $2v_2^2 = v_2^2 + 2v_2 + 1$

বা, $v_2^2 - 2v_2 - 1 = 0$

$v_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

বেগ ধনাত্মক বলে, $v_2 = 1 + \sqrt{2} = 2.41 \text{ ms}^{-1}$

সমীকরণ (3) হতে পাই,

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 2\, m_1 v_2^2$

বা, $v_1^2 = 4 \times (2.41)^2$

বা, $v_1 = \sqrt{23.2324}$

$v_1 = 4.82 \text{ ms}^{-1}$

উত্তর : বালকের গতিবেগ 4.82 ms^{-1} এবং লোকের বেগ 2.41 ms^{-1}

১.√

১৩। 25 m উচ্চতা হতে 4 kg ভর মুক্তভাবে অভিকর্ষের টানে পড়তে থাকলে 2s পরে ভরটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি কত হবে ?

অভিকর্ষীয় বল কর্তৃক কৃত কাজ,

$W = $ ওজন, $mg \times$ উল্লম্ব সরণ, h

প্রশ্নানুযায়ী, 2 s পরে গতিশক্তি $= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \times 2gh$

$= mgh =$ অভিকর্ষীয় বল কর্তৃক কৃত কাজ

$= 4 \text{ kg} \times 9.8 \text{ ms}^{-2} \times 19.6 \text{ m} = 768.32 \text{ J}$

এখানে, $m = 4 \text{ kg}$
$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$
$t = 2 \text{ s}$
$h = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \text{ ms}^{-2} \times (2 \text{ s})^2$
$= 19.6 \text{ m}$

ও স্থিতিশক্তি $= mg \times$ ভূ-পৃষ্ঠ হতে উচ্চতা $= 4 \times 9.8(25 - 19.6) = 211.68 \text{ J}$

২.√

১৪। 200 gm ভরের একটি বস্তু 10 m উপর থেকে নিচে পড়ে যায়। ভূ-পৃষ্ঠকে স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি কত ? [ঢা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$v^2 = v_0^2 + 2gh$

বা, $v^2 = 0 + 2 \times 9.8 \times 10$

বা, $v^2 = 196$

আবার, $K.E. = \frac{1}{2}\, mv^2$

$= \frac{1}{2} \times 200 \times 10^{-3} \times 196 = 19.6 \text{ J}$

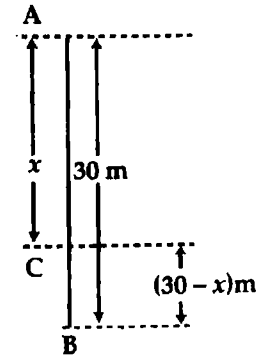
এখানে,
$m = 200 \text{ g}$
$= 200 \times 10^{-3} \text{ kg}$
$h = 10 \text{ m}$

$mgh = 200 \times 10^{-3} \times 9.8$

১৫। 30 m উচ্চতা থেকে একটি বস্তুকে বিনা বাধায় পড়তে দিলে কোথায় উহার গতিশক্তি বিভব শক্তির দ্বিগুণ হবে ? [য. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০৩]

এখানে,
$h = 30$ m
আদিবেগ, $v_0 = 0$
ত্বরণ $= g$

ধরি, 30 m উচ্চতা হতে x m নিচে এর গতিশক্তি বিভব শক্তির দ্বিগুণ হবে। ধরি C বিন্দুতে বেগ v।



চিত্র ৬.১৯

C বিন্দুতে অর্থাৎ, $(30 - x)$ m উচ্চতায় বিভব শক্তি,

$$E_1 = mg\,(30 - x) \quad (1)$$

এবং ঐ উচ্চতায় বস্তুর গতিশক্তি,

$$E_2 = \frac{1}{2}\, mv^2 \quad (2)$$

এখন, $v^2 = 0 + 2g\,x$;

$$v^2 = 2\,gx \quad (3)$$

v^2-এর মান সমীকরণ (2)-এ বসিয়ে,

$$E_2 = \frac{1}{2}\, m.\, 2gx = mgx$$

প্রশ্নমতে, $2E_1 = E_2$

বা, $2mg\,(30 - x) = mg\,x$

বা, $2\,mg \times 30 - 2mgx = mgx$ বা, $2mg \times 30 = 3\,mgx$

বা, $x = \frac{60}{3} = 20\,\text{m}$

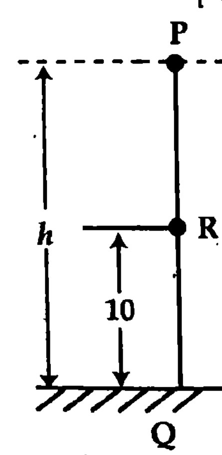
গতিশক্তি বিভব শক্তির দ্বিগুন হলে $h' = h/3$

$h' = \frac{30}{3} = 10$

∴ ভূমি হতে $(30 - 20) = 10$ m উচ্চতায় গতিশক্তি বিভব শক্তির দ্বিগুণ।

১৬। একটি বস্তুকে নির্দিষ্ট উচ্চতা থেকে ফেলে দেয়া হল। ভূমি হতে 10m উচ্চতায় গতিশক্তি বিভব শক্তির দ্বিগুণ হলে কত উচ্চতা থেকে বস্তুটি ফেলা হয়েছিল ? [য. বো. ২০০৬]

মনে করি, P বিন্দু হতে m ভরের বস্তুটিকে ফেলা হল এবং R বিন্দুতে বস্তুটির গতিশক্তি $= 2 \times$ বিভব শক্তি



চিত্র ৬.২০

R বিন্দুতে বিভব শক্তি, $E_p = mgx$

$$= mg \times 10 = 10\,mg \quad (1)$$

ধরা যাক, R বিন্দুতে বস্তুটির বেগ $= v$।

আমরা জানি, $v^2 = v_0{}^2 + 2gh$

বা, $v^2 = 2g\,(h - x)$ [$v_0 = 0$]

$$= 2g\,(h - 10)$$

R বিন্দুতে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\, m \times 2g\,(h - 10)$

$$= mg\,(h - 10)$$

প্রশ্নানুসারে, $mg\,(h - 10) = 2 \times 10\,mg = 20\,mg$ (2)

$h - 10 = 20$

বা, $h = 20 + 10 = 30$m

উত্তর : উচ্চতা, 30m.

১৭। 0.50 kg ভরের একটি বোমা ভূমি হতে 1 km উঁচুতে অবস্থিত একটি বিমান থেকে ফেলে দেয়া হল। ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি বের কর। [য. বো. ২০০৫]

এখানে,
$m = 0.50$ kg
$h = 1$ km $= 1000$ m
K.E $= ?$
$v_0 = 0$

আমরা পাই,

$$\text{K. E.} = \frac{1}{2} mv^2 \quad (1)$$

আবার,

$$v^2 = v_0{}^2 + 2gh = 2gh$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই,

$$\text{K.E.} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \times 2gh = mgh = 0.50 \times 9.8 \times 1000$$

$$= 4900\ \text{J}$$

$E_K = mgh$

BG & JEWEL

১৮। 5kg ভরের একটি বস্তু 5m উঁচু থেকে একটি পেরেকের উপর পড়লে পেরেকটি মাটির ভিতরে 10 cm ঢুকে যায়। মাটির গড় প্রতিরোধ বল নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৬]

এখানে,
বস্তুর ভর, $m = 5\text{ kg}$
উচ্চতা, $h = 5\text{ m}$
সরণ, $s = 10\text{ cm} = 0.1\text{ m}$
প্রতিরোধ বল, $F = ?$

আমরা জানি,
পতনশীল বস্তুর স্থিতিশক্তি = প্রতিরোধ বলের বিরুদ্ধে কাজ।

প্রতিরোধ বলের বিরুদ্ধে কাজ $= F \times s$

$$= F \times 0.1 \qquad (1)$$

বস্তুটির মোট পতন $= h + s = 5 + 0.1$

$$= 5.1\text{ m}$$

বস্তুর স্থিতিশক্তি $= mg(h + s)$

$$= 5 \times 9.8 \times 5.1$$

প্রশ্নানুসারে,

$$F \times 0.1 = 5 \times 9.8 \times 5.1$$

$$F = \frac{5 \times 9.8 \times 5.1}{0.1}$$

$$= 2499\text{N}$$

$Fs = mg(h+x)$

$Fx = mg(h+x)$

$\Rightarrow F = \dfrac{mg(h+x)}{x}$

উত্তর ঃ গড় প্রতিরোধ বল = 2499N.

১৯। 2 kg ভরের একটি বস্তুকে ভূমি হতে খাড়া ঊর্ধ্বে নিক্ষেপ করা হল এবং বস্তুটি 8 sec পরে পুনরায় ভূমিতে ফিরে এল। নিক্ষেপের মুহূর্তে এবং নিক্ষেপণের 2 sec পরে বস্তুটির বিভব শক্তি এবং গতিশক্তি কত? ($g = 9.8\text{ ms}^{-2}$) [চ. বো. ২০০২]

এখানে,
বস্তুর ভর, $m = 2\text{ kg}$
উড্ডয়নকাল, $T = 8\text{ sec}$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$

আমরা জানি, $T = \dfrac{2v_0}{g}$; v_0 হল নিক্ষেপের মুহূর্তে আদি বেগ

বা, $2v_0 = Tg$

বা, $v_0 = \dfrac{Tg}{2} = \dfrac{8 \times 9.8}{2}\text{ ms}^{-1}$

$= 39.2\text{ ms}^{-1}$

নিক্ষেপের মুহূর্তে, $h = 0$

বিভব শক্তি, $E_p = mgh = 2 \times 9.8 \times 0 = 0$

এবং গতিশক্তি $E_k = \dfrac{1}{2}mv_0^2$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times (39.2)^2\text{ J} = 1536.64\text{ J}$

2 sec পরে বেগ v এবং উচ্চতা h হলে আমরা পাই, $v = v_0 - gt = 39.2 - 9.8 \times 2 = 19.6\text{ ms}^{-1}$

এবং $h = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2 = 39.2 \times 2 - \dfrac{1}{2} \times 9.8 \times (2)^2$

বা, $h = 58.8\, m$

অতএব, বিভব শক্তি, $E_p = mgh = 2 \times 9.8 \times 58.8\text{ J} = 1152.48\text{ J}$

এবং গতিশক্তি, $E_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2} \times 2 \times (19.6)^2\text{ J} = 384.16\text{ J}$

উত্তর ঃ (i) নিক্ষেপের মুহূর্তে বিভব শক্তি 384.16 J, গতিশক্তি 1536.64 J

(ii) 2 sec পরে বিভব শক্তি 1152.48 J, গতিশক্তি 384.16 J

২০। 6 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু স্থির অবস্থায় ছিল। 30 N বল প্রয়োগ করায় 10s পর বস্তুটির গতিশক্তি কত হবে? [ঢা. বো. ২০০৫]

m $V_0 = 0$ F t

এখানে,
$m = 6\text{ kg}$
$v_0 = 0$
$F = 30\text{ N}$
$t = 10\text{ s}$
K. E. = ?

আমরা জানি,

$$\text{K. E.} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

এখানে, $v = v_0 + at$

$= 0 + at$

$$v = at \qquad (2)$$

পুনরায়, $F = ma$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\cancel{30}^{5}}{\cancel{6}} = 5\text{ ms}^{-2}$$

সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$v = at = 5 \times 10 = 50\ ms^{-1}$

সমীকরণ (1) থেকে পাই

$$K.E. = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 50 \times 50$$
$$= 3 \times 50 \times 50 = 3 \times 2500$$
$$= 7500\ J$$

২১। 0·5 kg ভরবিশিষ্ট কোন বস্তু একটি জাহাজের উপর হতে 8 m নিচে পড়ল। বস্তুটির (ক) প্রাথমিক স্থিতিশক্তি ; (খ) যে বেগে পানির পৃষ্ঠকে স্পর্শ করে ; (গ) এর সর্বোচ্চ গতিশক্তি এবং (ঘ) পানি পৃষ্ঠ হতে 3 m উপরে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর।

মনে করি বস্তুটি v বেগে পানি পৃষ্ঠ স্পর্শ করল।

(ক) আমরা জানি,

প্রাথমিক স্থিতিশক্তি, $E_p = mgh$
$= 0{\cdot}5 \times 9{\cdot}8 \times 8\ J$
$= 39{\cdot}2\ J$

এখানে,
বস্তুর ভর, $m = 0{\cdot}5\ kg$
উচ্চতা, $h = 8\ m$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
প্রাথমিক স্থিতিশক্তি, $E_p = ?$
সর্বোচ্চ গতিশক্তি, $E_k = ?$

(খ) আমরা জানি, স্থিতিশক্তি হ্রাস পেলে, সমপরিমাণ গতিশক্তির উদ্ভব হয়।

অতএব, $39{\cdot}2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 0{\cdot}5 \times v^2$

বা, $v^2 = \frac{39{\cdot}2 \times 2}{0{\cdot}5}$

বা, $v = \sqrt{\frac{39{\cdot}2 \times 2}{0{\cdot}5}} = 12{\cdot}52\ ms^{-1}$

(গ) সর্বোচ্চ গতিশক্তি = প্রাথমিক স্থিতিশক্তি

সর্বোচ্চ গতিশক্তি = $39{\cdot}2\ J$

(ঘ) এক্ষেত্রে স্থিতিশক্তি $= mgh_1 = 0{\cdot}5 \times 9{\cdot}8 \times 3\ J$
$= 14{\cdot}7\ J$

এখানে
উচ্চতা, $h = 3\ m$
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

গতিশক্তি = স্থিতিশক্তির হ্রাস
$= 39{\cdot}2 - 14{\cdot}7$
$= 24{\cdot}5\ J$

উত্তর : (ক) $39{\cdot}2\ J$, (খ) $12{\cdot}52\ ms^{-1}$, (গ) $39{\cdot}2\ J$, (ঘ) $24{\cdot}5\ J$

২২। 50 kg ভরের একটি বোমা ভূ-পৃষ্ঠ থেকে 1 km উঁচুতে অবস্থিত একটি বিমান থেকে ফেলে দেয়া হল। ভূমি স্পর্শ করার পূর্ব মুহূর্তে এর গতিশক্তি বের কর। [চ. বো. ২০০৩]

আমরা জানি, $v^2 = v_0^2 + 2gh$

বা, $v^2 = 0 + 2 \times 9{\cdot}8 \times 1000$

বা, $v^2 = 19600$

আবার, $K.E. = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 50 \times 19600 = 490000\ J$

এখানে,
$m = 50\ kg$
$h = 1\ km = 1000\ m$

$E_k = mgh$

২৩। 5×10^{-3} kg ভরের একটি ইস্পাতের বল 1 m উপর হতে একটি ইস্পাত খণ্ডের উপর অভিকর্ষের টানে পড়ে 0·8 m লাফিয়ে উপরে উঠে। ধাক্কার পূর্বে ও পরে বলটির গতিশক্তি নির্ণয় কর।

ধাক্কার পূর্ব মুহূর্তে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}m(v_0^2 + 2gh) = mgh$ [$v_0 = 0$]

$= 5 \times 10^{-3}\ kg \times 9{\cdot}8\ ms^{-2} \times 1\ m$

$= 0{\cdot}049 J$

এখানে, $m = 5 \times 10^{-3}\ kg$
$h = 1\ m$
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
$h' = 0{\cdot}8\ m$

ধাক্কার পর গতিশক্তি, $\frac{1}{2}m(v_0')^2 = \frac{1}{2}m \times 2gh'$ [$\because (v')^2 = v_0'^2 - 2gh = 0$]

$= mgh' = 5 \times 10^{-3}\ kg \times 9{\cdot}8\ ms^{-2} \times 0{\cdot}8\ m = 0{\cdot}0392\ J$

h = ভারকেন্দ্রের সরণ

২৪। একটি পানিপূর্ণ কুয়ার গভীরতা 12m এবং ব্যাস 1·8m। একটি পাম্প 24 মিনিটে কুয়াটিকে পানিশূন্য করতে পারে। পাম্পটির অশ্বক্ষমতা কত ? [ঢা. বো. ২০০৬]

প্রশ্নানুযায়ী, উত্থিত পানির ভর,

m = আয়তন × ঘনত্ব = $(\pi r^2 h) \times \rho$

$= 3.14 \times (0.9)^2 \times 12 \times 1000$

$= 30520.8$ kg

24 মিনিটে পাম্প কর্তৃক কৃত কাজ,

W = ওজন × ভারকেন্দ্রের উল্লম্ব সরণ

$= mg \times \left(\frac{h}{2}\right) = 30520.8 \times 9.8 \times \left(\frac{12}{2}\right)$

ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{30520.8 \times 9.8 \times 6}{24 \times 60}$

$= 1246.3$ Watt

$= 1.67$ H. P. [$\because$ 1 H. P. = 746 Watt]

এখানে,

কুয়ার গভীরতা, $h = 12$m

কুয়ার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1.8}{2}$ m $= 0.9$m

সময়, $t = 24$ min $= 24 \times 60$s

পানির ঘনত্ব, $\rho = 1000$ kg /m^3

$P = \frac{mgh}{t}$

$= \frac{\rho \pi r^2 h g h}{t}$

$h = \frac{h}{2}$

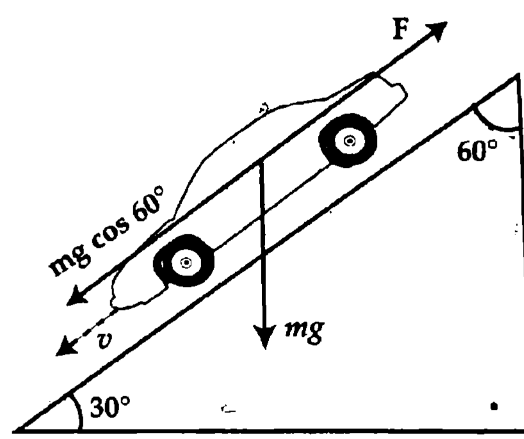
$= 6$m

২৫। 2000 kg ভরের একটি গাড়ি ভূমির সাথে 30° কোণে আনত একটি রাস্তা ধরে 16 ms^{-1} বেগে নিচে নামার সময় গাড়ির চালক ব্রেক প্রয়োগ করায় গাড়িটি 40m দূরত্ব অতিক্রম করার পর থেমে যায়। কি পরিমাণ গতি প্রতিরোধী বল গাড়ির উপর ক্রিয়া করে ?

প্রশ্নানুযায়ী অভিকর্ষীয় বল mg-এর তল বরাবর অংশক = $mg \cos 60°$। এর বিপরীতে গতিপ্রতিরোধী বল ক্রিয়া করে।

বলদ্বয়ের লব্ধি

$= F - mg \cos 60°$



চিত্র ৬·২১

কাজ শক্তি উপপাদ্য অনুযায়ী,

$\frac{1}{2} m v_0^2 = (F - mg \cos 60°) \times s$

$\frac{1}{2} \times 2000 \times (16)^2 = \left(F - 2000 \times 9.8 \times \frac{1}{2}\right) \times 40$

বা, $F = \frac{2000 \times (16)^2}{2 \times 40} + 2000 \times 9.8 \times \frac{1}{2}$

$= 16200$ N

এখানে, $m = 2000$ kg

$v_0 = 16$ ms^{-1}

$s = 40$ m

$g = 9.8$ ms^{-2}

২৬। 3430 W ক্ষমতাসম্পন্ন একটি মটর চালিত পাম্প দ্বারা একটি কূপ হতে গড়ে 7·20 m উচ্চতায় পানি উঠানো হয়। মটরের দক্ষতা 90% হলে প্রতি মিনিটে কত কিলোগ্রাম পানি ওঠে ? [ব. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)]

ধরি নির্ণেয় ভর = m kg

প্রশ্নানুযায়ী মটরের কার্যকর ক্ষমতা = $\eta \times P = \frac{90}{100} \times 3430$ W

$= 3087$ W

প্রতি মিনিটে প্রাপ্ত কাজ,

$W = mg \times h = (m \times 9.8) \times 7.20$ J

$\therefore$ কার্যকর ক্ষমতা, $P = \frac{W}{t} = \frac{m \times 9.8 \times 7.20}{60}$ W

শর্তানুযায়ী, $\frac{m \times 9.8 \times 7.20}{60} = 3087$

$m = \frac{3087 \times 60}{9.8 \times 7.20} = 2625$ kg

এখানে, $P = 3430$ W

$\eta = 90/100$

$g = 9.8$ ms^{-2}

$h = 7.20$ m

t = 1 মিনিট = 60 s

$\eta P = \frac{mgh}{t}$

$m = \frac{\eta P t}{gh}$

$\frac{mgh \times 100}{t}$

২৭। 100 মিটার গভীর একটি কূয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 1000 kg পানি উঠানো হয়। যদি ইঞ্জিনের ক্ষমতা 20% নষ্ট হয়, তাহলে এর অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৫]

$\eta P = \frac{mgh}{t}$

এখানে,

$P' = \frac{mgh}{t}$

$m = 100 \text{ kg}$

$g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$h = 100 \text{ m}$

$t = 1 \times 60 = 60 \text{ s}$

$\frac{mg}{n}$

এখানে, $P' = \frac{P \times 80}{100}$

$P = \frac{P' \times 100}{80}$

এক্ষেত্রে ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 20% নষ্ট হওয়াতে কার্যকর ক্ষমতা = 80%।

$P = \frac{mgh \times 100}{80 \times t}$

$= \frac{1000 \times 9{\cdot}8 \times 100 \times 100}{80 \times 60} = 2041{\cdot}6666 \text{ W}$

$= 27{\cdot}3682 \text{ H.P.} \quad [\because 1 \text{ H.P} = 746 \text{ W}]$

২৮। স্থিরাবস্থা থেকে 10 kg ভরবিশিষ্ট কোন বস্তু নির্দিষ্ট বলের ক্রিয়ার ফলে 2 s পর 15 ms^{-1} বেগ অর্জন করে। এর উপর কি পরিমাণ বল কাজ করছে এবং 4 s পর এর গতিশক্তি কত হবে ? [য. বো. ২০০১]

এখানে,

বস্তুর ভর, $m = 10 \text{ kg}$

বস্তুর আদিবেগ, $v_0 = 0$

বস্তুর শেষবেগ, $v = 15 \text{ ms}^{-1}$

সময়, $t = 2 \text{ sec}$

ত্বরণ, $a = ?$

বল, $F = ?$

$F = \frac{mv}{t}$

$E_k = \frac{1}{2} m$

আমরা জানি,

$F = ma \quad (1)$

এবং $v = v_0 + at \quad (2)$

সমীকরণ (2) হতে পাই,

$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{15 - 0}{2} \text{ ms}^{-2}$

$= 7{\cdot}5 \text{ ms}^{-2}$

সমীকরণ (1) হতে,

$F = ma = 10 \times 7{\cdot}5 \text{ N}$

$= 75 \text{ N}$

ধরা যাক 4 sec পরে বস্তুর বেগ v'

এখন $v' = v_0 + at'$

$= 0 + 7{\cdot}5 \times 4 = 30 \text{ ms}^{-1}$

সুতরাং, 4 s পরে গতিশক্তি,

$E_k = \frac{1}{2} mv'^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (30)^2 \text{ J}$

$= 4500 \text{ J}$

২৯। 270 kg ভরের একটি বোঝা একটি ক্রেনের সাহায্যে $0{\cdot}1 \text{ ms}^{-1}$ ধ্রুব বেগে উঠানো হল। ক্রেনের কত ক্ষমতা ব্যয় হয় ? [রা. বো. ২০০২]

এখানে,

ভর, $m = 270 \text{ kg}$

বেগ, $v = 0{\cdot}1 \text{ ms}^{-1}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

ক্ষমতা, $P = ?$

$P = Fv$

$P = \frac{W}{t} = \frac{F \times s}{t} = Fv$

$= mgv$

$= 270 \times 9{\cdot}8 \times 0{\cdot}1 \text{ W}$

$= 264{\cdot}6 \text{ W}$

৩০। কোন একটি স্থান হতে এক মিনিটে একটি ইঞ্জিন 100 kg ভরের একটি বস্তুকে 20 m উপরে তুলতে পারে। যদি ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 30% নষ্ট হয়, তবে ইঞ্জিনটির ক্ষমতা নির্ণয় কর।

এখানে, $M = 100 \text{ kg}$

$h = 20 \text{ m}$

$t = 1$ মিনিট $= 1 \times 60$

$= 60 \text{ s}$

$\eta P = mgh$

মনে করি, কাজ = W

আমরা পাই,

$W = mgh \quad (1)$

$W = 100 \times 9{\cdot}8 \times 20 \text{ J}$

কার্যকর ক্ষমতা = $\frac{W}{t} = \frac{100 \times 9{\cdot}8 \times 20}{60} \text{ J/s}$

$= \frac{100 \times 9{\cdot}8 \times 20}{60} \text{ Watt}$

প্রশ্নানুসারে ইঞ্জিনটির 30% ক্ষমতা নষ্ট হয়।

সুতরাং ইঞ্জিনটির ক্ষমতা P হলে, কার্যকর ক্ষমতা = $\frac{(100 - 30) \times P}{100} = \frac{70}{100} P$

BG & JEWEL

আমরা পাই,

$$\frac{70}{100}\times P = \frac{100\times 9.8\times 20}{60}$$

$$\text{বা, } P = \frac{100\times 100\times 9.8\times 20}{70\times 60}$$

$$= 466.667 \text{ Watt}$$

৩১। একটি কূয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 1000kg পানি 10m গড় উচ্চতায় উঠানো হয়। যদি ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 40% নষ্ট হয়, তাহলে এর অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৫]

আমরা জানি,

কার্যকর ক্ষমতা, $P' = \frac{P\times 60}{100}$

$$P = \frac{P'\times 100}{60}$$

এক্ষেত্রে ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 40% নষ্ট হওয়াতে কার্যকর ক্ষমতা = (100 — 40) % = 60%

$$P = \frac{mgh\times 100}{60\times t}$$

$$= \frac{1000\times 9.8\times 10\times 100}{60\times 60}$$

$$\text{বা, } P = 2.7222\times 10^3 \text{ watt}$$

$$\text{বা, } P = \frac{2.7222\times 10^3}{746} \text{H.P.}$$

$$= 3.65 \text{ H.P.}$$

$$\therefore P = 3.65 \text{ H.P.}$$

এখানে,

$P' = \frac{mgh}{t}$

$m = 1000$ kg

$g = 9.8$ ms^{-2}

$h = 10$ m

$t = 60$ s

$P = \frac{mgh}{t}$

৩২। 60kg ভরের একজন লোক প্রতিটি 15cm উঁচু 40টি সিঁড়ি 20s-এ উঠতে পারে। লোকটির অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর।

$F = mg$ $s = 40\times 15$ cm $= 6$ m t

মনে করি, কাজ = W

আমরা জানি,

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t}$$

$$= \frac{60\times 9.8\times 6}{20}$$

$$= 176.4 \text{ Watt}$$

$$\text{অশ্বক্ষমতা} = \frac{176.4}{746}$$

$$= 0.236 \text{ H. P.}$$

এখানে,

লোকটির ভর, $m = 60$kg

বল, $F = mg = 60\times 9.8$ N

সরণ = উচ্চতা = $40\times 15 = 600$ cm = 6m

সময় = $t = 20$s

ক্ষমতা, P = ?

৩৩। একটি মটর মিনিটে 5.5×10^5 kg পানি 100 m উপরে তুলতে পারে। মটরটির দক্ষতা 70% হলে এর ক্ষমতা নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০০]

কার্যকর ক্ষমতা,

$$P' = \frac{P\times 70}{100}$$

$$\text{বা, } P = \frac{P'\times 100}{70} = \boxed{\frac{mgh\times 100}{70\times t}}$$

$$= \frac{5.5\times 10^5\times 9.8\times 100\times 100}{70\times 60}$$

$$= 12833333 \text{ watt}$$

$$= 17202.86 \text{ H.P.}$$

এখানে,

$P' = \frac{mgh}{t}$

$m = 5.5\times 10^5$ kg

$g = 9.8$ ms^{-2}

$h = 100$ m

$t = 60$ s

P = ?

৩৪। একটি পাম্প ঘণ্টায় 25×10^6 kg পানি 50 m উঁচুতে তুলতে পারে। পাম্পের ক্ষমতার 70% কার্যকর হলে প্রকৃত ক্ষমতা নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

কার্যকর ক্ষমতা,

$$P' = P \times \frac{70}{100}$$

বা, $$P = \frac{P' \times 100}{70}$$

$$= \frac{mgh \times 100}{70 \times t}$$

$$= \frac{25 \times 10^6 \times 9.8 \times 50 \times 100}{70 \times 3600}$$

$$= 4.861 \times 10^6 \text{ Watt}$$

$$= 4.861 \times 10^3 \text{ kW}$$

এখানে,

$P' = \frac{mgh}{t}$

$m = 25 \times 10^6$ kg

$g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

$h = 50$ m

$t = 3600$ sec

$P = ?$

$$\frac{mgh \times 10}{n \times t}$$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন :

১। কাজ, শক্তি ও ক্ষমতার সংজ্ঞা দাও।
২। ভেক্টর ও সমাকলনের ব্যবহারে কাজের সংজ্ঞা দাও। [য. বো. ২০০৪]
৩। কাজ ও ক্ষমতার মাত্রা সমীকরণ লিখ।
৪। সংরক্ষণশীল বল কাকে বলে ? [চ. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০১]
৫। বলের দ্বারা কাজ এবং বলের বিরুদ্ধে কাজ বলতে কি বুঝ ? [য. বো. ২০০১; ঢা. বো. ২০০০]
৬। কোন যন্ত্রের ক্ষমতা 70% বলতে কি বুঝ ? [কু. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০২]
৭। ভেক্টর ও সমাকলনের ব্যবহারে কাজের সংজ্ঞা দাও। [সি. বো. ২০০৪]
৮। কাজ, শক্তি ও ক্ষমতার এককের নাম লিখ।
৯। কাজের একক কি ? এর সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২০০৫]
১০। বলের দ্বারা কাজ ও বলের বিরুদ্ধে কাজের মধ্যে পার্থক্য কর।
১১। গতিশক্তির সংজ্ঞা এবং উদাহরণ দাও।
১২। স্থিতি বা বিভব শক্তির সংজ্ঞা এবং উদাহরণ দাও। [ঢা. বো. ২০০৪]
১৩। গতিশক্তি এবং স্থিতিশক্তির রাশিমালা লিখ।
১৪। যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র বিবৃত কর। [কু. বো. ২০০০]
১৫। স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি এবং অভিকর্ষীয় বিভব শক্তির সংজ্ঞা দাও।
১৬। শক্তির রূপান্তর বলতে কি বুঝ ?
১৭। একটি স্প্রিং-এর প্রসারণে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০০২, ২০০১; কু. বো. ২০০২, ২০০০; য. বো. ২০০২]
১৮। শক্তির নিত্যতা সূত্র বিবৃত কর। [য. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০১; কু. বো. ২০০০, ২০০১]
১৯। কর্মদক্ষতার সংজ্ঞা দাও।
২০। কাজ ও ক্ষমতার মধ্যে পার্থক্য কর।
২১। কাজ-শক্তি উপপাদ্যটি বিবৃত কর। [চ. বো. ২০০৬; ব. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬, ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৫]
২২। উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও : সংরক্ষণশীল বল। [রা. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১; য. বো. ২০০১]
অসংরক্ষণশীল বল । [ব. বো. ২০০৬, ২০০৩; সি. বো. ২০০৪; রা. বো., কু. বো. ২০০১; ঢা. বো. ২০০৪]
২৩। সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বলের মধ্যে পার্থক্য কর। [ব. বো. ২০০৪]
২৪। ক্ষমতার সংজ্ঞা দাও। ওয়াট ও কিলোওয়াটের সংজ্ঞা দাও।
২৫। শক্তি ও ক্ষমতার মধ্যে পার্থক্য কর।
২৬। (ক) একটি লোক স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে তীর অনুযায়ী স্থির রইল। সে কি কোন কাজ করছে ?
(খ) সে যদি দাঁড় টানা বন্ধ করে স্রোতের অনুকূলে চলতে থাকে, তবে তার উপর কোন কাজ সাধিত হল কি?
২৭। কোন বিদ্যুৎ কেন্দ্রের ক্ষমতা 10 মেগাওয়াট — অর্থ কি ?
২৮। শক্তির অপচয় কি ? [কু. বো. ২০০৫]

রচনামূলক প্রশ্ন :

১। কাজ-শক্তি উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং ধ্রুব বলের জন্য তা প্রমাণ কর। [ব. বো. ২০০৫]
২। কাজ, শক্তি ও ক্ষমতার সংজ্ঞা দাও এবং এদের এস. আই. এককের নাম উল্লেখ কর।
৩। বলের দ্বারা কাজ এবং বলের বিরুদ্ধে কাজ বলতে কি বুঝ ? উদাহরণ দ্বারা বুঝিয়ে দাও।
[ঢা. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০০; য. বো. ২০০১]
৪। ধ্রুব বল কর্তৃক কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ [ঢা. বো. ২০০৪]

৫। পরিবর্তনশীল বল বলতে কি বুঝ ? পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কাজের পরিমাপের রাশিমালা বের কর।

৬। দেখাও যে পরিবর্তনশীল বল কর্তৃক কাজের পরিমাণ $W = \frac{1}{2}kx^2$।

৭। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলতে কি বুঝ ? প্রমাণ কর যে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কৃত কাজের পরিমাণ $W = -GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$

৮। যান্ত্রিক শক্তি কাকে বলে ? এটা কত প্রকার ও কি কি ?

৯। গতিশক্তির সংজ্ঞা দাও। m ভরের কোন বস্তু v বেগে চললে তার গতি শক্তি $K.E = \frac{1}{2}mv^2$

১০। বস্তুর গতিশক্তি ও ভরবেগের মধ্যে সম্পর্কযুক্ত সমীকরণটি প্রতিপাদন কর। [ঢা. বো. ২০০২]

১১। স্থিতিশক্তির সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে অভিকর্ষীয় স্থিতিশক্তি $P.E. = mgh$; এখানে সংকেতগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।

১২। শক্তির নিত্যতা সূত্র বিবৃত কর। [কু. বো. ২০০৫] অভিকর্ষ বলের প্রভাবে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে এই সূত্রটি প্রমাণ কর। [সি. বো. ২০০১]

১৩। বল সরণ লেখচিত্র থেকে পরিবর্তনশীল বল দ্বারা কৃত কাজের সমীকরণ প্রতিষ্ঠা কর। [রা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০২]

১৪। অসংরক্ষণশীল বল কর্তৃক কৃত কাজের রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [চ. বো. ২০০৪]

১৫। প্রমাণ কর যে, বল প্রয়োগের দ্বারা কোন বস্তুর বেগ পরিবর্তন হলে বস্তুর গতিশক্তির পরিবর্তন বলের দ্বারা কৃত কাজের সমান। [রা. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]

১৬। গতিশক্তি ও বিভব শক্তির পার্থক্য লেখ। [কু. বো. ২০০৩]

১৭। দেখাও যে, নির্দিষ্ট ভরের কোন বস্তুর গতিশক্তি তার বেগের বর্গের সমানুপাতিক। [ব. বো. ২০০৩]

১৮। একটি স্প্রিং-এর সংকোচন বা সম্প্রসারণের ক্ষেত্রে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০০ ; কু. বো. ২০০২]

১৯। একটি স্প্রিং-এর সংকোচন বা সম্প্রসারণের জন্য সঞ্চিত বিভব শক্তির রাশি প্রকাশ কর। [ব. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১]

২০। একটি তারকে বল প্রয়োগে সম্প্রসারিত করলে এর একক আয়তনে সঞ্চিত শক্তির স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তির রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [য. বো. ২০০০]

২১। সরল দোলকের ক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতার সূত্র প্রমাণ কর। [য. বো. ২০০৫]

২২। সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কোন কণার ক্ষেত্রে দেখাও যে এর সর্বাধিক বিভব শক্তির মান $\frac{1}{2}kx^2$ [প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত।] [সি. বো. ২০০৫]

২৩। কাজ-শক্তি উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর। [ব. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০২, ২০০০; ঢা. বো. ২০০০; রা. বো. ২০০০; য. বো. ২০০০; চ. বো. ২০০১]

২৪। উদাহরণসহ সংরক্ষণশীল ও অসংরক্ষণশীল বলের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে অভিকর্ষ বল সংরক্ষণশীল বল। [সি. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০১; কু. বো. ২০০১]

২৫। সংরক্ষণশীল বল ও অসংরক্ষণশীল বলের সংজ্ঞা দাও এবং এদের মধ্যে পার্থক্য কর। [সি. বো. ২০০৬, ২০০২]

২৬। ক্ষমতার সংজ্ঞা দাও। এর রাশিমালা এবং মাত্রা সমীকরণ বের কর।

২৭। ক্ষমতা কি ? শক্তি ও ক্ষমতার মধ্যে পার্থক্য কর।

২৮। বিভব শক্তি কাকে বলে ? অভিকর্ষীয় বিভব শক্তির রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [চ. বো. ২০০০]

গাণিতিক সমস্যাবলি :

১। 200 N-এর বল প্রয়োগ করে কোন বস্তুকে বলের অভিমুখে 300 m সরানো হল কত কাজ সম্পন্ন হবে বের কর। [উঃ 6×10^4 J]

২। একটি বরফ খণ্ডকে দড়ির সাহায্যে মসৃণ অনুভূমিক তলের উপর 5m দূরত্ব টেনে আনা হল। দড়ির টান 10N এবং দড়িটি উক্ত তলের সাথে 30° কোণ করে থাকলে কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [উত্তর : 43·3 J]

৩। 250 N ওজনের একজন বালক খাড়া মই বেয়ে শীর্ষে উঠতে 2000 J কাজ সম্পন্ন করে। মইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উঃ 8 m]

৪। 746 W ক্ষমতার একটি পাম্প প্রতি মিনিটে কি পরিমাণ পানি 10 m উচ্চতায় উপরে উঠাতে পারবে ? [উঃ 456·7 kg]

৫। 5 W-এ 2 ঘণ্টায় কি পরিমাণ শক্তি ব্যয় হবে ? [উঃ 36000 J]

৬। একটি ক্রেন 3·73 kW ক্ষমতা প্রয়োগে 746 N ওজনের একটি লৌহ খণ্ডকে কত গড় বেগে খাড়া উপরে তুলতে পারবে ? [উঃ 5 ms^{-1}]

৭। 3·6 kg ভরের একটি বন্দুক হতে 365 J গতিশক্তি উৎপন্ন করে 0·05 kg ভরের একটি বুলেট কত বেগে নিক্ষিপ্ত হবে ? [উঃ 120 ms^{-1}]

৮। 500g ভরবিশিষ্ট কোন বস্তু একটি জাহাজের উপর হতে 10m নিচে পানিতে পড়ল। (i) বস্তুটির প্রাথমিক স্থিতিশক্তি ; (ii) বস্তুটির সর্বোচ্চ গতিশক্তি ; (iii) বস্তুটি যে বেগ নিয়ে পানির তলকে স্পর্শ করে এবং (iv) পানি হতে 3 মিটার উপরে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় কর। [উত্তর : (i) 49 J ; (ii) 49 J ; (iii) 1·4 ms^{-1} ; (iv) 34·3 J]

৯। একটি বালক 5 সেকেন্ডে 100 পাউন্ডের একটি বোঝা 9 ইঞ্চি উঁচু ধাপের 20 ধাপ উপরে তুলল। তার অশ্ব ক্ষমতা বের কর। [উঃ 0·54 HP]

১০। একটি সরল দোলকের ববের ভর 0·2 kg ও কার্যকরী দৈর্ঘ্য 1·2 m। উল্লম্ব রেখা হতে 0·2 m দূরে টেনে ছেড়ে দিলে গতিপথের সর্বনিম্ন বিন্দু অতিক্রমের সময় ববের গতিশক্তি এবং বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 0·0392 J ; 0·626 ms^{-1}]

১১। 70 kg ভরের একজন লোক প্রতিটি 15 cm উঁচু 30টি সিঁড়ি 20 s-এ উঠতে পারেন। লোকটির ক্ষমতা কত? [উঃ 154·35 W]

১২। একটি ক্রেন কত বেগে 1492 N ওজনের একটি লৌহ খণ্ডকে খাড়া উপরে তুলতে পারবে ? [ক্রেনটির ক্ষমতা 7·46 kW] [উঃ 5 ms^{-1}]

১৩। 12 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু স্থিরাবস্থায় ছিল। 60 N বল প্রয়োগ করার 15 সেকেন্ড পর বস্তুটির গতিশক্তি কত হবে ? [উঃ 33·75 kJ]

১৪। একটি রাইফেলের গুলি নির্দিষ্ট পুরুত্বের একটি তক্তা ভেদ করতে পারে। বেগ দ্বিগুণ হলে অনুরূপ কতটি তক্তা ভেদ করতে পারবে ? [উঃ 4টি]

১৫। 5 kg ভরের একটি বস্তুকে 9·8 ms^{-1} বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষিপ্ত হল। অর্ধ সেকেন্ড ও এক সেকেন্ড পরে গতিশক্তি কত হবে ? $v = 9.8 - (9.8 \times .5) = 4.9$; $\frac{1}{2}mv^2 = 60$ J [উঃ 60 J ও 0]

১৬। 300 m উঁচু হতে একটি বস্তু অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে নিচে পড়লে কোথায় তার গতিশক্তি স্থিতিশক্তির অর্ধেক হবে ? [ঢা. বো. ২০০৬] [উঃ 100m নিচে]

১৭। 50m উচ্চতা থেকে একটি বস্তুকে বিনা বাধায় পড়তে দিলে কত উচ্চতায় উহার গতিশক্তি বিভব শক্তির তিনগুণ হবে ? $\frac{h}{n+1} = \frac{50}{4}$ [উত্তর ঃ 12·5 m]

১৮। 10 kg ভরের একটি বস্তুর গতিশক্তি 80J হলে ভরবেগ নির্ণয় কর। [উঃ 40 kg ms^{-1}]

১৯। বেগ কত হলে 20kg ভরের একটি বস্তুর গতিশক্তি 20J হবে ? [উঃ 1·41 ms^{-1}]

২০। একটি গাড়ি কত উচ্চতা হতে অভিকর্ষের টানে তার অর্জিত গতিশক্তি প্রতি ঘণ্টায় 176·4 km বেগে চলাকালীন গতিশক্তির সমান হবে ? [উঃ 122·5 m]

২১। 0·1 kg ভরের একটি বস্তুর ভরবেগ 0·02 kg ms^{-1}। গতিশক্তি নির্ণয় কর। [উঃ 2×10^{-3} J]

২২। দেখাও যে, অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত ভরের একটি বস্তুর t-তম সেকেন্ডে হারানো স্থিতিশক্তি বা অর্জিত গতিশক্তি $\frac{1}{2}mg^2(2t-1)$-এর সমান।

২৩। 10 kg ভরের একটি কণার বেগ ms^{-1}-এ $(7\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$ হলে এর গতিশক্তি কত হবে? [উঃ 550 J]

২৪। 2 kg ভরের একটি বস্তু 5 m উঁচু হতে মাটিতে পড়ে। এতে অভিকর্ষ বল বস্তুর উপর কত কাজ করে ও বস্তুটি কত স্থিতিশক্তি হারায় ? [উঃ 98 J ও 98 J]

২৫। 2 kg ভরের একটি বস্তু কত উচ্চতা হতে অভিকর্ষের টানে পড়ে মাটিতে আঘাত করার পূর্ব মুহূর্তে 2401 J গতিশক্তি লাভ করে ? [উঃ 122·5 m]

২৬। 2 kg ভরের একটি হাতুড়ি দেয়ালের সাথে অভিলম্বভাবে রক্ষিত একটি পেরেককে কত বেগে অনুভূমিকভাবে আঘাত করলে পেরেকটি 640 N বল প্রতিরোধ করে দেয়ালের ভিতর 0·025 m ঢুকে যাবে? [উঃ 4 ms^{-1}]

২৭। 1 kg ভরের একটি হাতুড়ি অনুভূমিক কাঠের উপর উল্লম্বভাবে রক্ষিত একটি পেরেককে খাড়া নিচের দিকে 0·8 m/s বেগে আঘাত করায় পেরেকটি কাঠের মধ্যে 0·02 m ঢুকে যায়। গড় বাঁধা বল নির্ণয় কর। [$g = 9·8\ ms^{-2}$] [উঃ 25·8 N]

$F = m(g+a) = 1\left(9.8 + \frac{v^2}{2s}\right) = 25.8$ ~~উত্তর ঃ 12·5 m~~

২৮। 40 kg ভরের একটি ট্রলি 180J গতিশক্তিসহ একটি মসৃণ অনুভূমিক রাস্তায় চলাকালে এর মধ্যে 20 kg ভরের একটি বস্তু খাড়াভাবে নামিয়ে দিলে মোট গতি শক্তি কত হবে ? [উঃ 120 J]

২৯। 900 kg ভরের একটি লিফট 350 kg ভরের বোঝাসহ 100 s-এ নিচতলা হতে 18 তলায় 75 m উপরে উঠে। কৃত কাজ ও প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উঃ $9·18 \times 10^5$ J ও 9·18 kW]

৩০। 80% দক্ষতাসম্পন্ন একটি মটর একটি ক্রেন নিয়ন্ত্রণ করে যার দক্ষতা 50%। মটরটি 3·73 kW ক্ষমতা প্রয়োগ করলে ক্রেনে 746 N ওজনের একটি বস্তুর উর্ধ্বমুখী গড়বেগ কত হবে ? $P = FV \Rightarrow v = P/F = 2$ [উঃ 2 ms^{-1}]

৩১। একটি কূপ হতে প্রতি 9·8 মিনিটে 7460 kg পানি 21 m গড় উচ্চতায় উপরে উঠানোর জন্য একটি ইঞ্জিন ব্যবহৃত হল। ইঞ্জিনের দক্ষতার 70% কার্যকর হলে প্রযুক্ত ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উঃ 3·73 kW]

৩২। 144 kg ভরের এক ব্যক্তি 65 kg ভরের একটি বোঝা নিয়ে 2 m দীর্ঘ একটি সিঁড়ি বেয়ে 2 min-এ উপরে ওঠে। যদি সিঁড়িটি অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে আনত থাকে, তবে ঐ ব্যক্তির ক্ষমতা নির্ণয় কর। ~~উঃ 16·33 Watt~~

৩৩। 150 kg ভরের এক ব্যক্তি 50 kg ভরের একটি বোঝা নিয়ে 4 m দীর্ঘ একটি সিঁড়ি বেয়ে 20 s-এ নিচে নামল। যদি সিঁড়িটি দেওয়ালের সাথে 60° কোণে থাকে, তবে লোকটির ক্ষমতা নির্ণয় কর। $P = \frac{mg\cos\theta}{t}$ [উঃ 196 Watt]

৩৪। কোন একটি স্থান হতে এক মিনিটে একটি ইঞ্জিনে 100kg ভরের একটি বস্তুকে 20m উপরে তুলতে পারে। যদি ইঞ্জিনের ক্ষমতা 30% নষ্ট হয়, তবে ইঞ্জিনটির ক্ষমতা নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 466·67 Watt]

৩৫। 100 m গভীর একটি কূয়া থেকে ইঞ্জিনের সাহায্যে প্রতি মিনিটে 1000kg পানি উঠানো হয়। যদি ইঞ্জিনটির ক্ষমতা 42% নষ্ট হয়। তাহলে এর অশ্বক্ষমতা নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০১] [উত্তর ঃ 37·75 H. P.]

৩৬। কোন কূয়া থেকে 20m উপরে পানি তোলার জন্য 6kW এর একটি পাম্প ব্যবহার করা হচ্ছে। পাম্পের দক্ষতা 82·2% হলে প্রতি মিনিটে কত লিটার পানি তোলা যাবে ? [ব. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 1620 লিটার]

৩৭। একটি পানিপূর্ণ কূয়ার গভীরতা 7·2m ও ব্যাস 4m। 31·4 মিনিটে কূয়াটিকে পানিশূন্য করতে পারে এরূপ একটি বৈদ্যুতিক পাম্পের ক্ষমতা নির্ণয় কর। $P = \frac{\rho \pi r^2 h g h}{}$ [উত্তর ঃ 1693·44 W]

৭
মহাকর্ষ
GRAVITATION

৭.১ সূচনা
Introduction

গ্রহ-নক্ষত্রের প্রকৃতি, স্বরুপ, গতিবিধি ইত্যাদি সম্পর্কে প্রাচীনকাল থেকেই বিজ্ঞানীদের অপরিসীম কৌতূহল ছিল। বিখ্যাত জ্যোতির্বিদ টাইকো ব্রে (Tycho Brahe), জোহান্স কেপলার (Johannes Kepler) গ্রহ, নক্ষত্রের গতিবিধি সম্পর্কে উল্লেখযোগ্য অবদান রাখেন। কেপলার প্রথম উপলব্ধি করেন যে গ্রহগুলো কোন এক বলের প্রভাবে সূর্যকে কেন্দ্র করে অবিরত ঘুরছে। কিন্তু কি ধরনের বল ক্রিয়াশীল তা সঠিকভাবে বোঝাতে সমর্থ হননি। 1681 খ্রিস্টাব্দে মহাবিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন (Sir Isaac Newton) প্রথম "মহাকর্ষ সূত্র' আবিষ্কার করে এ সমস্যার সমাধান করেন। কথিত আছে, নিউটন তাঁর গৃহ-সংলগ্ন বাগানে একটি আপেল গাছের নিচে বসে বই পড়ছিলেন। এমন সময় একটি আপেল তাঁর নিকটে মাটিতে পড়ে। তিনি ভাবলেন গাছের উপরে ফাঁকা, নিচে ফাঁকা, ডানে ফাঁকা এবং বামেও ফাঁকা। আপেল ফল মাটিতে পড়ল কেন ? এই 'কেন' এর উদ্‌ঘাটন করতে গিয়ে তিনি **মহাকর্ষ** (Gravitation) এবং **অভিকর্ষ** (Gravity) আবিষ্কার করেন এবং সূর্যের চারদিকে গ্রহ-উপগ্রহের আবর্তনের কারণ ব্যাখ্যা করেন। এ অধ্যায়ে আমরা মহাকর্ষ, অভিকর্ষ, নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র, অভিকর্ষজ ত্বরণ, মুক্তি বেগ, কেপলারের সূত্র, গ্রহের গতি ইত্যাদি আলোচনা করব।

৭.২ মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ
Gravitation and gravity

বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজাক নিউটন আবিষ্কার করেন যে এ মহাবিশ্বের যে কোন দুটি বস্তু বা বস্তু কণার মধ্যে একটি পারস্পরিক আকর্ষণ রয়েছে। দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার এই পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে কখনও মহাকর্ষ আবার কখনও অভিকর্ষ বলা হয়। এ দুটি বলের মধ্যে পার্থক্য রয়েছে। তাহলে প্রশ্ন জাগে **মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ কি ?** এদের সংজ্ঞা নিম্নে দেয়া হল ঃ

মহাকর্ষ ঃ "নভোমণ্ডলে অবস্থিত দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে।"

অভিকর্ষ ঃ "পৃথিবী এবং অন্য একটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ বলে।"

উদাহরণ ঃ সূর্য এবং চন্দ্রের মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলের নাম মহাকর্ষ, অপর পক্ষে পৃথিবী ও চন্দ্রের মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলই অভিকর্ষ। আরও সোজা ভাষায় বলা যায় পৃথিবী এবং আম গাছের একটি আমের মধ্যকার যে আকর্ষণ বল তা অভিকর্ষ। কিন্তু একই আম গাছের দুটি আমের মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলের নাম মহাকর্ষ।

৭.৩ নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র
Newton's law of gravitation

1687 খ্রিস্টাব্দে বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন আপেল পতন এবং গ্রহ-উপগ্রহের গতি পর্যবেক্ষণ করে মহাকর্ষের যে সূত্র আবিষ্কার করেন তা নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় ঃ

"মহাবিশ্বের যে কোন দুটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক, তাদের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক এবং বস্তু দুটির সংযোগকারী সরলরেখা বরাবর ক্রিয়াশীল।"

ব্যাখ্যা ঃ নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র বিশ্লেষণ করলে দেখা যাবে এই সূত্রে তিনটি অংশ রয়েছে। দুটি অংশ বলের পরিমাণ নির্দেশ করে আর একটি অংশ বলের প্রকৃতি সম্বন্ধীয়।

বলের পরিমাপ ঃ মনে করি দুটি বস্তুকণার ভর যথাক্রমে m_1 ও m_2 এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব d [চিত্র ৭.১]। যদি তাদের মধ্যে আকর্ষণ বল F হয়, তবে মহাকর্ষ সূত্র অনুসারে

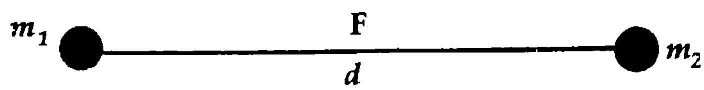
(i) $F \propto m_1 \times m_2$ [যখন $d =$ ধ্রুবক]

(ii) $F \propto \dfrac{1}{d^2}$ [যখন m_1 ও m_2 ধ্রুবক]

(i) ও (ii)-কে যুক্ত করে পাই,

$$F \propto \frac{m_1 m_2}{d^2}$$ [যখন m_1, m_2 ও d সকল রাশিই পরিবর্তনশীল]

$$\text{বা, } F = \text{ধ্রুবক}\,\frac{m_1 m_2}{d^2}$$



চিত্র ৭.১

$$\text{বা, } \boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}} \qquad (1)$$

এখানে, G একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। এই ধ্রুবককে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (Gravitational constant) বা বিশ্বজনীন মহাকর্ষীয় ধ্রুবক (Universal gravitational constant) বলা হয়। G-কে বিশ্বজনীন ধ্রুবক বলা হয় কারণ G-এর মান বস্তুকণা দুটির মধ্যবর্তী মাধ্যমের প্রকৃতির ওপর যেমন—**প্রবেশ্যতা** (permeability), **প্রবণতা** (susceptibility), **দিকদর্শিতা** (directivity) এবং বস্তুকণা দুটির **ভৌত অবস্থার** উপর নির্ভর করে না।

বলের প্রকৃতি ঃ মহাকর্ষ বল দুটি বস্তুর মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বল। দুটি চার্জিত বস্তু কিংবা দুটি চুম্বক পরস্পরকে আকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি বিপরীতধর্মী অর্থাৎ একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয় এবং বিকর্ষণ করে যখন চার্জ দুটি সমধর্মী হয়। চুম্বকের ক্ষেত্রে আকর্ষণ হয় যখন চুম্বকদ্বয়ের বিপরীত মেরু কাছাকাছি আসে এবং বিকর্ষণ করে যখন মেরুদ্বয় সমধর্মী হয়। কিন্তু মহাকর্ষ শুধুমাত্র আকর্ষণ বল। মহাকর্ষ বল বস্তু দুটির সংযোগ সরলরেখা বরাবর ক্রিয়া করে। এছাড়া মহাকর্ষ বল মাধ্যমের উপর নির্ভর করে না। মাধ্যম যাই হোক না এই বলের কোন পরিবর্তন হয় না।

মহাকর্ষ সূত্রের ভেক্টর রূপ ঃ

মহাকর্ষ সূত্রকে ভেক্টর রাশির দ্বারা নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায় ঃ

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}}$$

এখানে $\vec{F}_{21}$ হচ্ছে দ্বিতীয় বস্তুর উপর প্রথম বস্তুর সদিক বল (আকর্ষণ), $\vec{r}_{12}$ হচ্ছে প্রথম বস্তু হতে দ্বিতীয় বস্তুর সদিক দূরত্ব।

যেহেতু প্রথম বস্তু আকর্ষণ করে দ্বিতীয় বস্তুকে নিজের দিকে টানছে অর্থাৎ $\vec{F}_{21}$ এবং দিক $\vec{r}_{12}$ এর বিপরীত, সুতরাং উপরোক্ত সমীকরণে ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে। কিন্তু মহাকর্ষ বলের মান সূচক। সুতরাং ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়নি।

৭.৩ মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের সংজ্ঞা, একক এবং মাত্রা

Definition, unit and dimension of gravitational constant

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$G = \frac{F \times d^2}{m_1 m_2}$$

মনে করি দুটি বস্তুকণার প্রত্যেকটির ভর এক একক এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্বও এক একক অর্থাৎ $m_1 = 1$ একক, $m_2 = 1$ একক এবং $d = 1$ একক।

$$G = \frac{F \times 1^2}{1 \times 1} = F \qquad (2)$$

সুতরাং, মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের সংজ্ঞা হিসেবে বলা যায়— **"একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণা একক দূরত্বে থেকে যে পরিমাণ বল দ্বারা পরস্পরকে আকর্ষণ করে তার সংখ্যাগত মানকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে।"**

যদি বলা হয় "$G = 6.67 \times 10^{-11}$ এস. আই. একক"— **এর অর্থ এই যে, দুটি বস্তুকণার প্রত্যেকটির ভর 1 কিলোগ্রাম এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব 1 মিটার হলে তারা পরস্পরকে 6.67×10^{-11} নিউটন বল দ্বারা আকর্ষণ করবে।**

একক : এস. আই. পদ্ধতিতে F-এর একক নিউটন, d-এর একক মিটার এবং m-এর একক কিলোগ্রাম। তা হলে উপরের সমীকরণ (2)-এ বিভিন্ন রাশির একক বসালে, এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে G-এর একক নিউটন-মিটার^2/কিলোগ্রাম^2 (N-m^2. kg^{-2})।

মাত্রা সমীকরণ :

সমীকরণ (1) অনুসারে G-এর মাত্রা সমীকরণ,

$$\boxed{[G] = \frac{[F \times d^2]}{[m_1 \times m_2]} = \frac{[MLT^{-2} \times L^2]}{[M \times M]} = \left[\frac{ML^3T^{-2}}{M^2}\right] = [M^{-1}T^{-2}L^3]}$$

৭.৪ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক কি বিশ্বজনীন?

Is gravitational constant universal ?

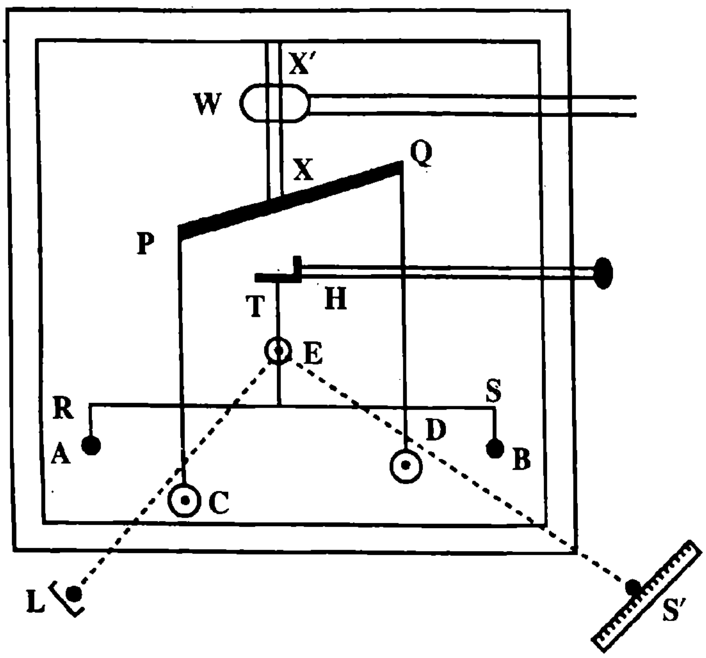
G-কে বিশ্বজনীন বা সর্বজনীন ধ্রুবক বলা হয়। কারণ G-এর মান বস্তুকণা দুটির মধ্যবর্তী মাধ্যমের উপর কিংবা বস্তুকণা দুটির ভৌত অবস্থার উপর নির্ভর করে না। পদার্থবিজ্ঞানে অনেক ধ্রুবক রয়েছে যাদের কোনটি মাধ্যমের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে, বস্তুর অবস্থার উপর (যেমন তাপমাত্রা, চাপ ইত্যাদি) নির্ভর করে, বস্তুর প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। কিন্তু মহাকর্ষীয় ধ্রুবক এমন একটি ধ্রুবক যার মান সর্বত্র এবং সব অবস্থায় একই থাকে, কোন পরিবর্তন হয় না। এই কারণেই এই ধ্রুবককে বিশ্বজনীন ধ্রুবক বলে।

৭.৫ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G-এর মান নির্ণয়

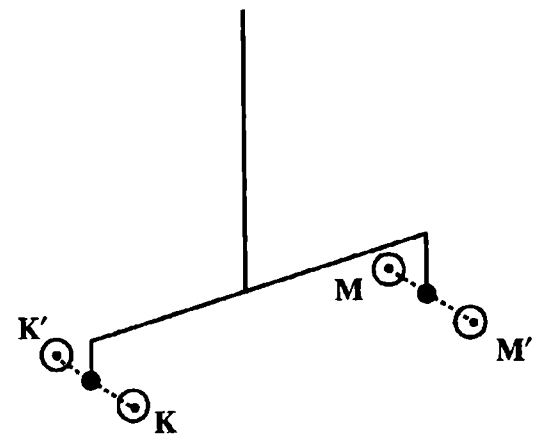
Determination of gravitational constant, G

মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয়ের জন্য অনেকগুলো পদ্ধতি আছে। তবে এখানে আমরা ক্যাভেন্ডিসের পদ্ধতি আলোচনা করব।

ক্যাভেন্ডিসের পদ্ধতি (Cavendish's method) : 1798 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী ক্যাভেন্ডিস মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয়ের জন্য একটি **ব্যবর্ত তুলা পদ্ধতি** উদ্ভাবন করেন। তাঁর নাম অনুসারে এই পদ্ধতিকে ক্যাভেন্ডিসের পদ্ধতি বলা হয়।



চিত্র ৭·২



চিত্র ৭·৩

যন্ত্রের বর্ণনা : এই যন্ত্রে সীসার তৈরি চারটি গোলক (A, B, C ও D) আছে। এদের মধ্যে A ও B ছোট এবং C ও D দুটি বড় গোলক [চিত্র ৭·২]। C এবং D একটি অনুভূমিক দণ্ড PQ-এর দু'প্রান্ত হতে ঝুলান হয়েছে। দণ্ডটি একটি উল্লম্ব অক্ষ XX'-এর সাথে যুক্ত থাকে। এই অক্ষ একটি চাকা W-এর সঙ্গে যুক্ত থাকে। চাকাটি বাহির হতে ঘুরানোর ব্যবস্থা থাকে। এর কিছুটা নিচে একই অক্ষে একটি ব্যবর্তন শীর্ষ (torsion head) H হতে ব্যবর্তন তারের (T) সাহায্যে একটি হাল্কা দণ্ড RS ঝুলান আছে। RS-এর দু'প্রান্ত হতে দুটি ছোট সমান ভরের গোলক A ও B ঝুলান আছে। A, B এবং C, D একই অনুভূমিক তলে থাকে। T ব্যবর্তন তারের সাথে একটি দর্পণ (E) লাগানো থাকে। একটি আলোক উৎস (L) হতে দর্পণের উপর আলোক রশ্মি আপতিত করানো হয় এবং প্রতিফলিত রশ্মি একটি স্কেলের (S') উপর নিক্ষেপ করানো হয়। স্কেলের উপর প্রতিফলিত আলোক রশ্মির সরণ পরিমাপ করে ব্যবর্তন তারের মোচড় কোণ পরিমাপ করা হয়।

কার্যপদ্ধতি : প্রথমে চাকা W-এর সাহায্যে PQ দণ্ডকে ঘুরিয়ে বড় গোলক দুটিকে দূরে সরিয়ে নেয়া হয় যাতে ছোট গোলকের উপরে প্রভাব না পড়ে। এই অবস্থায় স্কেলে দর্পণ E হতে প্রতিফলিত রশ্মির অবস্থানের পাঠ নেয়া হয়। এরপর বড় গোলক দুটিকে ছোট গোলক দুটির কাছাকাছি অবস্থানে আনা হয়। প্রত্যেক বড় গোলক (C বা D) তার নিকটে অবস্থিত ছোট গোলকের (A বা B) উপর একটি আকর্ষণ বল প্রয়োগ করে। সমান ও বিপরীতমুখী এই দুটি বল একটি বিক্ষেপী দ্বন্দ্বের (deflecting couple) সৃষ্টি করে যার ফলে RS দণ্ডটি একটি ক্ষুদ্র কোণে ঘুরতে বাধ্য হয়। সুতরাং ব্যবর্তন তারে পাক পড়ে। তারটি এর স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের জন্য বিপরীতমুখী প্রত্যায়নী দ্বন্দ্বের (restoring couple) সৃষ্টি করে দণ্ডটিকে পূর্বের অবস্থানে ফিরিয়ে নিতে সচেষ্ট হয়। দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী দ্বন্দ্বের ক্রিয়ায় দণ্ডটি একটি সাম্য অবস্থানে আসে। এই অবস্থায় স্কেলে দর্পণ হতে প্রতিফলিত রশ্মির নতুন অবস্থানের পাঠ নেয়া হয়। প্রথম পাঠ ও দ্বিতীয় পাঠের পার্থক্য হতে দণ্ডের কৌণিক বিক্ষেপ θ নির্ণয়

করা হয়। এরপর বড় গোলক দুটির অবস্থান [চিত্র ৭·৩] পূর্ব অবস্থান (K, m)-এর বিপরীত পার্শ্বে করা হয় [চিত্রে K′, m' অবস্থান]। এভাবে ঘুরিয়ে দণ্ডের কৌণিক বিক্ষেপের মান বের করা হয়। পরিশেষে এই দুটি বিক্ষেপের গড় মান নির্ণয় করা যায়।

হিসাব বা গণনা ঃ

মনে করি, প্রত্যেকটি বড় গোলকের ভর $= M$

প্রত্যেকটি ছোট গোলকের ভর $= m$

RS দণ্ডের দৈর্ঘ্য $= 2l$

দণ্ডটির সাম্যাবস্থায় বড় ও ছোট গোলকের কেন্দ্রবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= d$

A ও C গোলকের মধ্যকার আকর্ষণ বল,

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \qquad (3)$$

B এবং D গোলক দুটির মধ্যে অনুরূপ আকর্ষণ বল বিদ্যমান আছে। এই দুটি সমান ও বিপরীতমুখী বল একটি দ্বন্দ্বের সৃষ্টি করে।

অতএব, ব্যবর্তন শীর্ষ H সাপেক্ষে বিক্ষেপী দ্বন্দ্বের মোমেন্ট

$$= F \times 2l = \frac{GMm}{d^2} \times 2l \qquad (4)$$

দণ্ডটি যদি 'θ' কোণে বিচ্যুত হয় তাহলে মোচড়ের জন্য ব্যবর্তন তারে (T)

প্রত্যায়নী দ্বন্দ্বের মোমেন্ট $= \tau\theta$ (5)

এখানে τ = প্রতি ডিগ্রী বিক্ষেপের জন্য প্রত্যায়নী দ্বন্দ্বের মোমেন্ট।

সাম্যাবস্থায়, বিক্ষেপী দ্বন্দ্বের মোমেন্ট = প্রত্যায়নী দ্বন্দ্বের মোমেন্ট।

বা, $\frac{GMm}{d^2} \times 2l = \tau\theta$

$$\therefore \boxed{G = \frac{\tau\theta d^2}{2lMm}} \qquad (6)$$

এখন θ, d, $2l$, M এবং m পরীক্ষা হতে জানা যায়। τ-এর মান জানা থাকলেই G-এর মান পাওয়া যাবে।

τ-এর মান নির্ণয় করার জন্য বড় দুটি গোলককে সরিয়ে ফেলি। তারপর ছোট দুটি গোলকসহ RS দণ্ডকে ব্যবর্তন তার T-এর সাপেক্ষে ব্যবর্তন দোলনে দোলাই এবং দোলনকাল নির্ণয় করি। যদি দোলনকাল T হয়, তবে,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\tau}}} \qquad [\,I = \text{জড়তার মোমেন্ট}\,]$$

বা, $T^2 = 4\pi^2\frac{I}{\tau}$

$$\tau = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

সমীকরণ (6) হতে পাই,

$$G = \frac{4\pi^2 I\theta d^2}{T^2 \times 2l \times Mm} = \boxed{\frac{2\pi^2 I\theta d^2}{T^2 \times l \times Mm}} \qquad (7)$$

সমীকরণ (7)-এর ডান পাশের সকল রাশির মান জানা থাকায় G-এর মান বের করা যায়। বিজ্ঞানী ক্যাভেন্ডিস এ পরীক্ষা বারবার পুনরাবৃত্তি করেন এবং G-এর গড় মান বের করেন। এর লব্ধ মান হল

$$\boxed{G = (6{\cdot}754 \pm 0{\cdot}41) \times 10^{-11}\ \text{N-m}^2\ \text{kg}^{-2}}$$

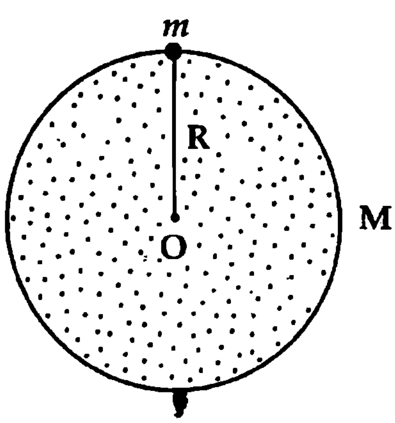
৭.৬ অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g'
Acceleration due to gravity, 'g'

নিউটনের গতির সূত্র অনুসারে বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে ত্বরণ সৃষ্টি হয়। অভিকর্ষও একটি বল। এই বল কোন একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে ত্বরণ সৃষ্টি করবে। অতএব, **বস্তুতে অভিকর্ষ বল কর্তৃক যে ত্বরণ উৎপন্ন হয় তাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে। অথবা কোন স্থানে অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর বেগ যে হারে বৃদ্ধি পায় তাকে ঐ স্থানের অভিকর্ষজ বা অভিকর্ষীয় ত্বরণ বলে।** একে 'g' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পরীক্ষার সাহায্যে জানা গেছে, বাধাহীন পথে ও একই স্থান হতে সকল বস্তু সমত্বরণে পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে পতিত হয়। স্থানভেদে এই ত্বরণের মান বিভিন্ন। সুতরাং অভিকর্ষজ ত্বরণ বস্তু নিরপেক্ষ, স্থান নিরপেক্ষ নয়।

এর একক এম. কে. এস ও আন্তর্জাতিক SI পদ্ধতিতে ~~মিটার/সে.^{2}; এর মাত্রা সমীকরণ = [LT^{-2}]~~।

অভিকর্ষজ ত্বরণের সমীকরণ (Equation of acceleration due to gravity)

মনে করি 'm' ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত এবং পৃথিবী একটি গোলাকার বস্তু [চিত্র ৭.৪]। যদি পৃথিবীর ভর 'M' এবং ব্যাসার্ধ 'R' হয়, তবে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র হতে আমরা পাই,



চিত্র ৭.৪

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \qquad (8)$$

পুনরায়, নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র হতে আমরা পাই,

বল = ভর × ত্বরণ

অভিকর্ষীয় বল = বস্তুর ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ। অর্থাৎ,

$$F = mg \qquad (9)$$

সমীকরণ (8) এবং সমীকরণ (9) হতে আমরা পাই,

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$

বা, $$\boxed{g = \frac{GM}{R^2}} \qquad (10)$$

এটিই হল ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের সমীকরণ। সমীকরণ অনুসারে অভিকর্ষজ ত্বরণ g বস্তুর ভর m-এর উপর নির্ভর করে না। আবার, আমরা জানি G এবং M ধ্রুব রাশি। অতএব ভূ-পৃষ্ঠের কোন স্থানে 'g'-এর মান ভূ-কেন্দ্র হতে ঐ স্থানের দূরত্বের উপর নির্ভর করে। এটি হতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, **ভূ-পৃষ্ঠের কোন একটি স্থানে g-এর মান নির্দিষ্ট, কিন্তু স্থানভেদে এর পরিবর্তন ঘটে।** পৃথিবীর ভর $M = 5.983 \times 10^{24}$ kg এবং ব্যাসার্ধ $R = 6.36 \times 10^6$ m ধরে উপরের সমীকরণ অনুসারে ভূ-পৃষ্ঠের g-এর মান হয়,

$$g = \frac{6.657 \times 10^{-11}\ \text{N-m}^2.\ \text{kg}^{-2} \times 5.983 \times 10^{24}\ \text{kg}}{(6.36 \times 10^6\ \text{m})^2} = 9.8465\ \text{ms}^{-2}$$

৭.৭ অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g'-এর তারতম্য
Variation of acceleration due to gravity, 'g'

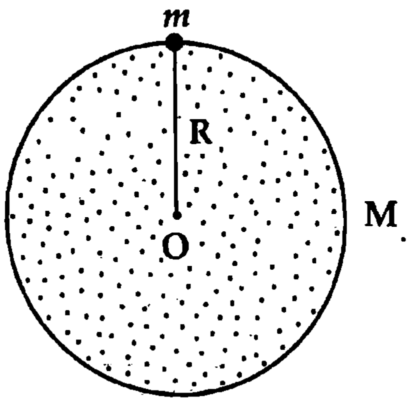
অভিকর্ষজ ত্বরণ ধ্রুব নয়। তিনটি কারণে এর তারতম্য ঘটে ঃ

(১) উচ্চতার ক্রিয়া (Altitude effect),

(২) অক্ষাংশ ক্রিয়া (Latitude effect) এবং

(৩) পৃথিবীর ঘূর্ণন ক্রিয়া (Rotational effect of the earth)।

নিম্নে এই বিষয়গুলো আলোচনা করা হল ঃ



চিত্র ৭.৫

(১) উচ্চতার ক্রিয়া ঃ পৃথিবীর কেন্দ্র হতে কোন স্থানের দূরত্বের তারতম্য ভেদে অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g'-এর মানের পরিবর্তন ঘটে। এটি আলোচনা করতে হলে তিনটি বিষয় আলোচনা করতে হয়; যথা—

(ক) কোন বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত ঃ কোন বস্তু যদি 'M' ভর এবং 'R' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থান করে [চিত্র ৭.৫] তবে ঐ বস্তুর উপর তথা ভূ-পৃষ্ঠে,

$$g = G\frac{M}{R^2} \tag{11}$$

$$= \frac{G \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times \rho}{R^2}$$

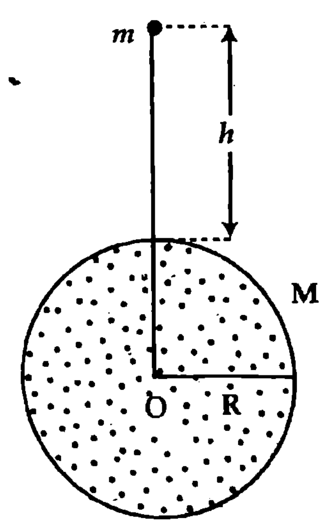
$$= \frac{4}{3}\pi GR\rho \tag{12}$$

$$g = \frac{4}{3}\pi GR\rho$$

এখানে, ρ = পৃথিবীর উপাদানের গড় ঘনত্ব ও $\frac{4}{3}\pi R^3$ = পৃথিবীর আয়তন।

(খ) কোন বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে উপরে অবস্থিত ঃ মনে করি M পৃথিবীর ভর এবং R তার ব্যাসার্ধ। যদি বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় উপরে অবস্থান করে [চিত্র ৭.৬] তবে ঐ বস্তুর উপর তথা ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণ,

$$\boxed{g_h = G\frac{M}{(R+h)^2}} \tag{13}$$



চিত্র ৭.৬

• সমীকরণ (11) অপেক্ষা সমীকরণ (13)-এ হরের মান বেশি। কাজেই ভাগফল অর্থাৎ অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান কম হবে। অতএব পৃথিবী পৃষ্ঠ অপেক্ষা উপরে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান কম হবে এবং দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতে পরিবর্তিত হবে। সুতরাং দূরত্ব বাড়লে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান কমবে এবং দূরত্ব কমলে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান বাড়বে। এই কারণে পাহাড়ের উপর অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান পৃথিবী পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান অপেক্ষা কম হয়।

সমীকরণ (13)-কে সমীকরণ (10) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়,

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} = \left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}$$

$h \ll R$ হলে, $\frac{g_h}{g} = 1 - \frac{2h}{R}$

বা, $g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ (14)

অর্থাৎ, $g_h < g$

(গ) কোন বস্তু পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে নিচে অবস্থিত ঃ মনে করি পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h দূরত্ব নিচে B বিন্দুতে কোন বস্তু আছে এবং ঐ স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g_d [চিত্র ৭·৭]। B বিন্দুতে অবস্থিত যে কোন বস্তুর উপর ভূ-কেন্দ্র O-এর দিকে পৃথিবীর আর্কষণ (R—h) ব্যাসার্ধবিশিষ্ট AB গোলকের আর্কষণের সমান। এই গোলকের বাইরের অংশ বস্তুর উপর কার্যকর কোন আকর্ষণ প্রয়োগ করে না।

এখন AB গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi(R - h)^3$

AB গোলকের ভর M′ ধরলে,

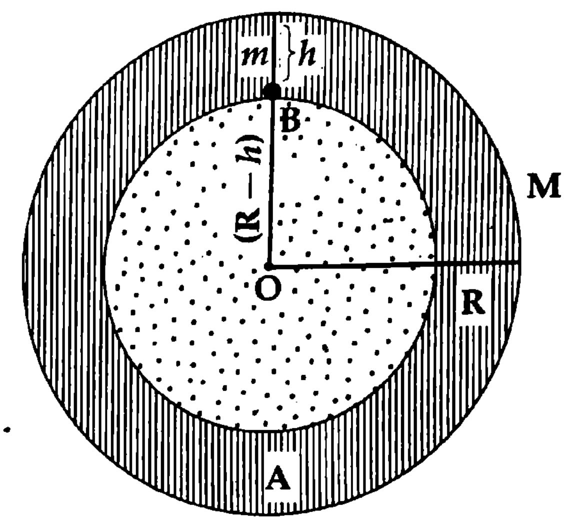
$M' =$ আয়তন $\times$ ঘনত্ব $= \frac{4}{3}\pi(R-h)^3 \times \rho$

$$g_d = \frac{GM'}{(R-h)^2} = G \times \frac{4}{3}\pi\frac{(R-h)^3\rho}{(R-h)^2}$$

বা, $g_d = \frac{4}{3}\pi G(R-h)\rho$ (15)

বা, $g_d = k(R-h)$ (16)

এখানে, $k = \frac{4}{3}\pi G\rho =$ একটি ধ্রুব রাশি।



চিত্র ৭.৭

উপরের সমীকরণ অনুসারে h-এর মান যত বাড়বে, (R—h)-এর মান তত কমবে। অতএব, যত পৃথিবীর ভেতরের দিক যাওয়া যাবে, অভিকর্ষীয় ত্বরণ-এর মান ততই কমবে অর্থাৎ ভূ-গর্ভে অভিকর্ষীয় ত্বরণ ভূ-কেন্দ্র হতে দূরত্বের সমানুপাতিক। এভাবে যেতে যেতে যদি ভূ-কেন্দ্রে পৌঁছা যায় তবে h-এর মান R-এর সমান হবে।

অতএব ভূ-কেন্দ্রে, $g_d = k(R - R)$

বা, $g_d = 0$ (17)

সুতরাং পৃথিবীর অভ্যন্তরে, যেমন কোন খনির ভেতরে g-এর মান ভূ-পৃষ্ঠে g-এর মান অপেক্ষা কম হয়।

সিদ্ধান্ত ঃ ভূ-পৃষ্ঠের উপরে গেলে 'g'-এর মান কমে, আবার পৃথিবীর অভ্যন্তরে গেলে 'g'-এর মান কমে। পৃথিবীর কেন্দ্রে কোন আকর্ষণ নেই। সুতরাং পৃথিবীর কেন্দ্রে 'g'-এর মান শূন্য এবং ভূ-পৃষ্ঠেই 'g'-এর মান সর্বাপেক্ষা বেশি।

উল্লেখ্য ঃ (i) সমীকরণ (11) হতে সরাসরি সমীকরণ (15) পাওয়া যায়।

(ii) সমীকরণ (15)-কে সমীকরণ (12) দ্বারা ভাগ করে পাওয়া যায়

$$\frac{g_d}{g} = \frac{R-h}{R} = \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$g_d = g\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad (18)$$

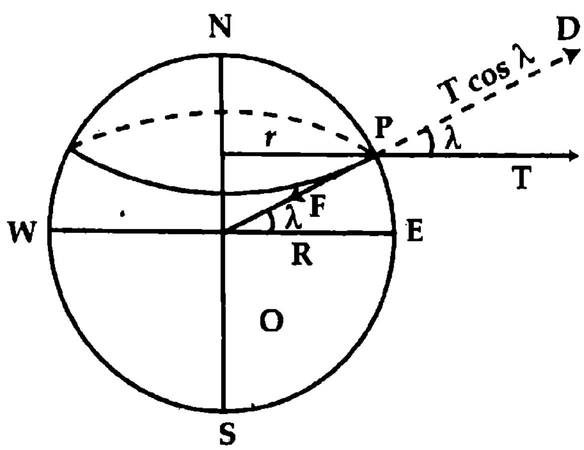
অর্থাৎ, $g_d < g$

(২) অক্ষাংশ ক্রিয়া—অক্ষাংশ পরিবর্তনে g-এর পরিবর্তন ঃ আমরা জানি পৃথিবী সম্পূর্ণ গোলাকার নয়। এর আকৃতি উপগোলকীয় (spheroidal)। উত্তর ও দক্ষিণ মেরু কিছুটা চাপা এবং বিষুব-ব্যাস মেরু-ব্যাস অপেক্ষা

প্রায় 43 km বৃহত্তর। সুতরাং বিষুব রেখায় অবস্থিত কোন বস্তু মেরু অঞ্চলে অবস্থিত বস্তু অপেক্ষা পৃথিবীর কেন্দ্র হতে অধিক দূরে অবস্থিত। অতএব বিষুব রেখায় অবস্থিত কোন বস্তুর উপর অভিকর্ষীয় আকর্ষণ বল মেরুতে অবস্থিত ঐ বস্তুর উপর অভিকর্ষীয় আকর্ষণ বল অপেক্ষা কম। সুতরাং বিষুব রেখায় 'g'-এর মান কম এবং মেরু অঞ্চলে 'g'-এর মান বেশি।

অতএব, বিষুব রেখা হতে ক্রমাগত মেরু অঞ্চলের দিকে অগ্রসর হলে 'g'-এর মান বাড়তে থাকবে এবং মেরুতে এর মান সর্বাপেক্ষা বেশি হবে।

(৩) পৃথিবীর ঘূর্ণনের ক্রিয়া—পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য 'g'-এর মানের পরিবর্তন ঃ পৃথিবীর আহ্নিক বা দৈনিক গতির সাথে সাথে ভূ-পৃষ্ঠের যে কোন একটি বস্তু পৃথিবীর সাথে তার অক্ষের চর্তুদিকে সমান কৌণিক বেগে প্রদক্ষিণ করবে। এতে বস্তুটির উপর একটি কেন্দ্রমুখী বল প্রযুক্ত হবে এবং বস্তুটি তার বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ বরাবর ছিটকে বাইরের দিকে চলে যাবার চেষ্টা করবে। বস্তুর ওজনের কিছু অংশ এই কেন্দ্রবিমুখী বল প্রশমিত করতে ব্যয় হবে। ফলে অভিকর্ষীয় ত্বরণ 'g' হ্রাস পাবে। আবার মেরু অঞ্চল অপেক্ষা বিষুব অঞ্চলে বস্তু অপেক্ষাকৃত বড় ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে ঘুরবে বলে কেন্দ্রবিমুখী বলও বৃদ্ধি পাবে। কাজেই g-এর মান মেরু অঞ্চলে সবচেয়ে বেশি এবং বিষুব অঞ্চলে সবচেয়ে কম হবে।



চিত্র ৭·৮

ধরা যাক m ভরের একটি বস্তু ভূ-পৃষ্ঠে λ (উত্তর) অক্ষাংশে P বিন্দুতে অবস্থান করে পৃথিবীর ঘূর্ণনে তার অক্ষ NS-এর চতুর্দিকে ω সমকৌণিক বেগে r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে ঘুরছে [চিত্র ৭·৮]। তা হলে বস্তুটির উপর তার বৃত্তাকার পথের স্পর্শক PT বরাবর সৃষ্ট কেন্দ্রবিমুখী বল, $T = m\omega^2 r$

$$\left[\quad v = \omega r \text{ এবং } F = \frac{mv^2}{r}\right]$$

PO বা ভূ-কেন্দ্র বরাবর বস্তুটির উপর পৃথিবীর আকর্ষণ, $F = \frac{GmM}{R^2}$ ।

OPD বরাবর বা ভূ-কেন্দ্র হতে বাইরের দিকে কেন্দ্রবিমুখী বলের অংশক

$T\cos\lambda = m\omega^2 r \cos\lambda = m\,\omega^2 R\cos^2\lambda \quad [\because r = R\cos\lambda]$

বল দুটির লব্ধি, $$F_\lambda = \frac{GMm}{R^2} - m\,\omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (19)$$

P বিন্দুতে ভূ-কেন্দ্র অভিমুখে অভিকর্ষজ ত্বরণ g_λ হলে,

$$F_\lambda = mg_\lambda = \frac{GMm}{R^2} - m\,\omega^2 R\cos^2\lambda$$

$$g_\lambda = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (20)$$

বিষুব অঞ্চলে, $\lambda = 0°$. $\quad g_\lambda = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R \quad [\because \cos\lambda = 1]$

আবার মেরু অঞ্চলে, $\lambda = 90°$ $\quad g_\lambda = \frac{GM}{R^2}$

কাজেই, g-এর মান মেরু অঞ্চলে সবচেয়ে বেশি এবং বিষুব অঞ্চলে সবচেয়ে কম হবে।

এ সমস্ত আলোচনা এবং পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হতে g-এর মান সম্পর্কে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি ঃ

(১) পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে উপর দিকে উঠলে এর মান কমে।

(২) পৃথিবীর অভ্যন্তরে নামলে এর মান কমে।

(৩) বিষুবীয় অঞ্চল হতে মেরু অঞ্চলে অগ্রসর হলে এর মান বাড়ে।

(৪) ঘূর্ণনজনিত কারণে মেরু অঞ্চলে এর মান অল্প কমে, কিন্তু বিষুবীয় অঞ্চলে বেশি কমে।

(৫) মেরুতে g-এর মান = $9{\cdot}832\ \text{ms}^{-2}$; বিষুব অঞ্চলে g-এর মান = $9{\cdot}780\ \text{ms}^{-2}$।

ঢাকায় g-এর মান = $9{\cdot}7835\ \text{ms}^{-2}$; রাজশাহীতে g-এর মান = $9{\cdot}790\ \text{ms}^{-2}$।

(৬) ভূ-পৃষ্ঠে g-এর মান বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন বলে সমুদ্র পৃষ্ঠে এবং 45° অক্ষাংশের g-এর মানকে আদর্শ মান ধরা হয়। g-এর আদর্শ বা ব্যবহারিক মান = $9{\cdot}81\ \text{ms}^{-2}$।

(৭) g-এর মান জেনে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব সম্বন্ধে একটি ধারণা লাভ করা যায়।

৭·৮ পৃথিবীর ভর ও ঘনত্ব

Mass and density of the earth

মনে করি পৃথিবীর ভর = M, ব্যাসার্ধ = R এবং ভূ-পৃষ্ঠে অবস্থিত কোন বস্তুর ভর = m [চিত্র ৭·৯]। উক্ত বস্তুকে পৃথিবী যে বল দ্বারা আকর্ষণ করে তার মান,

$$F = G\frac{Mm}{R^2} \qquad (21)$$

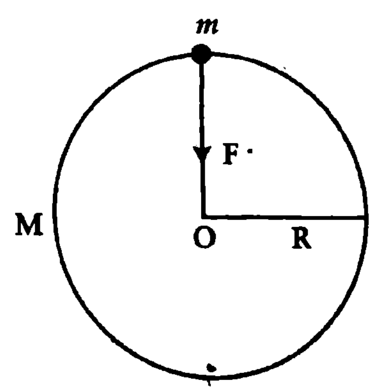
পর্যবেক্ষণ স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g হলে বস্তুর ওজন,

$$W = F = mg \qquad (22)$$

এখন সমীকরণ (21) ও (22) হতে পাই,

$$mg = G\frac{Mm}{R^2} \quad \text{বা,}\ g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\text{বা,}\ M = \frac{gR^2}{G} \qquad (23)$$



চিত্র ৭·৯

সমীকরণ (23)-এ, $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$, $R = 6{\cdot}37 \times 10^6$ m, $G = 6{\cdot}673 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^{-2}\ \text{kg}^{-2}$ বসিয়ে,

$$M = \frac{9{\cdot}8 \times (6{\cdot}37 \times 10^6)^2}{6{\cdot}673 \times 10^{-11}}$$

$$= 5{\cdot}96 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

ঘনত্ব ঃ মনে করি পৃথিবীর গড় ঘনত্ব = ρ

$$\boxed{\rho = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}}} = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} \qquad [\because V = \frac{4\pi}{3}R^3]$$

$$= \frac{gR^2}{G} \times \frac{3}{4\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi GR} \qquad (24)$$

$$= \frac{3 \times 9{\cdot}8}{4 \times 3{\cdot}14 \times 6{\cdot}673 \times 10^{-11} \times 6{\cdot}37 \times 10^6}$$

$$\boxed{= 5{\cdot}5 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}}$$

৭.৯ ভর এবং ওজন বা ভার
Mass and weight

ভর ঃ কোন একটি বস্তুতে মোট যে পরিমাণ পদার্থ আছে, তাকে তার ভর বলে। একে সাধারণত 'M' বা 'm' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটি একটি স্কেলার রাশি। বস্তুর ভর স্থান নিরপেক্ষ অর্থাৎ যে কোন্ স্থানে নেয়া হোক না কেন এর মান সর্বত্র স্থির থাকবে। বস্তুর ভর তার স্থিতি, গতি, তাপমাত্রা, চুম্বকত্ব বা তড়িতাবস্থা দ্বারা প্রভাবিত হয় না। সেজন্য ভর বস্তুর একটি স্বাভাবিক ধর্ম। এক্ষেত্রে উল্লেখ করা যেতে পারে যে কোন বস্তুর বেগ যদি আলোর বেগের কাছাকাছি হয় তা হলে বস্তুর ভরের পরিবর্তন দেখা যায়। বেগের সঙ্গে বস্তুর ভর পরিবর্তনের তত্ত্ব **আইনস্টাইন** (Einstein)-এর **আপেক্ষিক তত্ত্বে** (Theory of relativity) বিশদভাবে আলোচিত হয়েছে।

ওজন ঃ কোন একটি বস্তু যে পরিমাণ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয় তাকে তার ওজন বা ভার বলে। একে W দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেহেতু ওজন একটি বল ছাড়া আর কিছুই নয়, সুতরাং এটি একটি ভেক্টর রাশি এবং এর মান, W = ভর $\times$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

বা, $W = mg$ (25)

বিভিন্ন স্থানে g-এর মান বিভিন্ন বলে স্থানভেদে বস্তুর ওজন পরিবর্তিত হয়। অতএব বস্তুর ওজন স্থান নিরপেক্ষ নয়। এই প্রসংগে আরও বলা যায় যে, বস্তুর ওজন তার একটি মৌলিক বৈশিষ্ট্য নয়। বস্তুর ওজন থাকতে পারে, নাও থাকতে পারে। যেমন পৃথিবীর কেন্দ্রে বস্তুর কোন ওজন নেই।

৭.১০ বস্তুর ওজনের তারতম্য
Variation of weight of a body

আমরা জানি ওজন $W = mg$; এখানে m = বস্তুর ভর এবং g =অভিকর্ষজ ত্বরণ। বস্তুর ভর একটি ধ্রুব রাশি; সুতরাং কোন বস্তুর ওজন অভিকর্ষজ ত্বরণের উপর নির্ভরশীল। যে স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ বেশি, সে স্থানে বস্তুর ওজনও বেশি। আর অভিকর্ষজ ত্বরণ যে স্থানে কম বস্তুর ওজনও সে স্থানে কম। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, মেরু অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ বেশি। সুতরাং মেরু অঞ্চলে বস্তুর ওজন বেশি। বিষুব অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ কম। ~~অতএব বিষুব অঞ্চলে~~ বস্তুর ওজনও কম। পৃথিবীর কেন্দ্রে অভিকর্ষজ ত্বরণ শূন্য। অতএব পৃথিবীর কেন্দ্রে বস্তুর কোন ওজন নেই।

৭.১১ মহাকর্ষীয় ধ্রুবক এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between gravitational constant and acceleration due to gravity

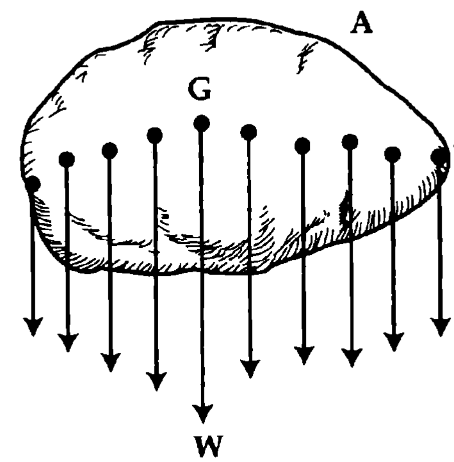
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য আছে ঃ

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক	অভিকর্ষজ ত্বরণ
১। একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব এক একক হলে তাদের পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে।	১। অভিকর্ষ বলের জন্য বস্তুতে যে ত্বরণ সৃষ্টি হয় তাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।
২। এর মাত্রা সমীকরণ ~~$[L^3M^{-1}T^{-2}]$~~ $[M^{-1}T^{-2}L^3]$	২। এর মাত্রা সমীকরণ $[LT^{-2}]$।
৩। এটি একটি বিশ্বজনীন ধ্রুবক।	৩। এটি একটি পরিবর্তনশীল রাশি।
৪। এস. আই. পদ্ধতিতে এর মান $6{\cdot}657 \times 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}	৪। এস.আই. পদ্ধতিতে এর মান ভূ-পৃষ্ঠে $9{\cdot}81\ ms^{-2}$
৫। এর মান বস্তুর ভরের উপর বা ভূ-কেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের উপর নির্ভর করে না।	৫। এর মান বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে না; কিন্তু ভূ-কেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্বের উপর নির্ভর করে।
৬। এটি একটি স্কেলার রাশি।	৬। এটি একটি ভেক্টর রাশি।

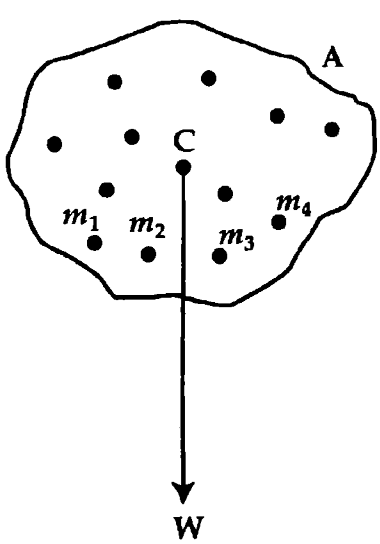
৭·১২ অভিকর্ষ কেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্র
Centre of gravity and centre of mass

অভিকর্ষ কেন্দ্র ঃ আমরা জানি, কোন একটি বস্তু যে পরিমাণ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয়, তাকে বস্তুর ওজন বা ভার বলে। **বস্তুকে যেভাবেই রাখা হোক না কেন তার ওজন যে বিশেষ বিন্দুর মধ্য দিয়ে বস্তুর উপর সর্বদা ক্রিয়া করে ঐ বিন্দুকে বস্তুর অভিকর্ষ কেন্দ্র বলে।** অভিকর্ষ কেন্দ্রের অপর নাম ভারকেন্দ্র।

মনে করি A একটি দৃঢ় বস্তু। তা কতকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। প্রতিটি কণাই অভিকর্ষ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকর্ষিত হবে। এই সব বল মিলিত হয়ে একটি লব্ধি বল সৃষ্টি করবে। বস্তুটিকে ঘুরে ফিরে যেভাবেই রাখা হোক না কেন কণাগুলোর উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বলের পরিমাণ, অভিমুখ ও ক্রিয়াবিন্দুর এবং সেই সঙ্গে ঐ বলগুলোর লব্ধির পরিমাণ, অভিমুখ ও ক্রিয়াবিন্দুর কোন পরিবর্তন হবে না। এই লব্ধি বলই বস্তুর ওজন। চিত্র ৭·১০-এ ওজন বা বল বস্তুর 'G' বিন্দুর মধ্য দিয়ে ক্রিয়া করছে। এই বিন্দুই বস্তুটির অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র।



চিত্র ৭·১০



চিত্র ৭·১১

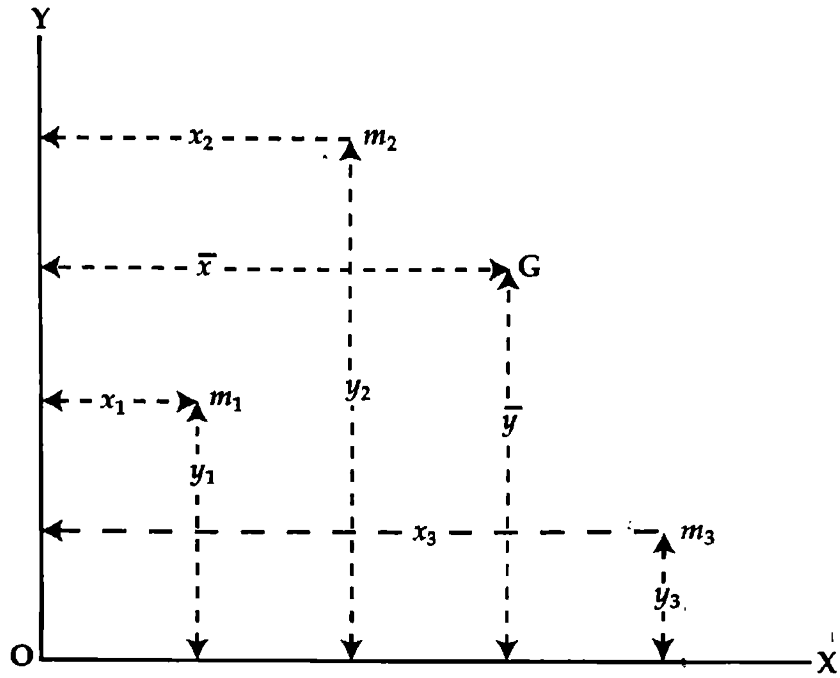
ভরকেন্দ্র ঃ আমরা জানি একটি বস্তু অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। **বস্তুর কণাগুলোর সমস্ত ভরকে একটি মাত্র বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত মনে করলে ঐ বিন্দুর মধ্য দিয়েই সমস্ত কণার উপর তাদের ভরের সমানুপাতিক ক্রিয়ারত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ক্রিয়া করে বলে বিবেচিত হয়। ঐ বিন্দুকে বস্তুর ভরকেন্দ্র বলে।**

মনে করি A একটি বস্তু। তা অনেকগুলো বস্তুকণার সমষ্টি। ধরি বস্তুকণাগুলোর ভর যথাক্রমে $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ ইত্যাদি [চিত্র ৭·১১]। সমস্ত ভরকে C বিন্দুতে সমবেত ধরা হলে ঐ ভরগুলোর উপর ক্রিয়ারত কণার ভরের সমানুপাতিক সমান্তরাল বলের লব্ধি C বিন্দুর মধ্য দিয়েই ক্রিয়া করবে। এই বিন্দুর নামই ভরকেন্দ্র।

৭·১৩ গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে কোনও তলে অবস্থিত বস্তুকণাসমূহের অভিকর্ষ কেন্দ্র নির্ণয়
Determination of centre of gravity of particles in a plane by mathematical analysis

মনে করি A একটি বস্তু। এতে $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ ভরবিশিষ্ট বস্তুকণা আছে। ধরি OX এবং OY সমকোণে অবস্থিত দুটি অক্ষ। এই অক্ষ দুটির সাপেক্ষে ধরি তাদের স্থানাংক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... (x_n, y_n) ইত্যাদি। মনে করি এদের ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে অবস্থিত এবং এর স্থানাংক $(\bar{x}, \bar{y})$ [চিত্র ৭·১২]।

যেহেতু অবস্থিতির সঙ্গে ভারকেন্দ্রের রদ-বদল হয় না, সেহেতু তলটি অনুভূমিক ধরা যেতে পারে। অতএব বস্তুকণাগুলোর ভার সমমুখী সমান্তরাল বল হবে এবং তারা উল্লম্বভাবে নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। সংজ্ঞানুসারে G বিন্দুর মধ্য দিয়ে মোট ভার বা ওজন নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। এখন Y-অক্ষ বরাবর ভারগুলোর মোমেন্টের গাণিতিক যোগফল ঐ অক্ষ বরাবর লব্ধির মোমেন্টের সমান হবে।



চিত্র ৭·১২

$$(m_1g + m_2g + m_3g + \ldots \quad + m_ng)\,\bar{x} = m_1\,gx_1 + m_2\,gx_2 + m_3gx_3 + \quad \ldots + m_ngx_n$$

বা, $$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots\ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \quad + m_n} \qquad (26)$$

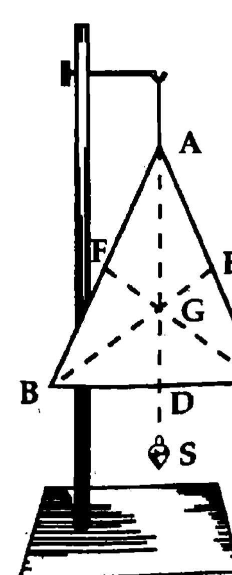
একইভাবে X-অক্ষ বরাবর মোমেন্ট নিলে আমরা পাই,

$$\bar{y} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots\ldots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \quad + m_n} \qquad (27)$$

৭·১৪ ভরকেন্দ্র নির্ণয়
Determination of centre of mass

অসম অথবা সুষম বস্তুর ভারকেন্দ্র নিম্ন উপায়ে নির্ণয় করা যায় ঃ

মনে করি একটি অসম ত্রিভুজাকৃতি পাতলা পাত ABC-এর ভারকেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে। প্রথমে পাতটির যে কোন এক প্রান্ত, ধরা যাক, A-এ সুতা বেঁধে পাতটিকে ঝুলিয়ে আর একটি সুতায় একটি পাথরখণ্ড S বেঁধে ঐ একই প্রান্ত A হতে পাথরটিকে ঝুলিয়ে দেয়া হয় [চিত্র ৭·১৩]। পাত ও পাথর খণ্ডটির স্থিরাবস্থায় A হতে সুতা বরাবর পাতের উপর দিয়ে একটি সরলরেখা AD টানা হয়। অনুরূপভাবে পাতটিকে পর পর B ও C হতে ঝুলিয়ে পাতটির উপর দিয়ে সুতা বরাবর যথাক্রমে সরলরেখা BE ও CF টানা হয়। তাহলে, অঙ্কিত AD, BE ও CF-এর ছেদবিন্দু G-ই পাতটির ভারকেন্দ্র। কারণ স্থিরাবস্থায় সুতার টানের বিপরীতে বস্তুর ওজন ক্রিয়া করে এবং



চিত্র ৭·১৩

সুতাটি বস্তুর ভারকেন্দ্র দিয়ে যাবে। এখানে পাথরখণ্ডটি যে সুতায় ঝুলে থাকে তাকে **ওলন সুতা** এবং অঙ্কিত সরলরেখাগুলোকে **ওলন রেখা** বলা হয়।

৭.১৫ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র ও প্রাবল্য
Gravitational field and intensity

কোন বস্তুর চারদিকে যে স্থান জুড়ে তার আকর্ষণ বল অনুভূত হয়, সে স্থানকে উক্ত বস্তুর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র বলে।

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে একক ভরের কোন বস্তু স্থাপন করলে তার উপর যে বল প্রযুক্ত হয়, তাকে ঐ ক্ষেত্রের দরুন ঐ বিন্দুর মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বলে। এটা সাধারণত মহাকর্ষীয় প্রাবল্য (Intensity) নামে পরিচিত।

মনে করি M ভরের একটি বস্তু আছে। এই বস্তুর ভরকেন্দ্র হতে r দূরে অবস্থিত কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য নির্ণয় করতে হবে।

নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র হতে আমরা জানি M ও m ভরের দুটি বস্তুর ভরকেন্দ্র পরস্পর হতে r দূরে থাকলে তাদের মধ্যে আকর্ষণ বলের পরিমাণ $= G\frac{Mm}{r^2}$

এখন যদি $m = 1$ একক হয়, তবে

বল $= \frac{GM}{r^2} =$ M ভর কর্তৃক একক ভরের উপর M ভর অভিমুখী প্রযুক্ত বল। এটাই মহাকর্ষীয় প্রাবল্য E,

অর্থাৎ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, $E = \frac{GM}{r^2}$ (28)

উক্ত সমীকরণ হতে সহজেই বুঝা যায় যে, M যত বেশি হবে, প্রাবল্যও তত বাড়বে। আবার r যত বেশি হবে, প্রাবল্য তত কমবে। মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের বিভিন্ন বিন্দুতে প্রাবল্য বিভিন্ন হবে।

মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে m ভরের একটি বস্তু রাখলে তার উপর ক্রিয়াশীল বল হবে,

$$F = mE = \frac{GmM}{r^2}$$

যেহেতু বল $\vec{F}$ একটি ভেক্টর রাশি, তাই মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, $\vec{E}$ একটি ভেক্টর রাশি। $\vec{E}$-এর দিক হবে $\vec{F}$-এর দিক বরাবর। অন্যভাবে বলা যায়, একক ভরের বস্তু যেদিকে বল লাভ করে $\vec{E}$-এর দিক সেদিকে হবে।

এম. কে. এস. ও আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে প্রাবল্যের একক **নিউটন/কিলোগ্রাম** (Nkg^{-1})।

৭.১৬. মহাকর্ষীয় বিভব
Gravitational potential

সংজ্ঞা ঃ অসীম দূর হতে একক ভরের কোন বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ঐ বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে। একে সাধারণত V দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উল্লেখ্য, দুটি বস্তুর মধ্যে আকর্ষণ বলই কাজ করে থাকে। বাইরের কোন বল বা শক্তির প্রয়োজন হয় না। সুতরাং মহাকর্ষীয় বিভবকে ঋণ রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে বিভব ঋণাত্মক। এটা একটি **স্কেলার রাশি**।

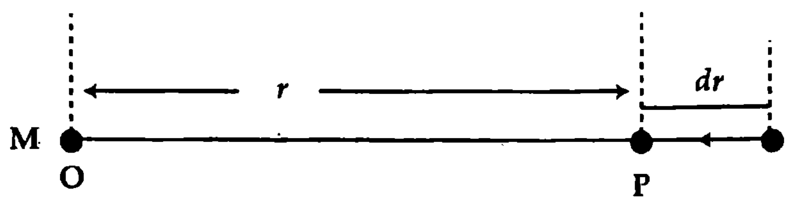
এম. কে. এস. বা এস. আই. পদ্ধতিতে এর একক জুল/কিলোগ্রাম (Jkg^{-1})।

বিভব পার্থক্য (Potential difference) ঃ একক ভরের কোন বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের এক বিন্দু হতে অন্য বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ঐ বিন্দুর মধ্যে মহাকর্ষীয় বিভব পার্থক্য বলে।

আকর্ষণ বলের অভিমুখে সরণ হলে বিভব পার্থক্য ঋণাত্মক এবং আকর্ষণ বলের বিরুদ্ধে সরণ হলে বিভব পার্থক্য ধনাত্মক হবে।

৭.১৭ বিন্দু ভরের দরুন মহাকর্ষীয় বিভব
Gravitational potential due to a point mass

আমরা জানি, অসীম দূরত্ব হতে একক ভরের কোন বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে উক্ত বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে। এখন বিন্দু ভরের দরুন মহাকর্ষীয় বিভবের সাধারণ সমীকরণ বের করা যাক।



চিত্র ৭.১৪

মনে করি, O বিন্দুতে M ভরের একটি বিন্দু ভর বস্তু অবস্থিত [চিত্র ৭.১৪]। O হতে r দূরে P একটি বিন্দু। P বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব বের করতে হবে।

P বিন্দুতে একক ভরের উপর O বিন্দু অভিমুখী প্রযুক্ত বল অর্থাৎ মহাকর্ষীয় প্রাবল্য $= \frac{GM}{r^2}$। এখন একক ভরকে সামান্য দূরত্ব dr নিয়ে যেতে কাজের পরিমাণ অর্থাৎ বিভব,

$$dV = \text{বল} \times \text{সরণ} = \text{প্রাবল্য} \times \text{সরণ} = \frac{GM}{r^2} dr$$

একক ভরকে অসীম দূরত্ব হতে P বিন্দুতে আনতে কাজের পরিমাণ অর্থাৎ P বিন্দুতে বিভব

$$V = \int dV = \int_{r=\infty}^{r=r} \frac{GM}{r^2} \times dr$$

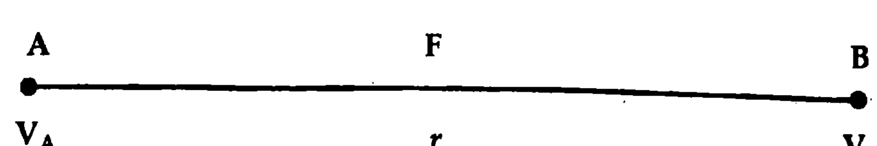
বা, $V = GM \int_{r=\infty}^{r=r} \frac{1}{r^2} dr$ বা, $V = GM\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$

বা, $$V = -\frac{GM}{r} \qquad (29)$$

এখানে ঋণচিহ্ন এই অর্থ প্রকাশ করে যে, বাহ্যিক কোন বল বা শক্তি দ্বারা কাজ সম্পন্ন হয়নি, মহাকর্ষীয় বলই কাজ সম্পন্ন করেছে।

৭.১৮ প্রাবল্য ও বিভব পার্থক্যের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between intensity and potential

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য এবং মহাকর্ষীয় বিভবের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে গিয়ে ধরি, A ও B মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে অবস্থিত কাছাকাছি দুটি বিন্দু [চিত্র ৭.১৫]। মনে করি এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব r। A বিন্দুর বিভব $= V_A$ এবং B বিন্দুর বিভব $= V_B$। যেহেতু A ও B বিন্দু দুটি মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রে কাছাকাছি অবস্থিত, সেহেতু বিন্দু দুটির মহাকর্ষীয় প্রাবল্য সমান ধরে নেয়া হয়। মনে করি এই প্রাবল্য = F



চিত্র ৭.১৫

এখন, একক ভরের কোন বস্তুকে B বিন্দু হতে A বিন্দুতে আনতে কাজের পরিমাণ = প্রাবল্য × দূরত্ব

$$= F \times AB = F \times r$$

এটাই হল A বিন্দু এবং B বিন্দুর বিভব পার্থক্য অর্থাৎ $(V_A - V_B)$

$$F \times AB = V_A - V_B$$

বা, $$F = \frac{V_A - V_B}{AB} = \frac{V_A - V_B}{r} \tag{30}$$

অর্থাৎ, **দূরত্ব সাপেক্ষে বিভবের পরিবর্তনের হারকে প্রাবল্য বলে।** ক্ষেত্রের অভিমুখে সরণ $AB = dr$ হলে এবং A বিন্দুর বিভব V ও B বিন্দুর বিভব $(V + dV)$ হলে, $V_A - V_B = -dV$

$$F = -\frac{dV}{dr} \tag{31}$$

এটাই প্রাবল্য এবং বিভবের মধ্যে সম্পর্ক।

৭.১৯ কেপলার-এর সূত্র
Kepler's law

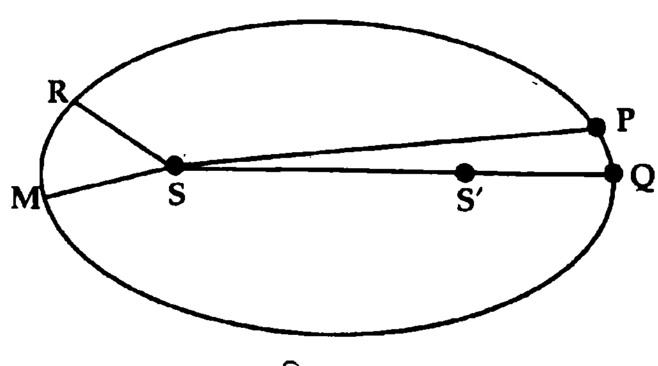
অতি প্রাচীনকাল হতে গ্রহ-নক্ষত্রের গতিবিধি সম্পর্কে বিজ্ঞানীদের যথেষ্ট আগ্রহ ছিল। ষোড়শ শতাব্দীতে ডেনমার্কের জ্যোতির্বিদ **টাইকোব্রে** (Tycho-Brahe) মংগল গ্রহের গতিবিধি লক্ষ করেন এবং কিছু তথ্য সংগ্রহ করেন। তাঁর এ গবেষণা লব্ধ তথ্য এবং অন্যান্য পর্যবেক্ষণের সাহায্যে 1618 খ্রিস্টাব্দে ডেনমার্কের অপর জ্যোতির্বিদ **জন কেপলার** (John Kepler) সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, গ্রহগুলো কোন এক বলের প্রভাবে সূর্যকে কেন্দ্র করে অবিরাম ঘুরছে। এই সম্পর্কে তিনি তিনটি সূত্র প্রদান করেন। তাঁর নাম অনুসারে এই তিনটি সূত্রকে **কেপলার-এর গ্রহ সম্পর্কীয় গতিসূত্র** (Kepler's laws of planetary motion) বলা হয়। সূত্র তিনটি নিম্নে আলোচিত হল ঃ

(১) উপবৃত্ত সূত্র (Law of ellipse) ঃ প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের নাভিতে বা ফোকাসে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে।

(২) ক্ষেত্রফল সূত্র (Law of area) ঃ গ্রহ এবং সূর্যের সংযোগকারী ব্যাসার্ধ রেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।

(৩) সময়ের সূত্র (Law of time) ঃ প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ সূর্য হতে তার গড় দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা ঃ ১ম সূত্র ঃ এই সূত্র সূর্যের চারদিকে গ্রহের কক্ষপথের আকৃতি প্রকাশ করে। মনে করি S এবং S′ একটি উপবৃত্তের দুটি নাভি। ধরি S নাভিটি সূর্যের অবস্থিতি [চিত্র ৭.১৬]। কেপলারের প্রথম সূত্র অনুসারে যে কোন গ্রহ সূর্যকে S বিন্দুতে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে ঘুরছে।



চিত্র ৭.১৬

২য় সূত্র ঃ এই সূত্র কক্ষীয় বেগ এবং সূর্য ও গ্রহের মধ্যবর্তী দূরত্বের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। মনে করি কোন গ্রহ t সময়ে P অবস্থান হতে Q অবস্থানে আসে। যদি একই সময়ে ঐ গ্রহ M অবস্থান হতে R অবস্থানে আসে, তবে কেপলারের দ্বিতীয় সূত্র হতে পাই, PQS-এর ক্ষেত্রফল এবং MSR-এর ক্ষেত্রফল সমান হবে।

৩য় সূত্র ঃ এই সূত্র গ্রহের কক্ষপথের আকার এবং অতিক্রান্ত সময়ের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। মনে করি T গ্রহের পর্যায়কাল অর্থাৎ সূর্যকে একবার প্রদক্ষিণ করতে যে সময় লাগে তার মান T। যদি $2a$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য হয়, তবে কেপলারের তৃতীয় সূত্র হতে আমরা পাই, $T^2 \propto 8a^3$

যেহেতু 8 একটি ধ্রুব সংখ্যা, সেহেতু, $T^2 \propto a^3$

উক্ত সমীকরণ হতে কেপলারের তৃতীয় সূত্রটিকে সামান্য পরিবর্তন করে নিম্নরূপে লিখা যায়—

প্রতিটি গ্রহের পর্যায়কালের বর্গ গ্রহের কক্ষপথের পরাক্ষের অর্ধেকের ঘন-এর সমানুপাতিক।

৭·২০ কেপলারের সূত্র হতে নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র প্রতিপাদন
Derivation of newton's law of gravitation from Kepler's law

মহাবিজ্ঞানী নিউটন কেপলারের সূত্রগুলো ব্যাখ্যা করতে গিয়ে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হলেন যে মহাবিশ্বে যে কোন দুটি বস্তু পরস্পরকে আকর্ষণ করে। সূর্যের চতুর্দিকে গ্রহগুলোর কক্ষপথ বৃত্তাকার গণ্য করে নিম্নলিখিত উপায়ে সহজে কেপলারের সূত্রগুলো হতে নিউটনের এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়।

ধরা যাক m ভরের একটি গ্রহ সূর্যের চতুর্দিকে r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে v সমগতিতে ঘুরছে। কিন্তু গ্রহের উপর সূর্যের দিকে কেন্দ্রমুখী বল প্রয়োগ ব্যতীত গ্রহের এই বৃত্তাকার গতি সম্ভব নয়।

প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল, $F = \dfrac{mv^2}{r}$

সূর্যের চতুর্দিকে গ্রহটির আবর্তন কাল T হলে,

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \left[\because v = \omega r \text{ এবং } \omega = \frac{2\pi}{T}\right]$$

$$F = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

কিন্তু কেপলারের তৃতীয় সূত্রানুসারে, $T^2 \propto r^3$

অর্থাৎ $T^2 = kr^3$, এখানে k একটি ধ্রুবক।

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} = \frac{4\pi^2 m}{kr^2} \qquad (32)$$

সুতরাং গ্রহের উপর সূর্যের আকর্ষণ বল, গ্রহের ভরের সমানুপাতিক এবং সূর্য হতে গ্রহের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। কিন্তু প্রত্যেক ক্রিয়ার একটি সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া থাকে। কাজেই সমীকরণটিতে F-এর সাথে যেমন গ্রহের ভর m-এর সম্পর্ক আছে তদ্রূপ F-এ সূর্যের ভরেরও একই সম্পর্ক থাকবে। এজন্য $\left(\dfrac{4\pi^2}{k}\right)$-কে GM ধরা যায় ; এখানে G একটি ধ্রুবক এবং M সূর্যের ভর।

সূর্য ও গ্রহের মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বল, $F = \dfrac{GmM}{r^2}$ (33)

এটাই নিউটনের **মহাকর্ষীয় সমীকরণ**। সুতরাং কেপলারের সূত্র হতে নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র প্রতিষ্ঠিত হল।

৭·২১ মহাকর্ষীয় ভর এবং জড় ভর
Gravitational mass and inertial mass

পৃথিবী যে বল দ্বারা কোন বস্তুকে টানে তা বস্তুর ভরের সমানুপাতিক। এই ভর মহাকর্ষীয় ভর। তুলাদণ্ডের সাহায্যে এই ভর নির্ণয় করা হয়। অন্য কথায় বলা যায়—তুলাদণ্ডে মেপে আমরা যে ভর নির্ণয় করি, তাই মহাকর্ষীয় ভর।

কোন বস্তুতে ধ্রুবমানের F বল প্রয়োগ করলে যদি তার ত্বরণ a হয়, তা হলে $\dfrac{F}{a} = m$-কে তার **জড় ভর** বলে। পরীক্ষায় দেখা যায় উভয় ভর একই।

৭·২২ মুক্তি বেগ
Escape velocity

আমরা জানি মহাকর্ষীয় বল কেন্দ্রগ বলে সংরক্ষণশীল। তাই কোন একটি বস্তুকে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে তা আবার মাটিতে এসে পড়ে। কিন্তু কোন বস্তুকে যদি এমন বেগে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করা হয় যে তা পৃথিবীর

অভিকর্ষীয় ক্ষেত্র অতিক্রম করে যায় তবে বস্তুটি আর কখনই পৃথিবীর পৃষ্ঠে ফিরে আসবে না। ন্যূনতম এই বেগকে মুক্তি বেগ বলে। অতএব কোন বস্তুকে ন্যূনতম যে বেগে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবী পৃষ্ঠে ফিরে আসে না তাকে মুক্তি বেগ বা পলায়ন বেগ বা নিষ্ক্রমণ বেগ বলে। একে V_E দ্বারা সূচিত করা হয়।

মুক্তি বেগের সমীকরণ বের করতে গিয়ে ধরি উৎক্ষিপ্ত বস্তুর ভর m, পৃথিবীর ভর M, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R, পৃথিবীর কেন্দ্র হতে বস্তুর দূরত্ব r, [চিত্র ৭·১৭] অতএব বস্তুর উপর অভিকর্ষ বল,

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

এখন বস্তুটি যদি অভিকর্ষ বলের বিরুদ্ধে dr পরিমাণ উপরে উঠে, তবে কাজের পরিমাণ, $dW = F.dr$

$$= \frac{G.Mm}{r} dr$$

সুতরাং অভিকর্ষীয় বল ছাড়াতে বস্তুটিকে মোট যে পরিমাণ কাজ করতে হবে, তার মান

$$W = \int dW = \int_R^{\infty} \frac{GMm}{r^2} dr, \text{ এখানে, } R = \text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধ।}$$

$$\text{বা, } W = GMm \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = GMm \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty}$$

$$\text{অর্থাৎ, } W = m \times \frac{GM}{R} \qquad (34)$$

মনে করি, বস্তুর উৎক্ষিপ্ত বেগ = v_E। তা হলে তার প্রাথমিক গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2} m v_E^2$

এই শক্তি ব্যয় করেই বস্তুটি অভিকর্ষীয় ক্ষেত্রের সীমানা ছাড়িয়ে যায় অর্থাৎ উপরোক্ত কাজ করবে।

আমরা পাই,

$$\frac{1}{2} m v_E^2 = m \frac{GM}{R}$$

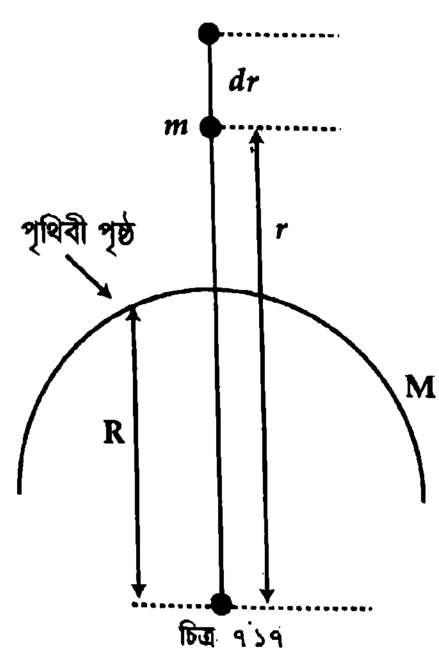
$$\text{বা, } v_E^2 = \frac{2GM}{R} \qquad (35)$$

$$\text{পুনঃ, অভিকর্ষজ ত্বরণ, } g = \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R \times R}$$

$$\frac{GM}{R} = gR$$

এখন সমীকরণ (35) হতে পাই, $v_E^2 = 2gR$

$$\boxed{\therefore v_E = \sqrt{2gR}} \qquad (36)$$



চিত্র ৭·১৭

এটাই হল মুক্তি বেগের সমীকরণ। উপরোক্ত সমীকরণে m না থাকায় আমরা বলতে পারি যে, মুক্তি বেগ বস্তুর ভরের উপর নির্ভর করে না। বস্তু ছোট বা বড় যাই হোক না কেন, মুক্তি বেগ একই হবে।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যায়, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ,

$R = 64 \times 10^5\ m$ ও $g = 9.80\ ms^{-2}$

অতএব এক্ষেত্রে মুক্তি বেগ,

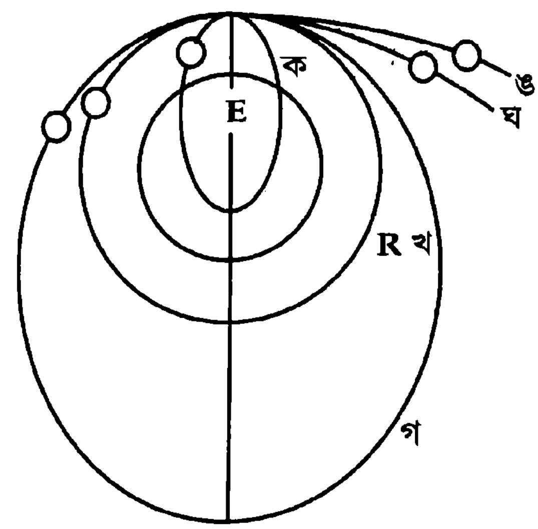
$$v_E = \sqrt{2 \times 9.80 \times 64 \times 10^5}$$

$$= 11.20 \times 10^3\ ms^{-1}$$

$$\boxed{= 11.20\ kms^{-1} = 7 \text{ মাইল/সে. (প্রায়)}}$$

[1 মাইল = 1.6093 km]

= 25000 মাইল/ঘণ্টা (প্রায়)



চিত্র ৭.১৮

সুতরাং কোন বস্তুকে যদি প্রতি ঘণ্টায় 25000 মাইল বেগে বা এর অপেক্ষা অধিক বেগে উৎক্ষেপ করা হয়, তবে তা আর ভূ-পৃষ্ঠে ফিরে আসে না।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কোন বস্তুকে v বেগে উপর দিকে নিক্ষেপ করলে পৃথিবীর আকর্ষণ বলের দ্বারা বস্তুটির বিভিন্ন পরিণতি হতে পারে। যথা :

(১) যদি $v^2 < \frac{v_E^2}{2}$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7.88\ kms^{-1}$ অপেক্ষা কম হয়, তবে তা উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করবে এবং অবশেষে পৃথিবীতে ফিরে আসবে [চিত্র ৭.১৮-এ (ক)]।

(২) যদি $v^2 = \frac{v_E^2}{2}$ হয় অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7.88\ kms^{-1}$ হয়, তবে বস্তুটি বৃত্তাকার পথে পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করবে এবং চাঁদের মত উপগ্রহে পরিণত হবে [চিত্র ৭.১৮-এ (খ)]।

(৩) যদি $v^2 > \frac{v_E^2}{2}$ কিন্তু $< v_E^2$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $7.88\ kms^{-1}$ হতে $11.2\ kms^{-1}$ এর মধ্যে থাকে, তবে পৃথিবীকে একটি ফোকাসে রেখে তা উপবৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করতে থাকবে [চিত্র ৭.১৮-এ (গ)]।

(৪) যদি $v = v_E$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ $11.2\ kms^{-1}$ অর্থাৎ মুক্তি বেগের সমান হয়, তবে বস্তুটি একটি অধিবৃত্ত পথে পৃথিবী পৃষ্ঠ ছেড়ে যায় এবং তা পৃথিবীর আকর্ষণ ক্ষেত্র অতিক্রম করে বাইরে চলে যাবে [চিত্র ৭.১৮-এ (ঘ)]।

(৫) যদি $v > v_E$ হয়, অর্থাৎ উৎক্ষেপণ বেগ মুক্তি বেগ অপেক্ষা বেশি হয়, তবে বস্তু পরাবৃত্ত পথে পৃথিবী-পৃষ্ঠ ছেড়ে যায় এবং তা আর পৃথিবীতে ফিরে আসে না [চিত্র ৭.১৮-এ (ঙ)]।

৭.২৩ স্বাভাবিক ও কৃত্রিম উপগ্রহ
Natural and artificial satellites

সূচনা : আমরা জানি সূর্য ও তার চারদিকের গ্রহ, উপগ্রহ, উল্কা, নীহারিকা ইত্যাদি নিয়ে যে জগৎ তার নাম সৌরজগৎ। সৌরজগতের কেন্দ্রে থাকে সূর্য। আর গ্রহগুলো সূর্যকে কেন্দ্র করে তার চারদিক প্রদক্ষিণ করছে। গ্রহগুলোকে কেন্দ্র করে উপগ্রহগুলো তাদের চারদিকে ঘুরছে। যেমন পৃথিবী একটি গ্রহ। এটি সূর্যের চারদিকে ঘুরছে। চন্দ্র পৃথিবীর একটি উপগ্রহ। চন্দ্র পৃথিবীর চারদিক প্রদক্ষিণ করছে।

স্বাভাবিক উপগ্রহ : যে সব বস্তু বা জ্যোতিষ্ক গ্রহের চারদিকে ঘোরে, তাদেরকে উপগ্রহ বলে। **যে সব উপগ্রহ প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্ট তাদেরকে স্বাভাবিক উপগ্রহ বলে।** যেমন চন্দ্র প্রাকৃতিক কারণে সৃষ্টি হয়েছে। এটি

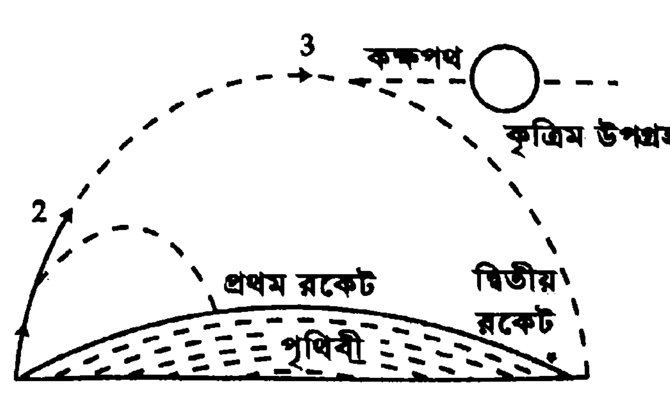
পৃথিবীর চারদিকে ঘুরছে। অতএব চন্দ্র বা চাঁদ পৃথিবীর একটি স্বাভাবিক উপগ্রহ। তেমনি অন্যান্য গ্রহগুলোরও স্বাভাবিক উপগ্রহ রয়েছে।

কৃত্রিম উপগ্রহ : আমরা জানি সৌরজগৎ নামে একটি জগৎ রয়েছে যার কেন্দ্রে থাকে সূর্য। সূর্য হতে ছিটকে আসা কতকগুলো জ্যোতিষ্ক সূর্যকে প্রদক্ষিণ করছে। এদের নাম **গ্রহ** (planet)। পৃথিবী সূর্যের একটি গ্রহ। পুনঃ, গ্রহ হতে ছিটকে আসা কতকগুলো জ্যোতিষ্ক গ্রহগুলোকে প্রদক্ষিণ করছে। এদের নাম **উপগ্রহ** (satellite)। চাঁদ পৃথিবীর একটি উপগ্রহ যা প্রায় ৩০ দিনে পৃথিবীকে একবার প্রদক্ষিণ করে। সৃষ্টির আদিকাল থেকেই মানুষের মনে কৌতূহল জাগছে কি করে চাঁদ পৃথিবীর চারদিকে ঘুরছে। এই প্রশ্নের জবাবে বিজ্ঞানীরা বলেছেন অভিকর্ষের দরুন চাঁদের উপর পৃথিবীর কেন্দ্রমুখী বল এর কারণ। এই কেন্দ্রমুখী বল যদি না থাকত, তাহলে চাঁদ মহাশূন্যে মিলিয়ে যেত। পৃথিবীর চারদিকে চাঁদের প্রদক্ষিণের দরুন সৃষ্ট কেন্দ্রবিমুখী বল পৃথিবী কর্তৃক প্রযুক্ত কেন্দ্রমুখী বলের সমান ও বিপরীত হওয়ায় চাঁদ সোজা না গিয়ে পৃথিবীর চারদিকে বৃত্তাকার পথে ঘুরছে। **এই তত্ত্বের উপর ভিত্তি করে মানুষ মহাশূন্যে পাড়ি দেয়ার জন্যে যে উপগ্রহ তৈরি করেছে, তার নাম কৃত্রিম উপগ্রহ।**

1957 সালের 4th অক্টোবর রাশিয়ার বিজ্ঞানীরা সর্বপ্রথম মহাশূন্যে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পাঠান। এর নাম **স্পুটনিক**-1। সে বছরেই আরো একটি কৃত্রিম উপগ্রহ মহাশূন্যে পাঠান হয়। এর নাম **স্পুটনিক**-2। এই সময় আমেরিকার বিজ্ঞানীরা পেছনে ছিলেন না। তাঁরাও 1958 সালে মহাশূন্যে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ উৎক্ষেপণ করেন। এর নাম **এক্সপ্লোরার**-1। এমনিভাবে মহাশূন্যে কৃত্রিম উপগ্রহ পাঠিয়ে পৃথিবী তথা সৌরজগতের নানা রকম রহস্য উদঘাটনের কাজ চলছে। রাশিয়ার বিখ্যাত বিজ্ঞানী **ইউরি গ্যাগারিন** ভস্টক-1 কৃত্রিম উপগ্রহের সাহায্যে সর্বপ্রথম মহাশূন্যে বিচরণ করেন।

পরীক্ষার সাহায্য দেখা গেছে যে কোন একটি বস্তুকে পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে প্রায় 930 km উপরে তুলে 8·05 kms^{-1} হতে 11·1 kms^{-1} বেগে মহাশূন্যে উৎক্ষেপণ করলে তা পৃথিবীর একটি কৃত্রিম উপগ্রহ হিসেবে চাঁদের মত পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করবে। কিন্তু কোন বস্তুকে এত উপরে তুলে এত বেশি বেগ দেয়া সম্ভব নয়। কারণ বায়ুস্তরের সাথে এর ঘর্ষণে এত অধিক তাপ উৎপন্ন হবে যে কৃত্রিম উপগ্রহটি পুড়ে ভস্মীভূত হবে। তাই বায়ুতে এত বেশি বেগ না দিয়ে বায়ুস্তর অতিক্রম করার পর কৃত্রিম উপগ্রহে এত বেশি বেগ প্রদান করা হয় এবং তা প্রদান করা হয় একটি রকেটের সাহায্যে **তিনটি** ধাপে। কৃত্রিম উপগ্রহটি বসানো হয় রকেটের নাকের ডগায় এবং জ্বালানি ও অন্যান্য যন্ত্রপাতি বসানো হয় রকেটের ভেতরে। ধাপগুলো নিম্নরূপ :

সবচেয়ে নিচু স্তরের রকেটটি সর্বপ্রথমে কাজ শুরু করে। এটি উপগ্রহ ও অপর দুটি স্তরের রকেটসহ খানিকটা খাড়া উপরে উঠে আস্তে আস্তে বাঁক নিতে থাকে। এই ধাপ প্রয়োজনীয় বেগের $\frac{1}{6}$ অংশ যোগানের পর খসে পড়ে। এই সময় দ্বিতীয় ধাপ কাজ শুরু করে এবং এই ধাপটি উপগ্রহটির বেগের প্রায় $\frac{1}{3}$ অংশ যোগানোর পর খসে পড়ে। তার পর শুরু হয় তৃতীয় ধাপের কাজ। এই ধাপটি উপগ্রহটিতে প্রয়োজনীয় বেগ প্রদান করে নিজে খসে পড়ে। উপগ্রহটি তখন পৃথিবী প্রদক্ষিণ করতে শুরু করে।



চিত্র ৭·১৯

৭·২৪ বৃত্তাকার পথে পৃথিবী প্রদক্ষিণ কালে কৃত্রিম উপগ্রহের কক্ষীয় বেগ, আবর্তন কাল এবং উচ্চতার রাশিমালা

Expression for orbital velocity, time period and height of an artificial satellite rotating around the earth in a circular path

(ক) বেগ : মনে করি m ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অবস্থান করে v বেগে বৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে। এখানে **উপগ্রহটির উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল = উপগ্রহটির ঘূর্ণনের জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল**। মনে করি পৃথিবীর ভর M এবং এর ব্যাসার্ধ R।

উপগ্রহটির উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল $F = \frac{GMm}{(R+h)^2}$ (37)

এটি পৃথিবীর কেন্দ্রাভিমুখী ক্রিয়া করছে। পুনঃ, উপগ্রহটির ঘূর্ণনের জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল

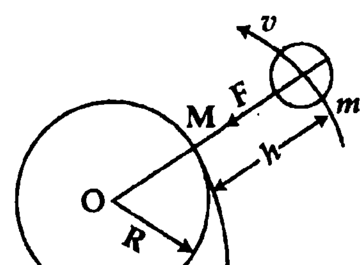
$$F' = \frac{mv^2}{(R+h)} \qquad (38)$$

গতির সাম্যাবস্থা হতে পাই $F = F'$

$$\frac{mv^2}{(R+h)} = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

$$\text{বা, } v^2 = \frac{GM}{(R+h)}$$

$$\therefore \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}} \ldots \qquad (39)$$



চিত্র ৭·২০

এটিই হল h উচ্চতায় উপগ্রহটির প্রদক্ষিণ বেগ।

উল্লেখ্য কক্ষপথের ব্যাসার্ধ কম হলে বেগ কম হবে। শুধু তাই নয় সমীকরণে m না থাকায় উপগ্রহটির বেগ এর ভরের উপর নির্ভর করে না।

(খ) আবর্তনকাল বা পর্যায়কাল :

মনে করি কৃত্রিম উপগ্রহটির আবর্তন বা পর্যায়কাল = T, যদি উপগ্রহটির কৌণিক বেগ ω হয়, তবে

$v = \omega \times$ বৃত্তাকার পথের ব্যাসার্ধ

$$\text{বা, } v = \omega\,(R+h)$$

$$\text{বা, } v = \frac{2\pi}{T}(R+h)$$

$$\text{বা, } T = \frac{2\pi}{v}(R+h)$$

উক্ত সমীকরণে v এর মান বসিয়ে পাই

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{\sqrt{\frac{GM}{(R+h)}}}$$

$$\text{বা, } T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} \qquad (40)$$

এটিই হল কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তন কালের রাশিমালা।

(গ) কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা :

মনে করি পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা $= h$

সমীকরণ (40)-এর উভয় পার্শ্বকে বর্গ করে পাই

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(R+h)^3}{GM}$$

বা, $(R+h)^3 = \dfrac{GMT^2}{4\pi^2}$

বা, $R + h = \left(\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R \qquad (41)$$

এটিই হল কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতার রাশিমালা এবং আবর্তনকাল ও উচ্চতার মধ্যে সম্পর্ক।

৭.২৫. ভূ-স্থির উপগ্রহ
Geostationary satellite

আমরা জানি পৃথিবী 24 ঘণ্টায় তার অক্ষের চারদিকে একবার ঘুরে আসে। এর নাম আহ্নিক গতি যার ফলে দিবা-রাত্র হয়। কোন কৃত্রিম গ্রহের আবর্তন কাল এবং নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর আবর্তন কাল সমান হলে পৃথিবী পৃষ্ঠের একজন পর্যবেক্ষকের কাছে একে সব সময়ই স্থিতিশীল মনে হবে। পৃথিবীর যে স্থানের খাড়া উপর থেকে একে বৃত্তাকার কক্ষপথে স্থাপন করা হয় এটি পৃথিবীর ঐ স্থানের উপরই সব সময় স্থিতিশীল আছে বলে মনে হবে। এর নামই ভূ-স্থির উপগ্রহ এবং যে কক্ষপথে কৃত্রিম উপগ্রহ স্থিতিশীল থাকে তাকে পার্কিং (parking) কক্ষপথ বলে।

সংজ্ঞা : কোন কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর আবর্তনকালের সমান হলে পৃথিবী সাপেক্ষে এটি স্থির থাকবে। এই ধরনের উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে। ভূ-স্থির উপগ্রহের কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।

মনে করি পৃথিবীর কেন্দ্রের সাথে এককেন্দ্রিক ভাবে নিরক্ষতলে (In the plane of equator) m ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিকে ঘুরছে। উপগ্রহের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ r এবং কক্ষপথে উপগ্রহের গতিবেগ এর উপর কেন্দ্রমুখী বা কেন্দ্রবিমুখী বল $F = \dfrac{mv^2}{r}$ (42)

পুনঃ, পৃথিবীর ভর M হলে মহাকর্ষীয় বল

$$F' = \frac{GMm}{r^2} \qquad (43)$$

$$F = F'$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$$

বা $v^2 = \dfrac{GM}{r}$ (44)

কিন্তু অভিকর্ষীয় ত্বরণ

$g = \dfrac{GM}{R^2}$, এখানে R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং g = ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষীয় ত্বরণ

বা, $GM = gR^2$

$$v^2 = \frac{gR^2}{r}$$

বা, $$v = R\sqrt{\frac{g}{r}} \qquad (45)$$

যদি কৃত্রিম উপগ্রহের কক্ষপথ বরাবর আবর্তন কাল T হয়, তবে

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{R\sqrt{\frac{g}{r}}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{R\sqrt{g}}$$

অর্থাৎ আবর্তন কাল

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{R\sqrt{g}} \qquad (46)$$

এখন কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তন কাল এবং পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকের আবর্তন কাল সমান হলে পৃথিবী থেকে উপগ্রহটিকে একই স্থানে স্থির দেখা যায়। এর নাম **ভূ-স্থির উপগ্রহ** এবং ঐ কক্ষপথের নাম **পার্কিং কক্ষপথ**। উল্লেখ্য, পার্কিং কক্ষপথে রিলে উপগ্রহ স্থাপন করে পৃথিবীর এক স্থানের সংবাদ, খেলাধূলা, বিভিন্ন অনুষ্ঠান ইত্যাদি পৃথিবীর অন্য স্থানে ধারাবাহিকভাবে দেখানো যায়।

৭·২৬ কৃত্রিম উপগ্রহের ব্যবহার
Uses of artificial satellite

আধুনিক বিজ্ঞানের যুগে কৃত্রিম উপগ্রহের বহুল ব্যবহার রয়েছে। ব্যবহারগুলো নিচে উল্লেখ করা হল ঃ

(১) পৃথিবীর আকার ও আকৃতি সম্পর্কিত ভূ-জরিপ করা যায়।

(২) এর সাহায্যে ভূ-পৃষ্ঠের এলাকা সম্পর্কে বেতার ও টেলিভিশনের মাধ্যমে তথ্য প্রদান করা যায়।

(৩) উচ্চ বায়ুমণ্ডলের চাপ, তাপমাত্রা বা গঠন নির্ণয় করা যায়।

(৪) ঊর্ধ্বাকাশের আয়নমণ্ডল, কসমিক বিকিরণ, চার্জিত কণিকার ভ্যান আসেল বেষ্টনী, সৌর বিকিরণের প্রভাব ইত্যাদি সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ করা যায়।

(৫) আবহাওয়া সম্পর্কীয় নিরীক্ষণ ও পূর্বাভাস পাওয়া যায়।

(৬) বহির্বিশ্বে রন্‌জেন রশ্মি, গামারশ্মি ইত্যাদির উৎস সংক্রান্ত ও জ্যোতির্বিজ্ঞানের অন্যান্য গবেষণা চালানো যায়।

(৭) প্রতিরক্ষামূলক পাহারা ও বিভিন্ন সামরিক ব্যবস্থায় এটি ব্যবহৃত হয়।

(৮) আন্তমহাদেশীয় যোগাযোগে এটি ব্যবহার করা হয়।

(৯) পৃথিবীর যে-কোন দেশে অনুষ্ঠিত খেলাধূলা বা যে-কোন অনুষ্ঠান ধারাবাহিকভাবে টেলিভিশনের মাধ্যমে দেখানো হয়।

(১০) কৃত্রিম উপগ্রহের সাহায্যে সমুদ্রের গভীরতা নির্ণয় করা যায়।

মহাশূন্যচারীর ওজনহীনতা ঃ

আমরা জানি, ওজন, $W = mg$। অর্থাৎ, ভর $\times$ অভিকর্ষ ত্বরণের গুণফল হল ওজন। বস্তুর ভর নির্দিষ্ট। মানুষের ভরও নির্দিষ্ট। কিন্তু g-এর মান তারতম্য হলে ওজন কম-বেশি হয়।

মহাশূন্যচারীরা খেয়াযানে পৃথিবী থেকে একটি নির্দিষ্ট উচ্চতায় বৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করে। এই বৃত্তাকার গতির জন্য পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে ঐ উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মানের সমান মানের একটি ত্বরণ সৃষ্টি হয়। ফলে এই মহাশূন্য যানের দেওয়াল বা পাটাতনের সাপেক্ষে মহাশূন্যচারীর ত্বরণ $(g - g) = 0$ হয়। তাই মহাশূন্যচারীর ওজন $W = m \times 0 = 0$।

৭.২৭ গ্রহের গতি

Motion of planets

প্রত্যেক গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে মোটামুটি বৃত্তাকার কক্ষপথে সূর্যের চতুর্দিকে পরিভ্রমণ করছে। গ্রহের উপর সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল হতে প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বলের উদ্ভব হয়।

ধরা যাক m ভরের একটি গ্রহ সূর্যকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে v সমদ্রুতিতে পরিভ্রমণ করছে এবং সূর্যের ভর M ; তা হলে তাদের মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ $= \frac{GMm}{r^2}$

গ্রহের বৃত্তাকার গতির জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল $= \frac{mv^2}{r}$

$$\therefore \frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{বা,} \quad M = \frac{v^2 r}{G}$$

গ্রহটি সূর্যের চতুর্দিকে T সময়ে একবার পরিভ্রমণ করলে, $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$\left[\quad v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} \right]$$

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \qquad (47)$$

T এবং r জানা থাকলে সূর্যের ভর M নির্ণয় করা যায়।

সূর্যের ভর ঃ পৃথিবী সূর্যের চারদিকে পরিভ্রমণ করছে। পৃথিবীর পর্যায়কাল T প্রায় 365 দিন $= 365 \times 24 \times 60 \times 60$ সেকেন্ড এবং পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে সূর্যের দূরত্ব $= 1{\cdot}5 \times 10^{11}$m।

সমীকরণ (47)-এ মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই

$$\text{সূর্যের ভর,} \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4 \times 9{\cdot}87 \times (1{\cdot}5 \times 10^{11})^3}{6{\cdot}673 \times 10^{-11} \times (365 \times 24 \times 60 \times 60)^2} = 2 \times 10^{30}\,\text{kg}$$

স্মরণিকা

মহাকর্ষ ঃ নভোমণ্ডলে অবস্থিত দুটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে মহাকর্ষ বলে।

অভিকর্ষ বা মাধ্যাকর্ষণ ঃ পৃথিবী এবং অন্য একটি বস্তু বা বস্তুকণার মধ্যকার আকর্ষণ বলকে অভিকর্ষণ বা মাধ্যাকর্ষণ বলে।

নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র ঃ মহাবিশ্বের যে কোন দুটি বস্তুকণা পরস্পরকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণ বল বস্তু দুটির ভরের গুণফলের সমানুপাতিক, তাদের দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক এবং বস্তু দুটির সংযোগকারী সরলরেখা বরাবর ক্রিয়াশীল।

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, G ঃ একক ভরবিশিষ্ট দুটি বস্তুকণা একক দূরত্বে থেকে যে পরিমাণ বল দ্বারা পরস্পরকে আকর্ষণ করে তার সংখ্যাগত মানকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক বলে। একে G দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অভিকর্ষজ বা অভিকর্ষীয় ত্বরণ ঃ কোন স্থানে অভিকর্ষের টানে মুক্তভাবে পড়ন্ত বস্তুর বেগ যে হারে বৃদ্ধি পায় তাকে ঐ স্থানের অভিকর্ষজ বা অভিকর্ষীয় ত্বরণ বলে। অথবা, বস্তুতে অভিকর্ষ বল কর্তৃক যে ত্বরণ উৎপন্ন হয় তাকে অভিকর্ষজ ত্বরণ বলে।

ভর ঃ কোন একটি বস্তুতে যে পরিমাণ পদার্থ আছে, তাকে তার ভর বলে।

ওজন ঃ কোন একটি বস্তু যে পরিমাণ বল দ্বারা পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে আকৃষ্ট হয় তাকে তার ওজন বলে।

অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র ঃ বস্তুকে যেভাবেই রাখা হোক না কেন তার ওজন যে বিশেষ বিন্দুর মধ্য দিয়ে বস্তুর ওপর সর্বদা ক্রিয়া করে ঐ বিন্দুকে অভিকর্ষ কেন্দ্র বা ভারকেন্দ্র বলে।

ভরকেন্দ্র ঃ বস্তুর কণাগুলোর সমস্ত ভরকে একটি মাত্র বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত মনে করলে ঐ বিন্দুর মধ্য দিয়ে সমস্ত কণার ওপর তাদের ভরের সমানুপাতিক ক্রিয়ারত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি ক্রিয়া করে বলে বিবেচিত হয়। ঐ বিন্দুকে বস্তুর ভরকেন্দ্র বলে।

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ঃ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে একক ভরের কোন বস্তু স্থাপন করলে তার উপর যে বল প্রযুক্ত হয় তাকে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য বলে।

BG & JEWEL

মহাকর্ষীয় বিভব : অসীম দূর থেকে একক ভরের কোন বস্তুকে মহাকর্ষীয় ক্ষেত্রের কোন বিন্দুতে আনতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ঐ বিন্দুর মহাকর্ষীয় বিভব বলে।

কেপলার-এর সূত্র :

(১) উপবৃত্ত সূত্র : প্রতিটি গ্রহ সূর্যকে উপবৃত্তের নাভিতে রেখে একটি উপবৃত্তাকার পথে প্রদক্ষিণ করছে।

(২) ক্ষেত্রফল সূত্র : গ্রহ এবং সূর্যের সংযোগকারী ব্যাসার্ধ রেখা সমান সময়ে সমান ক্ষেত্রফল অতিক্রম করে।

(৩) সময়ের সূত্র : প্রতিটি গ্রহের পর্যায় কালের বর্গ সূর্য হতে তার গড় দূরত্বের ঘনফলের সমানুপাতিক।

মুক্তি বেগ : কোন বস্তুকে ন্যূনতম যে বেগে ঊর্ধ্বে উৎক্ষেপ করলে তা আর পৃথিবী পৃষ্ঠে ফিরে আসে না তাকে মুক্তি বেগ বলে।

ভূ-স্থির উপগ্রহ : কোন কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল নিজ অক্ষের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবীর আবর্তনকালের সমান হলে পৃথিবী সাপেক্ষে এটি স্থির থাকবে। এ ধরনের উপগ্রহকে ভূ-স্থির উপগ্রহ বলে।

পার্কিং কক্ষপথ : ভূ-স্থির উপগ্রহের কক্ষপথকে পার্কিং কক্ষপথ বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

মহাকর্ষ বলের মান, $F = G\frac{m_1 \times m_2}{d^2}$ (1)

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = \frac{F \times d^2}{m_1 m_2}$ (2)

ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{GM}{R^2}$ (3)

$$g = \frac{4}{3}\pi G R \rho \quad (4)$$

ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_h = \frac{GM}{(R+h)^2}$ (5)

$$g_h = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right), \text{ যখন } h << R \quad (6)$$

ভূ-পৃষ্ঠের অভ্যন্তরে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_d = \frac{4}{3}\pi G(R-h)\rho$ (7)

$$g_d = g\left(1 - \frac{h}{R}\right) \quad (8)$$

পৃথিবীর ভর, $M = \frac{gR^2}{G}$ (9)

পৃথিবীর ঘনত্ব, $\rho = \frac{3g}{4\pi GR}$ (10)

বস্তুর ওজন, $W = mg$ (11)

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য, $E = \frac{GM}{r^2}$ (12)

মহাকর্ষীয় বিভব, $V = -\frac{GM}{r}$ (13)

মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ও বিভবের সম্পর্ক : $E = -\frac{dV}{dr}$ (14)

মুক্তি বেগ, $v_E = \sqrt{2gR}$ (15)

উপগ্রহের কক্ষীয় বেগ, $v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$ (16)

কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তন কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$ (17)

কৃত্রিম উপগ্রহের উচ্চতা, $h = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R$ (18)

সমাধানকৃত উদাহরণ

P. √

১। 0·1 kg এবং 0·2 kg ভরের দুটি বস্তু 1 m দূরে অবস্থিত। বস্তু দুটি একে অপরকে কত বলে আকর্ষণ করবে ? [$G = 6{\cdot}66 \times 10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2}$]

মনে করি বল = F

আমরা পাই, $F = G\dfrac{m_1 \times m_2}{d^2}$ (1)

মানগুলো সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই,

$$F = 6{\cdot}66 \times 10^{-11}\ Nm^2\ kg^{-2} \times \frac{0{\cdot}1\ kg \times 0{\cdot}2\ kg}{(1\ m)^2}$$

$$= 13{\cdot}32 \times 10^{-13}\ N$$

এখানে, $m_1 = 0{\cdot}1$ kg
$m_2 = 0{\cdot}2$ kg
$d = 1$ m
$G = 6{\cdot}66 \times 10^{-11}\ N\ m^2 kg^{-2}$

২। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4 \times 10^6$ m এবং পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $9{\cdot}8\ ms^{-2}$। ভূ-পৃষ্ঠ থেকে $6{\cdot}4 \times 10^5$m উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বের কর। [য. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

পৃথিবী পৃষ্ঠে, $g = \dfrac{GM}{R^2}$ (1)

এবং পৃথিবী পৃষ্ঠ থেকে h উচ্চতায়,

$g' = \dfrac{GM}{(R+h)^2}$ (2)

সমীকরণ (2) ও (1) থেকে পাই,

$$\frac{g'}{g} = \frac{\dfrac{GM}{(R+h)^2}}{\dfrac{GM}{R^2}} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

বা, $g' = \dfrac{R^2}{(R+h)^2}\, g$

$$\therefore g' = \frac{(6{\cdot}4 \times 10^6)^2}{(6{\cdot}4 \times 10^6 + 6{\cdot}4 \times 10^5)^2} \times 9{\cdot}8$$

$$= 8{\cdot}099\ ms^{-2}$$

এখানে, $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
$h = 6{\cdot}4 \times 10^5$ m
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

$\dfrac{R}{R+h}$ g'/g^2

P. √

৩। পৃথিবীকে $6{\cdot}4 \times 10^6$ m ব্যাসার্ধের এবং 5·5 gm/cc ঘনত্বের গোলক মনে করে এর পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় কর। [$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ N-m²/kg²] [ব. বো. ২০০৩]

মনে করি, অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g$

আমরা জানি, $\rho = \dfrac{3g}{4\pi GR}$

$g = 4/3\ \pi R \rho G$

বা, $g = \dfrac{4\pi\rho GR}{3}$

$$= \frac{4 \times 3{\cdot}141 \times 5{\cdot}5 \times 10^3 \times 6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 6{\cdot}4 \times 10^6}{3}$$

$= 9{\cdot}83\ ms^{-2}$ $\approx 9.84\ m/s^2$

এখানে,
$R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
$\rho = 5{\cdot}5$ gm/cc
$= 5{\cdot}5 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$
$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ N-m²/kg²

P, √

৪। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6{\cdot}4 \times 10^3$ km ও মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ N\text{-}m^2\ kg^{-2}$ ধরে এর গড় ঘনত্ব নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০১]

আমরা জানি, $\rho = \dfrac{3g}{4\pi GR}$

$$\rho = \frac{3 \times 9{\cdot}8}{4 \times 3{\cdot}14 \times 6{\cdot}67 \times 10^{-11} \times 6{\cdot}4 \times 10^6}$$

$$= 5{\cdot}48 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$$

এখানে,
$R = 6{\cdot}4 \times 10^3\ km = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m
$G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}\ N\text{-}m^2\text{-}kg^{-2}$
$g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$

৫। পৃথিবীকে 6400 km ব্যাসার্ধের একটি গোলক ধরলে ভূ-পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান ভূ-পৃষ্ঠের অভিকর্ষীয় ত্বরণের মানের $\frac{1}{64}$ অংশ হবে। [সি. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)]

আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2} \qquad (1)$$

h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \qquad (2)$

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$$\frac{g'}{g} = \frac{GM}{(R+h)^2} \times \frac{R^2}{GM} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

বা, $\frac{g/64}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ বা, $\frac{1}{64} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$

বা, $\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 64 = 8^2$ বা, $\frac{R+h}{R} = 8$

$$1 + \frac{h}{R} = 8$$

$$\frac{h}{R} = 8 - 1 = 7$$

$$h = 7R = 7 \times 6.4 \times 10^6 = 44.8 \times 10^6 \text{m}$$

$$= 4.48 \times 10^4 \text{ km}$$

এখানে,
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6400$ km
$= 6400 \times 10^3$ m
$= 6.4 \times 10^6$ m
ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g$
h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = \frac{g}{64}$
পৃথিবীর ভর $= M$
উচ্চতা, $h = ?$

৬। বৃহস্পতির ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 1.9×10^{27} kg এবং 7×10^7 m হলে এর মুক্তি বেগ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৪]

আমরা জানি, মুক্তি বেগ

$$v_E = \sqrt{2gR} \qquad (1)$$

আবার, $g = \frac{GM}{R^2} \qquad (2)$

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$$v_E = \sqrt{\frac{2 \times GM}{R^2} \times R} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$v_E = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.9 \times 10^{27}}{7 \times 10^7}}$$

$$= 6.02 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
বৃহস্পতির ভর, $M = 1.9 \times 10^{27}$ kg
বৃহস্পতির ব্যাসার্ধ, $R = 7 \times 10^7$ m
মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

৭। একটি বস্তুর ভর 12 মিলিগ্রাম। পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে বস্তুটি কত বলে আকর্ষিত হবে ? অভিকর্ষীয় ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}. [চ. বো ২০০৪]

আমরা জানি,

$$F = mg$$

$$= 12 \times 10^{-6} \times 9.8$$

$$= 117.6 \times 10^{-6} \text{ N}$$

এখানে,
$m = 12$ মিলিগ্রাম $= 12 \times 10^{-6}$ kg
$g = 9.8$ ms^{-2}

৮। একটি বস্তুর ওজন পৃথিবীতে 56.84 N ও চন্দ্রে 9.8 N। চন্দ্র অপেক্ষা পৃথিবীতে অভিকর্ষীয় ত্বরণ কত গুণ ?

ধরি অভিকর্ষীয় ত্বরণ পৃথিবীতে g_e ও চন্দ্রে g_m এবং বস্তুর ভর M।

তাহলে, বস্তুটির ওজন, পৃথিবীতে, $F_e = Mg_e$ ও চন্দ্রে, $F_m = Mg_m$

$$\frac{Mg_e}{Mg_m} = \frac{56.84 \text{ N}}{9.8 \text{N}} = 5.8$$

কাজেই, $\frac{g_e}{g_m} = 5.8$

এখানে,
$F_e = 56.84$ N
$F_m = 9.8$ N

৯। চন্দ্রের ভর m পৃথিবীর ভর M-এর $\frac{1}{80}$ ভাগ ও চন্দ্রের ব্যাসার্ধ r পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R-এর $\frac{1}{4}$ ভাগ। চন্দ্রপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

মনে করি পৃথিবীর পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান = g_e এবং চন্দ্র পৃষ্ঠে = g_m

আমরা পাই, $g_e = \frac{GM}{R^2}$

ও $g_m = \frac{Gm}{r^2}$

$\therefore \frac{g_m}{g_e} = \frac{m}{M} \times \left(\frac{R}{r}\right)^2$

$\frac{w_m}{w_e} = \frac{g_m}{g_e} = \frac{M_m}{M_e} \times$

প্রশ্নানুসারে, $M = 80m$ ও $R = 4r$

$\frac{g_m}{g_e} = \frac{1}{80} \times (4)^2 = \frac{1}{5}$

বা, $g_m = \frac{1}{5} g_e$

১০। পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 81 গুণ এবং তাদের কেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব $R = 38.6 \times 10^4$ km। চন্দ্র ও পৃথিবীর সংযোগকারী রেখার কোথায় কোন বস্তুর উপর উভয়ের টান সমান হবে ?

$\boxed{34.74 \times 10^4 \text{ K}}$

আমরা পাই, $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$

ধরি পৃথিবী ও চন্দ্রের ভর যথাক্রমে M_e ও M_m এবং পৃথিবীর কেন্দ্র হতে নির্ণেয় দূরত্ব = r। তাহলে ঐ স্থানে m_0 ভরের যে-কোন বস্তুর উপর টান,

$F = \frac{GM_e}{r^2} \times m_0 = \frac{GM_m}{(R-r)^2} \times m_0$

বা, $\frac{R-r}{r} = \left(\frac{R}{r} - 1\right) = \sqrt{\frac{M_m}{M_e}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$

বা, $\frac{R}{r} = \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9}$

$r = \frac{9}{10} \times R = \frac{9}{10} \times 38.6 \times 10^4$ km

$= 34.74 \times 10^4$ km

এখানে, $\frac{M_e}{M_m} = 81$

$R = 38.6 \times 10^4$ km

১১। পৃথিবীকে 6.4×10^6 m ব্যাসার্ধের এবং 5.5×10^3 kg/m³ ঘনত্বের একটি গোলক বিবেচনা করে এর পৃষ্ঠে মহাকর্ষীয় বিভব নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$V = -\frac{GM}{R}$

আবার পৃথিবীর ভর, $\boxed{M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}$

$V = -\frac{G\,4\pi R^3 \rho}{3R}$

$= -\frac{4}{3}\pi G R^2 \rho$

$= -\frac{4}{3} \times 3.14 \times 6.67 \times 10^{-11} \times (6.4 \times 10^6)^2 \times 5.5 \times 10^3$

$= -6.32 \times 10^7$ N m kg^{-1} $= -6.32 \times 10^7$ Jkg^{-1}

এখানে,

ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m

ঘনত্ব, $\rho = 5.5 \times 10^3$ kg/m³

মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²kg⁻²

মহাকর্ষীয় বিভব, V = ?

$\rho = $ I

M

=

১২। পৃথিবীর অভিকর্ষীয় ত্বরণ $g = 9.8$ ms^{-2} এবং ব্যাসার্ধ $R = 6400$ km। একটি বস্তুর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর।

[য. বো. ২০০২; চ. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০১; ব. বো. ২০০১

মনে করি মুক্তিবেগ = v_e

আমরা পাই, $v_e = \sqrt{2gR}$

নির্ণেয় বেগ, $v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \text{ ms}^{-2} \times 64 \times 10^5 \text{ m}}$

$= 11.2 \times 10^3$ ms^{-1} $= 11.2$ kms^{-1}

এখানে, $R = 6400$ km $= 64 \times 10^5$ m

$g = 9.8$ ms^{-2}

BG & JEWEL

১৩। মঙ্গল গ্রহের ব্যাস 6000 km এবং এর পৃষ্ঠের অভিকর্ষীয় ত্বরণ 3·8 ms⁻²। মঙ্গল গ্রহের পৃষ্ঠ হতে একটি বস্তুর মুক্তিবেগ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬]

আমরা জানি,

$$v_e = \sqrt{2gR}$$
$$= \sqrt{2 \times 3{\cdot}8 \times 3 \times 10^6}$$
$$= 4{\cdot}77 \times 10^3\ \text{ms}^{-1}$$
$$= 4{\cdot}77\ \text{kms}^{-1}$$

এখানে,

ব্যাস, $d = 6000\ \text{km} = 6 \times 10^6\ \text{m}$

ব্যাসার্ধ, $R = \frac{d}{2} = 3 \times 10^6\ \text{m}$

ত্বরণ, $g = 3{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

মুক্তিবেগ, $v_e = ?$

১৪। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে 700 km ঊর্ধ্বে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীকে প্রদক্ষিণ করছে। উপগ্রহটির অনুভূমিক বেগ নির্ণয় কর। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km এবং পৃথিবী পৃষ্ঠে $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$] [য. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)]

মনে করি পৃথিবীর ভর=M, উপগ্রহের ভর=m, উপগ্রহের অনুভূমিক বেগ $= v$ ও ভূ-পৃষ্ঠ হতে উপগ্রহের উচ্চতা=h

উপগ্রহের উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল $= \dfrac{GMm}{(R+h)^2}$

উপগ্রহের ঘূর্ণনের জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল $= \dfrac{mv^2}{(R+h)}$। উপগ্রহের ঘূর্ণনের জন্য এই আকর্ষণ বলই প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল জোগায়।

$$\frac{GMm}{(R+h)^2} = \frac{mv^2}{R+h}$$

বা, $v^2 = \dfrac{GM}{(R+h)}$

পুনরায়, পৃথিবী পৃষ্ঠে, $g = \dfrac{GM}{R^2}$

$$v^2 = \frac{gR^2}{(R+h)} \qquad (1)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)}}$$
$$= \sqrt{\frac{9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2} \times (64 \times 10^5\ \text{m})^2}{(64+7) \times 10^5\ \text{m}}}$$
$$= 7519\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,

$g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

$R = 6400\ \text{km} = 64 \times 10^5\ \text{m}$

$h = 700\ \text{km} = 7 \times 10^5\ \text{m}$

$v = \sqrt{\frac{gR^2}{(R+h)}}$

১৫। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ স্থাপন করলে, পৃথিবীর কোন একস্থান হতে এটি সর্বদা একই জায়গায় দেখা যাবে ? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}4 \times 10^6$ m এবং $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$)

উপগ্রহটি ভূ-স্থির উপগ্রহ। সুতরাং উপগ্রহের আবর্তনকাল এবং পৃথিবীর আবর্তনকাল সমান।

আমরা জানি, আবর্তনকাল $T = \dfrac{2\pi r^{3/2}}{R\sqrt{g}}$

বা, $T^2 = \dfrac{4\pi^2 r^3}{R^2 g}$

বা, $r^3 = \dfrac{T^2 R^2 g}{4\pi^2}$

বা, $r = \left(\dfrac{T^2 R^2 g}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$r = \left\{\frac{(24 \times 60 \times 60)^2 \times (6{\cdot}4 \times 10^6)^2 \times 9{\cdot}8}{4 \times (3{\cdot}142)^2}\right\}^{1/3}$$
$$= 42{,}335\ \text{km}$$

এখানে,

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}4 \times 10^6\ \text{m}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$

পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে উপগ্রহের উচ্চতা বা দূরত্ব, $r = ?$

পৃথিবীর আবর্তনকাল, $T = 24\ \text{hr} = 24 \times 60 \times 60\ \text{s}$

Theory

১৬। একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর সাথে সমকেন্দ্রিকভাবে পৃথিবীর চতুর্দিক পরিভ্রমণ করছে। প্রমাণ কর যে, উপগ্রহটির মুক্তি বেগ এর গতিবেগের 1·414 গুণ।

ধরা যাক, উপগ্রহটির ভর $= m$ এবং এটি v_0 বেগে r_0 ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পথে পৃথিবীর চতুর্দিক পরিভ্রমণ করছে। এই অবস্থায় উপগ্রহের কেন্দ্রমুখী বল = উপগ্রহের উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল।

অর্থাৎ $\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}$ এখানে M = পৃথিবীর ভর।

বা, $v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$ (1)

আবার, আমরা জানি, পৃথিবীর কেন্দ্র হতে r_0 দূরে অবস্থিত কোন বস্তুর মুক্তিবেগ

$v^2{}_e = \frac{2GM}{r_0}$ (2)

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$$v_e^2 = 2v_0^2$$

$$v_e = \sqrt{2}\, v_0 = 1·414\, v_0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

১৭। প্রমাণ কর যে,

(ক) অভিকর্ষজ ত্বরণ এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের সংখ্যাগত মান সমান।

(খ) একটি ভারী বস্তু হতে অসীম দূরত্বে অবস্থিত কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব এবং মহাকর্ষীয় প্রাবল্য উভয়ের মান শূন্য।

(ক) মনে করি M = পৃথিবীর ভর এবং R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ। অতএব পৃথিবী পৃষ্ঠে অবস্থিত কোন বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g = \frac{GM}{R^2}$ (1) এখানে G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক।

উক্ত বিন্দুতে মহাকর্ষীয় প্রাবল্য

$$E = \frac{GM}{R^2} \quad (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হতে পাই,

$$g = E \quad (3)$$ (প্রমাণিত)

(খ) মনে করি ভারী বস্তুটির ভর $= M$

বস্তু হতে r দূরে অবস্থিত কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভব $V = -\frac{GM}{r}$ ... (1)

যদি বিন্দুটি অসীম দূরত্বে অবস্থিত হয়, তবে $r = \infty$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$V = -\frac{GM}{\infty} = -0 = 0 \text{ (শূন্য)} \quad (2)$$

পুনঃ, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য

$$E = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{(\infty)^2} = 0 \quad (3)$$

সমীকরণ (2) এবং (3) হতে আমরা পাই,

$V = E = 0$ (প্রমাণিত)

১৮। পৃথিবী পৃষ্ঠে 'g'-এর মান $9·8\ ms^{-2}$, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6·4 \times 10^6$ m এবং $G = 6·67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2} হলে পৃথিবীর ভর নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০২; রা. বো. ২০০০

আমরা জানি, $M = \frac{R^2 g}{G}$

$= \frac{(6·4 \times 10^6)^2 \times 9·8}{6·67 \times 10^{-11}}$

$= 6·018 \times 10^{24}$ kg

দেয়া আছে,

$R = 6·4 \times 10^6$ m

$g = 9·8\ ms^{-2}$

$G = 6·67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

$M = ?$

(১১)। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় g-এর মান $4{\cdot}9\ ms^{-2}$? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4\times10^6 m$, অভিকর্ষজ ত্বরণ পৃথিবী পৃষ্ঠে $9{\cdot}8\ ms^{-2}$। [চ. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫]

আমরা জানি, $g = \frac{GM}{R^2}$

এবং h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ

$g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$

$$\boxed{\frac{g}{g'} = \frac{GM/R^2}{GM/(R+h)^2} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2}$$

বা, $\frac{R+h}{R} = \sqrt{g/g'} = \sqrt{\frac{9{\cdot}8}{4{\cdot}9}} = 1{\cdot}414$

$1 + \frac{h}{R} = 1{\cdot}444\ ;\ \frac{h}{R} = 1{\cdot}414 - 1 = 0{\cdot}414$

$h = 0{\cdot}414\times6{\cdot}4\times10^6$
$= 2{\cdot}65\times10^6 m$

এখানে,
ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$
উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g' = 4{\cdot}9\ ms^{-2}$
পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R_E = 6{\cdot}4\times10^6\ m$
উচ্চতা, $h = ?$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। মহাকর্ষ সূত্রটি বিবৃত কর। [ঢা. বো. ২০০০]

২। উদাহরণসহ মহাকর্ষ ও অভিকর্ষের সংজ্ঞা দাও।

৩। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ও অভিকর্ষীয় ত্বরণের মধ্যে পার্থক্য কর।

৪। মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের একক ও মাত্রা সমীকরণ লিখ। [ঢা. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬]

৫। বস্তুর ভর ও ওজন বলতে কি বুঝ ?

৬। ভর ও ওজনের সংজ্ঞা দাও। কিভাবে এদেরকে মাপা যায় ?

৭। ভর ও ওজনের মধ্যে সম্পর্ক লিখ।

৮। সংজ্ঞা দাও ঃ মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র, মহাকর্ষীয় প্রাবল্য [রা. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৪; সি. বো. ২০০২], মহাকর্ষীয় বিভব [চ. বো. ২০০৪; সি. বো. ২০০২], মুক্তি বেগ, অভিকর্ষজ ত্বরণ, পার্কিং কক্ষপথ, অভিকর্ষ কেন্দ্র, মহাকর্ষীয় ধ্রুবক। [ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০০]

৯। মহাকর্ষীয় বিভব ও মহাকর্ষীয় প্রাবল্যের একক ও মাত্রা সমীকরণ লিখ।

১০। কৃত্রিম উপগ্রহের ব্যবহার উল্লেখ কর।

১১। স্বাভাবিক উপগ্রহ ও কৃত্রিম উপগ্রহের সংজ্ঞা দাও।

১২। পৃথিবীতে মুক্তিবেগ $11{\cdot}20\ kms^{-1}$ বলতে কি বুঝ ? G-কে বিশ্বজনীন ধ্রুবক বলা হয় কেন ?

১৩। পৃথিবীর আহ্নিক গতির জন্য g-এর মানের পরিবর্তন আলোচনা কর। [কু. বো. ২০০৩]

১৪। বস্তুর ওজন কোথায় বেশি হবে ? বিষুব অঞ্চলে না মেরু প্রদেশে ? ব্যাখ্যা কর।

১৫। কারণ ব্যাখ্যা কর—মহাকাশযাত্রী পৃথিবীর চারদিকে আবর্তনকালে ওজনহীনতা অনুভব করে কেন ?

১৬। পৃথিবীর কেন্দ্রে বস্তুর ওজন শূন্য হয় কেন ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০২]

১৭। ভূ-স্থির উপগ্রহের সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০০; চ. বো. ২০০২]

১৮। মুক্তি বেগ কাকে বলে ? [সি. বো. ২০০৬, ২০০৩; ঢা. বো. ২০০০, ২০০৩; রা. বো. ২০০৩; য. বো. ২০০০, ২০০৩; কু. বো. ২০০৫, ২০০০; ব. বো. ২০০১]

১৯। ভূ-স্থির উপগ্রহের আবর্তনকাল ও পৃথিবীর নিজ অক্ষের চারদিকের আবর্তনকাল কিরূপ ?

২০। অভিকর্ষজ ত্বরণ কাকে বলে? [সি. বো. ২০০৬, ২০০১; রা. বো. ২০০৪]

২১। অভিকর্ষ কেন্দ্র বলতে কি বুঝ? [কু. বো. ২০০৩]

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র বিবৃত কর এবং ব্যাখ্যা দাও।
[কু. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০৩; ঢা. বো. ২০০২, ২০০০; য. বো. ২০০২; চ. বো. ২০০১]

২। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক কাকে বলে ? প্রমাণ কর যে, ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় কোন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g' = g\left(1-\frac{2h}{R}\right)$, এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ঢা. বো. ২০০৫]

৩। মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২০০২; য. বো. ২০০০] এর মাত্রা সমীকরণ বের কর। একে বিশ্বজনীন ধ্রুবক বলা হয় কেন ? [কু. বো. ২০০২]

৪। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক ' G '-এর মান নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর। [কু. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৫]

৫। মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের সংজ্ঞা দাও। এর মান নির্ণয়ের জন্য ক্যাভেনডিস-এর পদ্ধতি বর্ণনা কর। [চ. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০৪, ২০০০; ঢা. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০২]

৬। মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং অভিকর্ষজ ত্বরণের মান হতে কিভাবে পৃথিবীর গড় ঘনত্ব বের করা যায় বর্ণনা কর।

৭। দেখাও কিভাবে অভিকর্ষীয় ত্বরণকে পৃথিবীর ভর, ব্যাসার্ধ ও মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের দ্বারা প্রকাশ করা যায়। [ব. বো. ২০০৪; কু. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০২; য. বো. ২০০১]

৮। অভিকর্ষীয় ত্বরণ কাকে বলে ? ভূ-পৃষ্ঠের বিভিন্ন স্থানে g-এর মান বিভিন্ন হওয়ার কারণ ব্যাখ্যা কর।

৯। দেখাও যে, অভিকর্ষীয় ত্বরণ g-এর মান ভূ-পৃষ্ঠে সর্বাপেক্ষা বেশি এবং ভূ-পৃষ্ঠ হতে যতই ওপরে কিংবা ভূ-কেন্দ্রের দিকে যাওয়া যায় তা ততই হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

১০। মহাকর্ষীয় বিভবের সংজ্ঞা দাও। একটি বিন্দু-ভর বস্তুর জন্য কোন বিন্দুতে মহাকর্ষীয় বিভবের মান বের কর। প্রমাণ কর যে, মহাকর্ষীয় বিভব সর্বদা ঋণাত্মক। [চ. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৪]

১১। মহাকর্ষীয় প্রাবল্য ও মহাকর্ষীয় বিভবের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিপাদন কর।

১২। ভূ-পৃষ্ঠ হতে h উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের রাশিমালা নির্ণয় কর।
অথবা, দেখাও যে উচ্চতা বৃদ্ধির সাথে সাথে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান কমতে থাকে। [চ. বো. ২০০২]

১৩। ভূ-পৃষ্ঠ হতে h গভীরতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের রাশিমালা নির্ণয় কর।

১৪। সূর্যের ভরের জন্য রাশিমালা নির্ণয় কর।

১৫। পৃথিবীর ভর ও ঘনত্বের রাশিমালা নির্ণয় কর।

১৬। কৃত্রিম উপগ্রহের আবর্তনকাল ও উচ্চতার মধ্যে সম্পর্ক প্রতিপাদন কর।

১৭। মুক্তি বেগ কাকে বলে ? ভূ-পৃষ্ঠ হতে কোন বস্তুর মুক্তি বেগের সমীকরণ বের কর। [য. বো. ২০০৪; ঢা. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০১, ২০০৩; চ. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০২]
অথবা, মুক্তি বেগ কি ? এর রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [সি. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০৫]

১৮। কেপলারের সূত্র বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। কেপলারের সূত্র হতে নিউটনের মহাকর্ষীয় সূত্র প্রতিপাদন কর।

১৯। বস্তুর অভিকর্ষ কেন্দ্র বলতে কি বুঝ ? ত্রিভুজাকৃতি পাতের অভিকর্ষ কেন্দ্র নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর।

২০। গ্রহের গতি সম্পর্কিত কেপলারের সূত্রসমূহ বর্ণনা কর। [সি. বো. ২০০৩; কু. বো. ২০০১; রা. বো. ২০০০]

২১। কি কি কারণে g-এর মান পরিবর্তিত হয় ? [ব. বো. ২০০২]
দেখাও যে ভূ-কেন্দ্রে g-এর মান শূন্য। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০১ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০৪; কু. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০৪; সি. বো. ২০০১]

২২। কৃত্রিম উপগ্রহে প্রদক্ষিণরত মহাকাশচারী নিজেকে ওজনহীন বলে মনে করে কেন? ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০২]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। দুটি গোলকের ভর যথাক্রমে 40 kg ও 15 kg। তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব 0·1 m হলে, পারস্পরিক আকর্ষণ বল কত হবে ? [$G = 6{\cdot}66 \times 10^{-11}$ N-m^2 . kg^{-2}g] [উঃ $39{\cdot}96 \times 10^{-7}$ N]

২। $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2} স্থানে একটি স্প্রিং নিক্তিতে কোন একটি বস্তুর ওজন 9·8 N হল। বস্তুটির ভর কত ? কোন স্থানে ঐ স্প্রিং নিক্তিতে বস্তুটির ওজন 9·4 N হলে ঐ স্থানের অভিকর্ষীয় ত্বরণ নির্ণয় কর। [উঃ 1 kg ; 9·4 ms^{-2}]

৩। ভূ-পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় গেলে সেখানকার অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ভূ-পৃষ্ঠের অভিকর্ষজ ত্বরণের মানের এক শতাংশ হবে ? পৃথিবীকে $6{\cdot}4 \times 10^6$m ব্যাসার্ধের গোলক মনে কর। [উত্তর ঃ $57{\cdot}6 \times 10^6$ m]

৪। মঙ্গলগ্রহের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের 0·532 গুণ এবং ভর 0·11 গুণ। ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 ms^{-2} মঙ্গলের পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 3·8 ms^{-2}]

৫। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে 200 km ভিতরে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান নির্ণয় কর। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4 \times 10^6$m, $G = 6{\cdot}67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2} এবং পৃথিবীর গড় ঘনত্ব $5{\cdot}5 \times 10^3$ kgm^{-3}। [উত্তর ঃ 9·52 ms^{-2}]

৬। একটি গ্রহের ভর ও ব্যাসার্ধ উভয়ই যথাক্রমে পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। ভূ-পৃষ্ঠে $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2} হলে ঐ গ্রহের পৃষ্ঠে g নির্ণয় কর। [উঃ 4·9 ms^{-2}]

৭। পৃথিবীর একটি কৃত্রিম উপগ্রহ ভূ-পৃষ্ঠ হতে 900 km ঊর্ধ্বে থেকে পৃথিবী প্রদক্ষিণ করছে। উপগ্রহটির ন্যূনতম দ্রুতি ও আবর্তনকাল নির্ণয় কর। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = 6400 km এবং $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}] [উঃ 7·4 km s^{-1} ও 1 ঘণ্টা 43 মিনিট 15 সেকেন্ড]

৮। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে সর্বদা 620 km ঊর্ধ্বে থেকে একটি কৃত্রিম উপগ্রহ পৃথিবীর চারদিক কত অনুভূমিক বেগে প্রদক্ষিণ করে ? [ভূ-পৃষ্ঠে $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2} ও পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = 6380 km] [উঃ 7·548 kms^{-1}]

৯। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে $1{\cdot}5 \times 10^{11}$m দূর থেকে এক বছরে একবার ঘরে আসছে। সূর্যের ভর $1{\cdot}99 \times 10^{30}$ kg হলে, কক্ষপথে পৃথিবীর দ্রুতি কত ? [উত্তর ঃ 30 kms^{-1}]

BG & JEWEL

১০। একজন লোকের ওজন ভূ-পৃষ্ঠে 648 N হলে চন্দ্রপৃষ্ঠে তার ওজন কত হবে ?
[পৃথিবীর ভর = 81 × চন্দ্রের ভর ও পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = 4 × চন্দ্রের ব্যাসার্ধ] [উঃ 128 N]

১১। চন্দ্রপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ মানের $\frac{1}{5}$। পৃথিবীর ভর চাঁদের ভরের প্রায় 81 গুণ হলে পৃথিবীর ব্যাস চাঁদের ব্যাসের কত গুণ ? [উত্তর ঃ 4·02]

১২। ঘূর্ণনের জন্য বিষুব অঞ্চলে অভিকর্ষীয় ত্বরণ কত কম হবে ? [ধর $R = 6{\cdot}4 \times 10^3$ km] [উঃ 0·034 ms^{-2}]

১৩। দেখাও যে, পৃথিবীর সমান ও দ্বিগুণ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি কাল্পনিক গ্রহ হতে মুক্তি বেগ পৃথিবী হতে মুক্তি বেগের 1·41 গুণ।

১৪। 2 kg ভরের একটি বস্তু সুতায় ঝুলানো আছে। সুতার টান 27·6N হলে বস্তুটির ত্বরণ কত? [উঃ 4 ms^{-2}]

১৫। 2 kg ভরের একটি বস্তুকে সুতায় ঝুলায়ে 2·2 ms^{-2} সমত্বরণে (i) উপরে উঠালে, (ii) নিচে নামালে সুতার টান কত হবে ? [উঃ 24 N ও 15·2 N]

১৬। পৃথিবীর নিজ অক্ষের উপর আবর্তনকাল 24 hrs ; মহাকর্ষীয় ধ্রুবক $6{\cdot}7 \times 10^{-11}$ $Nm^2 kg^{-2}$, পৃথিবীর ভর 6×10^{24} kg এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4 \times 10^6$ m হলে একটি ভূ-স্থির উপগ্রহের উচ্চতা এবং বেগ নির্ণয় কর।
[উঃ $3{\cdot}6 \times 10^4$ km ; 3·1 kms^{-1}]

১৭। ভূ-পৃষ্ঠের একজন লোকের ওজন 600N তিনি চাঁদে গিয়ে কতটুকু ওজন হারাবেন ? পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে চাঁদের ভর ও ব্যাসার্ধের 81 এবং 4 গুণ। [উত্তর ঃ 481·5 N]

১৮। ভূ-পৃষ্ঠ হতে অল্প উচ্চতায় এবং ভূ-পৃষ্ঠের সমান্তরালে একটি নভোযান কি দ্রুতিতে চললে একজন যাত্রী ওজনহীনতা অনুভব করবে ? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4 \times 10^6$ m এবং $g = 9{\cdot}8\ ms^{-2}$) [উত্তর ঃ 7·9 kms^{-1}]

১৯। মঙ্গলগ্রহের ভর $6{\cdot}6 \times 10^{23}$ kg এবং ব্যাসার্ধ $3{\cdot}4 \times 10^6$m হলে মঙ্গলগ্রহে মুক্তি বেগ কত ? [উত্তর ঃ 5·1 kms^{-1}]

২০। ভূ-পৃষ্ঠ হতে কত গভীরে অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান ভূ-পৃষ্ঠের মানের এক পঞ্চমাংশ হবে ? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6{\cdot}4 \times 10^3$ km) [উত্তর ঃ $5{\cdot}12 \times 10^3$ km)

২১। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পৃথিবীর ত্বরণের মান শতকরা চল্লিশ ভাগ হবে ? (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6{\cdot}38 \times 10^6$ m)। [সি. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ $1{\cdot}9 \times 10^6$ m]

২২। পৃথিবীর মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র হতে একটি বস্তু নিষ্ক্রয়নের জন্য এর প্রক্ষেপণের ন্যূনতম বেগ নির্ণয় কর।
$v_e = \sqrt{2gR}$ [য. বো. ২০০৪] [উত্তর ঃ 11·2 kms^{-1}]

২৩। সূর্যের চারদিকে শুক্র ও পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধের অনুপাত 54:75। পৃথিবীতে 365 দিনে এক বছর হলে শুক্রতে কত দিনে এক বছর হবে / [উত্তর ঃ 223 দিন]

২৪। পৃথিবীর কৌণিক বেগ বর্তমানের কত গুণ হলে ভূ-পৃষ্ঠের একটি বস্তু মহাশূন্যের দিকে উধাও হবার উপক্রম করবে? [উঃ 17 গুণ]

২৫। সূর্যের চারদিকে ঘূর্ণায়মান পৃথিবী ও মঙ্গল গ্রহের কক্ষপথের গড় ব্যাসার্ধের অনুপাত 3: 4। পৃথিবীতে 365 দিনে 1 বছর হলে মঙ্গলগ্রহ কত দিনে 1 বছর হবে ? [উঃ 561·9 দিন]

২৬। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে কত উচ্চতায় অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান পৃথিবী পৃষ্ঠের ত্বরণের মানের শতকরা একাশি ভাগ হবে ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ = $6{\cdot}38 \times 10^6$m] [উত্তর ঃ $7{\cdot}1 \times 10^5$ m]

২৭। সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধ $1{\cdot}5 \times 10^{11}$ m এবং আবর্তনকাল $3{\cdot}156 \times 10^7$ sec। সূর্যের ভর নির্ণয় কর। [$G = 6{\cdot}7 \times 10^{-11}$ $Nm^2 kg^{-2}$]
R T [উত্তর ঃ 2×10^{30} kg]

২৮। মঙ্গল গ্রহের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের 0·532 গুণ এবং ভর 0·11 গুণ। ভূ-পৃষ্ঠের অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 ms^{-2} । মঙ্গল গ্রহের পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান বের কর। [উত্তর ঃ 3·8 ms^{-2}]

২৯। পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে 200 km ভিতরে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর। (পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $6{\cdot}4 \times 10^3$ km, $G = 6{\cdot}7 \times 10^{-11}$ $Nm^2 kg^{-2}$ এবং পৃথিবীর গড় ঘনত্ব $5{\cdot}5 \times 10^3$ kgm^{-3}। $g'/g = 1 - d/R$ [উত্তর ঃ 9·565 ms^{-2}]

৩০। ভূ-পৃষ্ঠে কোন লোকের ওজন 588 N হলে তিনি চাঁদে গিয়ে কতটুকু ওজনে হারাবেন ? পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধ যথাক্রমে চাঁদের ভর ও ব্যাসার্ধের 81 এবং 4 গুণ। [উত্তর ঃ 472 N]

৩১। পৃথিবী পৃষ্ঠে একজন লোকের ওজন 81 কিলোগ্রাম-ওজন হলে চন্দ্র পৃষ্ঠে তার ওজন কত হবে ? (পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 81 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ) [উত্তর ঃ 16 কিলোগ্রাম]

৮
সরল ছন্দিত স্পন্দন
SIMPLE HARMONIC OSCILLATION

৮·১ সূচনা
Introduction

আমরা জানি, সময়ের পরিপ্রেক্ষিতে এবং পারিপার্শ্বিকের সাপেক্ষে যখন কোন বস্তু স্বীয় অবস্থানের পরিবর্তন করে, তখন তার অবস্থাকে গতি বলে। যেমন চলন্ত গাড়ি, চলন্ত মানুষ প্রভৃতি আশেপাশের গাছপালা ও ঘর বাড়ির সাপেক্ষে গতিশীল বস্তু। পূর্বের অধ্যায়গুলোতে বস্তুর চলনগতি, বৃত্তাকার গতি আলোচনা করা হয়েছে। এখন আমাদের অতি পরিচিত নতুন এক ধরনের গতি আলোচনা করা হবে। এ গতি পর্যাবৃত্ত গতি নামে পরিচিত। (স্প্রিং হতে ঝুলন্ত কোন বস্তুকে নীচের দিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে এটি পর্যায়ক্রমে উপরে-নিচে উঠানামা করতে থাকে। স্প্রিং-এর এ গতি পর্যাবৃত্ত গতি।) স্প্রিং-এর গতি, সুরশলাকার স্পন্দন, গ্রহ–উপগ্রহের গতি ইত্যাদি পর্যাবৃত্ত গতি। পর্যাবৃত্ত গতিরই বিশেষ রূপ হল দোলন, কম্পন বা স্পন্দন। দোলন, কম্পন বা স্পন্দন সমার্থবোধক শব্দ।

পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় সরল দোল গতি (Simple harmonic motion) বা সংক্ষেপে (S. H. M) নামক এক বিশেষ ধরনের দোল গতির গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার রয়েছে। এ অধ্যায়ে আমরা পর্যাবৃত্ত গতি তথা সরল ছন্দিত গতির বিভিন্ন রূপ আলোচনা করব।

৮·২ পর্যাবৃত্ত গতি ও স্পন্দন
Periodic motion and oscillation

কোন বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর বস্তুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে ঐ গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

ঘড়ির কাঁটার গতি, পৃথিবীর সূর্য প্রদক্ষিণ, গ্রহ-উপগ্রহের গতি—এগুলো পর্যাবৃত্ত গতির উদাহরণ।

পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোন বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোন নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে বস্তুর ঐ গতিকে স্পন্দন বলে। যেমন দেওয়াল ঘড়ির দোলকের গতি, কম্পনশীল সুর শলাকা, স্প্রিং-এর গতি ইত্যাদি। → স্পন্দন গতি

৮·৩ সরল ছন্দিত স্পন্দন
Simple harmonic oscillation

সরল ছন্দিত স্পন্দন-এর নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে—

কোন পর্যায় গতিসম্পন্ন বস্তুর উপর কার্যকর ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তার মান ঐ বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল ছন্দিত স্পন্দন বলে।

যেমন খুব কম বিস্তারের সরল দোলকের গতি, সুরশালাকার বাহুর কম্পন, স্প্রিং-এর উল্লম্ব কম্পন সবই সরল ছন্দিত স্পন্দন বা সরল দোলন গতি।

সরল ছন্দিত স্পন্দনের বিকল্প সংজ্ঞা : যদি কোন বস্তুকণা সমান কৌণিক বেগে বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে এবং সেই অবস্থায় বৃত্তের পরিধির উপর কণাটির বিভিন্ন অবস্থান বিন্দু হতে বৃত্তের যে কোন ব্যাসের উপর লম্ব টানা হয়, তবে লম্বপাদ (Foot of the perpendicular) বিন্দুগুলোর গতি হবে সরল ছন্দিত স্পন্দন বা গতি।

সরল ছন্দিত স্পন্দনের ক্ষেত্রে বস্তুর ত্বরণ 'a' এবং সরণ x হলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হল,

$$a \propto -x$$

বা, $a = -k'x$

এখানে k' সমানুপাতিক ধ্রুবক। এর মান ধনাত্মক। ত্বরণের দিক সরণের বিপরীত দিকে হওয়ায় ঋণাত্মক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

সরল ছন্দিত স্পন্দনের বৈশিষ্ট্য (Characteristics of simple harmonic oscillation)

একটি সরল ছন্দিত স্পন্দনের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য রয়েছে :

(১) এর গতি পর্যায় গতি।
(২) একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর এই গতি বিপরীতমুখী হয়।
(৩) এর গতি একটি সরলরেখায় ঘটে।
(৪) ত্বরণ বস্তুর সরণের সমানুপাতিক। $a \propto s$
(৫) ত্বরণ বস্তুর সরণের বিপরীতমুখী। $a = -s$
(৬) ত্বরণ বস্তুর কণাটির মধ্য অবস্থান অভিমুখী।

কয়েকটি সংজ্ঞা

(ক) পূর্ণ দোলন (Complete oscillation) : কোন একটি কম্পমান বস্তু একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে পুনরায় একই দিকে ঐ বিন্দুতে ফিরে আসলে যে কম্পন সম্পন্ন হয়, তাকে পূর্ণ দোলন বা কম্পন বলে।

(খ) পর্যায়কাল বা দোলনকাল (Time period) : একটি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করতে কোন একটি কম্পমান বস্তুর যে সময় লাগে তাকে তার দোলনকাল বলে। একে 'T' দ্বারা ব্যক্ত করা হয়। Nটি কম্পনে ব্যয়িত সময় t হলে, $\boxed{T = \frac{t}{N}}$ ।

(গ) কম্পাঙ্ক (Frequency) : কোন একটি কম্পমান বস্তু এক সেকেন্ডে যতবার পূর্ণ দোলন দেয় তাকে তার কম্পাঙ্ক বলে। একে 'n' দ্বারা সূচিত করা হয়। Nটি কম্পনে ব্যয়িত সময় t হলে, $\boxed{n = \frac{N}{t} \qquad T = \frac{1}{n}}$ ।

কম্পাঙ্কের একক হার্জ (Hertz)। হার্জকে সংক্ষেপে Hz দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ঘ) বিস্তার (Amplitude) : কোন একটি কম্পমান বস্তু এর মধ্য অবস্থান হতে ডানে-বামে যে সর্বাধিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে এর বিস্তার বলে।

বিস্তার দুই প্রকার : (i) **রৈখিক বিস্তার**— একে 'A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
(ii) **কৌণিক বিস্তার**— একে 'θ' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

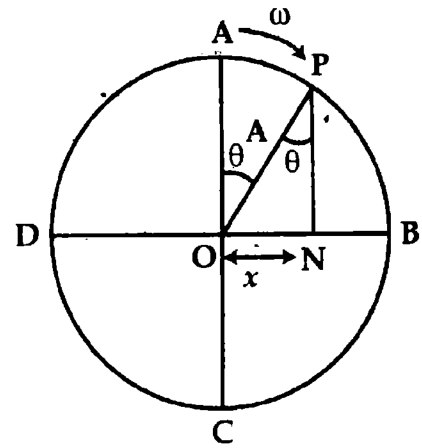
(ঙ) দশা (Phase) : কোন একটি কম্পমান বস্তুর যে কোন মুহূর্তের দোলনের অবস্থা অর্থাৎ বস্তুটির অবস্থান, বেগ, ত্বরণ এবং গতির অভিমুখ যা দ্বারা বুঝা যায় তাকে দশা বলে।

(চ) ইপক বা আদি দশা (Epoch) : যাত্রা শুরু করার মুহূর্তে অর্থাৎ $t = 0$ সময়ে সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোন বস্তুর যে দশা থাকে তাকে এর ইপক বলে। সময়ের সংগে সংগে দশার পরিবর্তন ঘটে ; কিন্তু ইপক বা আদি দশা একই থাকে।

৮·৪ সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন বস্তুকণার সরণ, বেগ এবং ত্বরণের রাশিমালা

Expression for displacement, velocity and acceleration executing Simple Harmonic Motion (S. H. M.)

(১) সরণ : মনে করি একটি বস্তুকণা O বিন্দুকে কেন্দ্র করে A ব্যাসার্ধের ABCD বৃত্তপথে তীর চিহ্নিত দিকে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে এবং t সময়ে A বিন্দু হতে P বিন্দুতে আসছে। P বিন্দু হতে বৃত্তের ব্যাস DB-এর উপর PN লম্ব টানি। এখানে লম্ব পাদ বিন্দুর সরণ



চিত্র ৮·১

$$x = \text{ON}$$

চিত্র হতে $\angle \text{AOP} = \angle \text{OPN} = \theta$, এখানে θ = কৌণিক সরণ।

আমরা পাই,

$$\frac{\text{ON}}{\text{OP}} = \sin\theta$$

বা, $\text{ON} = \text{OP} \times \sin\theta$

$x = \text{A}\sin\theta$, এখানে x = মূলবিন্দু থেকে সরণ এবং OP = A = নির্দেশক বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

বা, $\boxed{x = \text{A}\sin\omega t}$ (1) (এখানে $\theta = \omega t$)

পাদবিন্দুর দোলনকাল T হলে, $\omega = \frac{2\pi}{\text{T}} = 2\pi n$, এখানে পাদবিন্দুর কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{\text{T}}$.

$\therefore \boxed{x = \text{A}\sin 2\pi nt}$ (2)

সমীকরণ (1) এবং (2) হল **সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন একটি কণার সরণের রাশিমালা।**

(২) বেগ (Velocity) : আমরা জানি সময় সাপেক্ষে সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে। একে সাধারণত v দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\text{বেগ, } v = \frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(\text{A}\sin\omega t) = \text{A}\,\omega\cos\omega t$$

বেগ ও সরণের সম্পর্ক :

এখন, $x = \text{A}\sin\omega t$

$$\sin\omega t = \frac{x}{\text{A}} \text{ এবং } \cos\omega t = \sqrt{1 - \sin^2\omega t}$$

$$\text{বেগ, } v = \text{A}\omega\sqrt{1 - \sin^2\omega t} = \text{A}\omega\sqrt{1 - x^2/\text{A}^2}$$

বা, $\boxed{v = \omega\sqrt{\text{A}^2 - x^2}}$ (3)

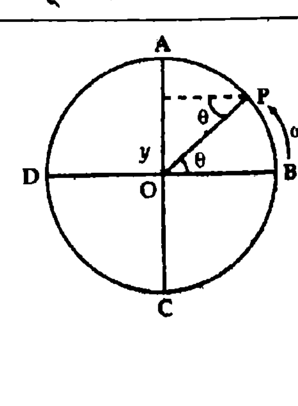
(ক) যখন $x = \text{A}$, তখন $v = 0$ এবং (খ) যখন $x = 0$, তখন $v = \text{A}\omega$

N বিন্দুর গতিপথের মধ্য·অবস্থানে তার বেগ সর্বাধিক এবং সরণ বৃদ্ধির সাথে সাথে বেগ কমতে থাকে এবং চরম অবস্থানে B বা D বিন্দুতে এর বেগ শূন্য হবে অর্থাৎ বিস্তারের প্রান্তে বেগ শূন্য হবে।

[বিঃ দ্রঃ ৮·২ নং চিত্রে স্পন্দন অক্ষ হচ্ছে BOD বা X-অক্ষ বরাবর। স্পন্দন অক্ষ AO বা Y-অক্ষ বরাবর হলে [চিত্র ৮·২] সরণের সমীকরণ হবে

$y = \text{A}\sin\omega t$।

সেক্ষেত্রে বেগ ও ত্বরণের সমীকরণে x-এর স্থলে y হবে।]



(৩) ত্বরণ (Acceleration) ঃ আমরা জানি সময় সাপেক্ষে বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। একে a দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

সমীকরণ (2)-কে সময়ের সাপেক্ষে ব্যবকলন করে ত্বরণ পাওয়া যায়।

ত্বরণ, $a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos \omega t) = -A\omega^2 \sin \omega t$

বা, $\boxed{a = -\omega^2 x}$ (4) $[\because x = A \sin \omega t]$

সমীকরণ (4) ত্বরণ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

ঋণ চিহ্ন বুঝায় যে, ত্বরণ ও সরণ পরস্পর বিপরীতমুখী।

(ক) যখন $x = 0$, তখন $a = 0$ এবং (খ) যখন $x = A$, তখন $a = -\omega^2 A$

N বিন্দুর গতিপথের চরম অবস্থানে ত্বরণ সর্বাধিক এবং মধ্য অবস্থানে ত্বরণ শূন্য হবে।

৮.৫ সরল ছন্দিত স্পন্দনের ব্যবকলনীয় সমীকরণ ও সমাধান
Differential equation of simple harmonic oscillation

মনে করি m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা সরল দোলন গতিতে আছে। t সময়ে এর সরণ x হলে

বেগ, $v = \frac{dx}{dt}$ এবং ত্বরণ, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

কণাটির উপর ক্রিয়াশীল বলের মান,

$F = \text{ভর} \times \text{ত্বরণ} = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$

যেহেতু বল বা ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখী, অতএব

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

বা, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$, এখানে K একটি ধ্রুব সংখ্যা। একে বল ধ্রুবক বলে।

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-K}{m}x$ (5)

পুনঃ, কণাটির কৌণিক বেগ ω হলে, আমরা পাই

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ (6)

এখন সমীকরণ (5) এবং (6) হতে পাই, $-\frac{K}{m}x = -\omega^2 x$

বা, $\frac{K}{m} = \omega^2$

সমীকরণ (5)-এ $\frac{K}{m}$-এর মান বসিয়ে পাই,

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$ ... (7)

সমীকরণ (7) হল সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার ব্যবকলনীয় সমীকরণ। এই সমীকরণটি সমাধান করলে সময়ের সাথে সরণ, বেগ ইত্যাদি জানা যায়।

সমীকরণ (7)-কে সমাধান করার জন্য এর উভয় পার্শ্বকে $\frac{2dx}{dt}$ দ্বারা গুণ করি।

$$2\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x \; 2\frac{dx}{dt} = 0$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

উপরোক্ত সমীকরণকে সমাকলন করে পাই,

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = c$ (8)

এখানে, c = সমাকলন ধ্রুবক। এর মান বের করতে হবে।

যখন $x = A$, তখন $\frac{dx}{dt} = 0$

এই শর্ত সমীকরণ (8)-এ প্রয়োগ করে পাই,

$$c = \omega^2 A^2$$

এখন সমীকরণ (8)-এ c-এর মান বসিয়ে পাই,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

বা, $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$

বা, $\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$

বা, $\frac{dx}{\sqrt{(A^2 - x^2)}} = \omega dt$

একে সমাকলন করে পাই,

$\sin^{-1}\frac{x}{A} = \omega t + \delta$, এখানে δ = সমাকলন ধ্রুবক

বা, $\boxed{x = A\sin(\omega t + \delta)}$ (9)

এটিই হল সরল ছন্দিত স্পন্দনের ব্যবকলনীয় সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

যখন $t = 0$, তখন $x = A\sin\delta$

কাজেই 'δ' হচ্ছে বস্তুকণাটির ইপক্ বা আদি দশা।

$\delta = 0$ হলে, সমীকরণ (9) হতে পাই,

$x = A\sin(\omega t + 0) = A\sin\omega t$

এক্ষেত্রে, $t = 0$ হলে $x = 0$। অর্থাৎ তখন বস্তু কণাটির গতি শুরু হয় মধ্য অবস্থান বা সাম্যাবস্থান হতে।

আবার, $\delta = 90^\circ$ হলে, সমীকরণ (9)-কে লেখা যায়

$x = A\sin(\omega t + 90^\circ) = A\cos\omega t$ (10)

এক্ষেত্রে, $t = 0$ হলে $x = A$। অর্থাৎ, সেক্ষেত্রে বস্তুকণাটির গতি শুরু হয় চরম অবস্থান বা এক প্রান্ত হতে।

অন্য দশার জন্য আদি সরণ ভিন্নতর হবে।

সরল ছন্দিত স্পন্দনের ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান হতে এর সংজ্ঞা প্রতিপাদন :

সরল ছন্দিত স্পন্দনের ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান হল,

$$x = A\sin(\omega t + \delta)$$

বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{A\sin(\omega t + \delta)\} = \omega A\cos(\omega t + \delta)$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\{\omega A\cos(\omega t + \delta)\} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \delta)$

$= -\omega^2 x$

$\therefore a = -\omega^2 x = \frac{-K}{m}x \qquad \left[\because \omega^2 = \frac{K}{m}\right]$

বা, $ma = -Kx$

বা, $F = -Kx$

বা, $F \propto -x$

অর্থাৎ প্রত্যায়নী বল কণার সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখী, এটিই সরল ছন্দিত স্পন্দনের সংজ্ঞা

BG & JEWEL

৮·৬ সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পর্কিত কয়েকটি রাশি

Some terms relating Simple Harmonic Motion

(ক) পর্যায়কাল : সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন কোন কণার একটি পূর্ণ স্পন্দন সম্পন্ন করতে যে সময় ব্যয় হয় তাকে তার পর্যায়কাল বলে। একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান হচ্ছে,

$$x = A \sin(\omega t + \delta) \qquad (11)$$

সমীকরণ (11)-এ সময় t-এর মান $\frac{2\pi}{\omega}$ বৃদ্ধি করা হলে আমরা পাই,

$$x = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{2t}{\omega}\right)\right] + \delta$$

$$= A \sin(\omega t + 2\pi + \delta)$$

$$= A \sin(\omega t + \delta)$$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে, $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় অন্তর কণার সরণ একই হচ্ছে। কাজেই, $\frac{2\pi}{\omega}$ হচ্ছে সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কাল।

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad \left[\because \frac{K}{m} = \omega^2\right]$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}} \qquad (12)$$

সমীকরণ (12) হল সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কালের সমীকরণ। এটি ভর, পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের মধ্যে সম্পর্কজনিত সমীকরণও বটে।

আবার, সমীকরণ (5) অনুযায়ী পাই,

$$\frac{m}{K} = \sqrt{\frac{-x}{d^2x/dt^2}}$$

$$T = 2\pi\frac{m}{K} = 2\pi\sqrt{\frac{-x}{d^2x/dt^2}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{-\text{সরণ}}{\text{ত্বরণ}}} \qquad (13)$$

সমীকরণ (13) পর্যায়কাল, সরণ ও ত্বরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

(খ) কম্পাঙ্ক : কোন কম্পমান বস্তু বা স্পন্দক একক সময়ে যতগুলো পূর্ণ দোলন দেয় তাকে কম্পাঙ্ক বলে। একে f দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad (14)$$

[সমীকরণ (12) ব্যবহার করে]

এটিই হল সরল ছন্দিত স্পন্দনের কম্পাঙ্কের সমীকরণ।

(গ) কৌণিক কম্পাঙ্ক : সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন কোন কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক কম্পাঙ্ক বলে। একে ω দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$= 2 \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{[সমীকরণ (13) ব্যবহার করে]}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}} \qquad (15)$$

ω-এর একক রেডিয়ান / সেকেন্ড (rad s^{-1})।

(ঘ) দশা : সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কোন বস্তু বা কণার দশা বলতে যে কোন মুহূর্তের দোলনের অবস্থা বুঝায় ; অর্থাৎ বস্তু বা কণাটির সরণ, বেগ, ত্বরণ এবং গতির অভিমুখ ইত্যাদি বুঝায়। সমীকরণ (11)-এ $(\omega t + \delta)$ রাশিটি গতির দশা নির্দেশ করছে। ধ্রুবক δ গতির আদি অবস্থা বুঝায়। যেমন—

$\delta = 0°$ হলে

$$x = A \sin(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t + 0°)$$
$$= A \sin \omega t$$

কণা বা বস্তুটির গতি সাম্যাবস্থান হতে শুরু হয়েছে বুঝায়।

আবার, $\delta = \frac{\pi}{2}$ হলে,

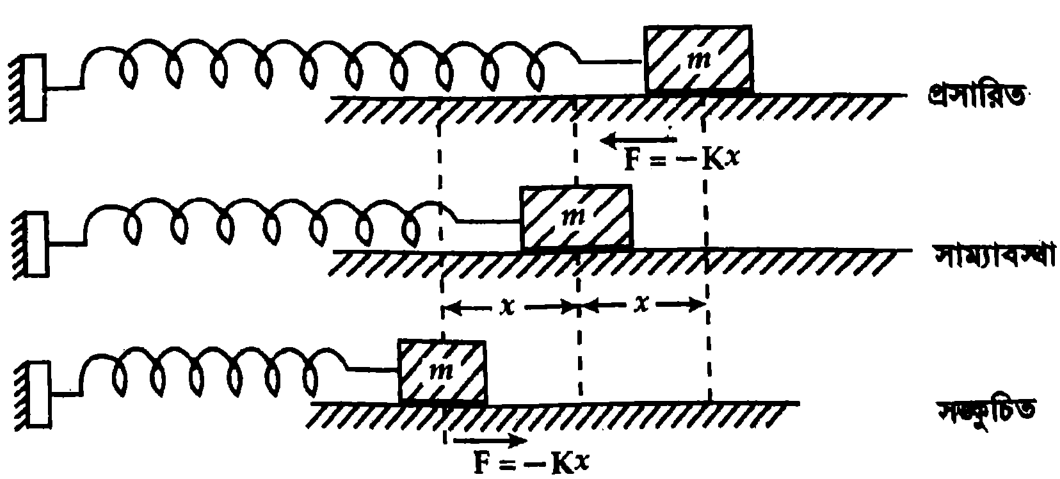
$$x = A \sin(\omega t + \delta) = A \sin(\omega t + \pi/2)$$
$$= A \cos wt$$

এক্ষেত্রে কণাটির গতি শুরু হয় সরণের সর্বোচ্চ অবস্থান থেকে। δ-এর বিভিন্ন মানের জন্য ভিন্ন ভিন্ন আদি সরণ নির্দেশ করে।

৮·৭ সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন বস্তুকণার স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি এবং গড় স্থিতি ও গতিশক্তি

Potential energy, kinetic energy and averege potential and kinetic energy of a particle executing S. H. M.

ধরি একটি অনুভূমিক আদর্শ স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দেয়ালের সাথে আটকানো এবং অপর প্রান্তে m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু যুক্ত আছে। বস্তুটি অনুভূমিক ও ঘর্ষণবিহীন তলের উপর দিয়ে অবাধে চলতে সক্ষম। এখন বস্তুটিকে অনুভূমিক বরাবর সরিয়ে স্প্রিংটিকে সামান্য বিকৃত করলে স্থিতিস্থাপক ধর্মের দরুন প্রযুক্ত বলের বিপরীতে স্প্রিং-এ প্রত্যায়নী বলের উদ্ভব হয়। স্প্রিং-এর x পরিমাণ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির জন্য প্রত্যায়নী বল F হলে হুকের সূত্রানুযায়ী,



চিত্র ৮·৩

$$F \propto -x$$

$$F = -Kx \qquad (16)$$

এখানে, K = স্প্রিং ধ্রুবক বা বল ধ্রুবক।

ফলে স্প্রিংটিকে সামান্য বিকৃত করে ছেড়ে দিলে তা সরল ছন্দিত গতিতে দুলতে থাকবে। x সরণে তাৎক্ষণিক ত্বরণ $\frac{d^2x}{dt^2}$ হলে,

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \qquad (17)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x \qquad (18)$$

ধরি, $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ বা, $K = m\omega^2$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad (19)$$

বা, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (20)$$

এটি সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ (7)-এর অনুরূপ। অতএব, স্পন্দিত স্প্রিং-এর গতি সরল ছন্দিত গতি।

এর সাধারণ সমাধান,

$$x = A\sin(\omega t + \delta) \qquad (21)$$

বস্তুটির তাৎক্ষণিক বেগ,

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta) = A\omega\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \delta)} \qquad (22)$$

$$= A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

বা, $$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \qquad (23)$$

গতিশক্তি, $$K.E. = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \delta) \qquad (24)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \qquad (25)$$

পুনরায়, x সরণের জন্য প্রত্যায়নী বলের বিরুদ্ধে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন হবে তাই বস্তুতে স্থিতিশক্তিরূপে সঞ্চিত থাকবে।

অতি অল্প dx সরণের জন্য বলের বিরুদ্ধে কৃত কাজ $= -Fdx$

x সরণের জন্য বলের বিরুদ্ধে মোট কৃত কাজ,

$$W = -\int_0^x F.dx = \int_0^x Kx.dx = \frac{K}{2}x^2 = \text{বস্তুর অর্জিত স্থিতিশক্তি}$$

স্থিতিশক্তি, $$P.E. = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \qquad (26)$$

$$= \frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \delta) \qquad (27)$$

মোট শক্তি $= K.E. + P.E.$ $$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \delta)$$

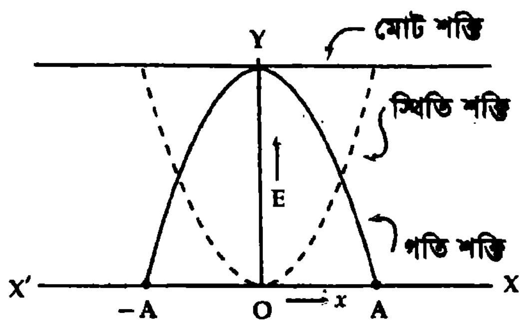
$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}KA^2 \qquad (28)$$

কাজেই সময় সাপেক্ষে এক পর্যায়কাল পরিমাণে—

(ক) গড় গতিশক্তি ঃ

$$K.E_{a}. = \frac{\int_0^T (K.E.).dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t+\delta).\, dt$$ [সমীকরণ (24) অনুসারে]

$$= \frac{m\omega^2A^2}{2T}\int_0^T \frac{1}{2}\{1+\cos 2(\omega t+\delta)\}.\, dt$$



চিত্র ৮·৪

$$= \frac{m\omega^2A^2}{4T}\left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos 2(\omega t+\delta).dt\right] = \frac{m\omega^2A^2}{4T}[t]_0^T + \frac{m\omega^2A^2}{4T}\left[\frac{\sin 2(\omega t+\delta)}{2\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{m\omega^2A^2}{4} + \frac{m\omega^2A^2}{8\omega T}[\sin 2(\omega T+\delta) - \sin 2\delta] = \frac{m\omega^2A^2}{4} \qquad (29)$$

[$\sin 2(\omega T+\delta) = \sin 2\delta$]

$$K.\ E_{a}. = \frac{KA^2}{4} \qquad (30)$$

(খ) গড় বিভব বা স্থিতিশক্তি ঃ

$$P.E_{a}. = \frac{\int_0^T (P.E.).dt}{\int_0^T dt} = \frac{KA^2}{2T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\delta).\, dt$$ [সমীকরণ (27) অনুসারে]

$$= \frac{KA^2}{2T}\int_0^T \frac{1}{2}[1-\cos 2(\omega t+\delta)].\, dt = \frac{KA^2}{4T}\left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2(\omega t+\delta).dt\right]$$

$$= \frac{KA^2}{4T}\left\{[t]_0^T - \left[\frac{\sin 2(\omega t+\delta)}{2\omega}\right]_0^T\right\} = \frac{KA^2}{4} \qquad (31)$$

$$P.\ E_{a}. = \frac{m\omega^2A^2}{4} \qquad (32)$$

সময় সাপেক্ষে এক পর্যায়কাল পরিমাণে—

গড় বিভব শক্তি = গড় গতিশক্তি $= \dfrac{KA^2}{4} = \dfrac{m\omega^2 A^2}{4}$

আবার, অবস্থান সাপেক্ষে এক চক্র পরিমাণে—

(গ) গড় গতিশক্তি ঃ

$$K.E_{a.} = \frac{\int_{-A}^{A} (K.E.)dx}{\int_{-A}^{A} dx} = \frac{1}{2A} \times \int_{-A}^{A} \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2).\, dx \quad \text{[সমীকরণ (25) অনুসারে]}$$

$$= \frac{m\omega^2}{4A} \left\{ \int_{-A}^{A} A^2 dx - \int_{-A}^{A} x^2.\, dx \right\} = \frac{m\omega^2}{4A} \left\{ A^2 [x]_{-A}^{A} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-A}^{A} \right\}$$

$$= \frac{m\omega^2}{4A} \left[2A^3 - \frac{2}{3} A^3 \right] = \frac{m\omega^2 A^2}{3} \tag{33}$$

$$= \frac{KA^2}{3} \tag{34}$$

$K.E_{a.} = \frac{2}{3}$ (মোট শক্তি)

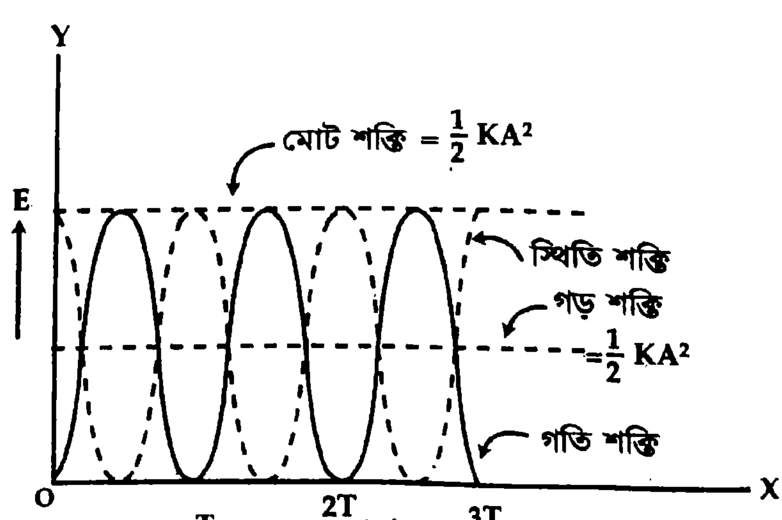
(ঘ) গড় বিভব বা স্থিতিশক্তি ঃ

$$P.E_{a.} = \frac{\int_{-A}^{A} (P.E.)dx}{\int_{-A}^{A} dx} = \frac{1}{2A} \times \int_{-A}^{A} \left(\frac{1}{2} Kx^2 \right) dx \quad \text{[সমীকরণ (26) অনুসারে]}$$

$$= \frac{K}{4A} \int_{-A}^{A} x^2\, dx = \frac{K}{4A} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-A}^{A} = \frac{KA^2}{6} \tag{35}$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{6} \tag{36}$$

$P.E_a = \frac{1}{3}$ (মোট শক্তি)



চিত্র ৮·৫

সমীকরণ (34) ও (35) বা (33) ও (36) অনুসারে অবস্থান সাপেক্ষে একচক্র পরিমাণে

গড় গতিশক্তি = 2 × গড় বিভব শক্তি।

৮.৮ যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র
Principle of conservation of mechanical energy

এই সূত্র অনুসারে শক্তি অবিনশ্বর। এর সৃষ্টি নেই, বিনাশ নেই। এটি একরূপ হতে অন্যরূপে রূপান্তরিত হতে পারে। তবে শক্তির মোট পরিমাণ স্থির থাকে। অতএব যে কোন মুহূর্তে বস্তুকণাটির মোট শক্তি,

E = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি [চিত্র ৮.৫]।

$$= \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

কণাটির গতিপথের মধ্য অবস্থানে $(x = 0)$ তার মোট শক্তি

= স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি $= 0 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

পুনঃ, কণাটির গতিপথের চরম অবস্থানে $(x = A)$ তার মোট শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 + 0 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$ (37)

সিদ্ধান্ত ঃ বস্তুকণাটির মোট শক্তি তার সরণের উপর নির্ভর করে না এবং গতিপথের সর্বত্র তার মান স্থির থাকে। এটা শক্তির নিত্যতা সূত্র প্রমাণ করে।

৮.৯ সরল ছন্দিত স্পন্দন ও বৃত্তাকার গতির সম্পর্ক

মনে করি একটি বস্তুকণা A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে ABCD বৃত্তাকার পথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সমকৌণিক বেগ ω-এ ঘুরছে [চিত্র ৮.৬ (ক)]। ধরি O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A বৃত্তের ব্যাসার্ধ। মনে করি t সময় পর বস্তুকণাটি P অবস্থানে আসল। এখন P বিন্দু হতে বৃত্তের BOD ব্যাসের উপর PN লম্ব অঙ্কন করি। N হবে লম্বটির পাদ বিন্দু।

মনে করি ON = y। চিত্রে OPN ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়,

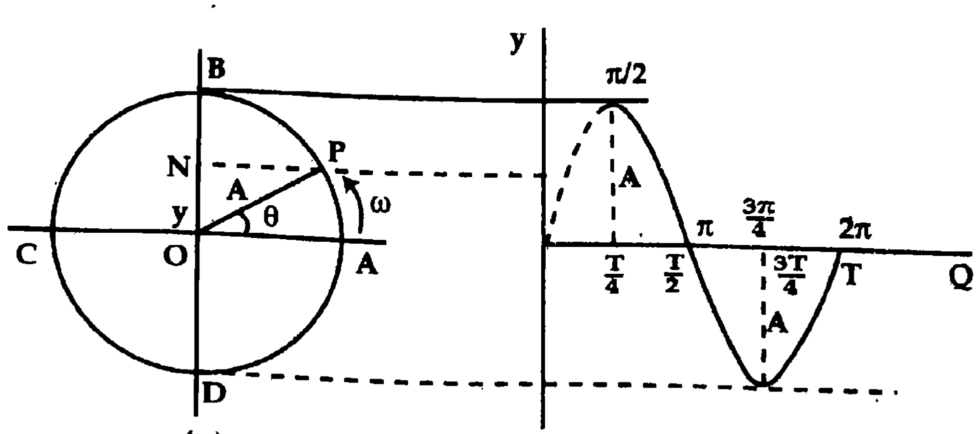
y = OP sin θ

= A sin θ

যেহেতু কণাটি সমকৌণিক বেগে ঘুরছে, সুতরাং $\angle POA = \theta = \omega t$ (38)

θ-কে কণাটির দশা কোণ (phase angle) বা সংক্ষেপে দশা বলে।

এখন $y = A \sin\theta = A \sin \omega t$ (39)



(ক) (খ)

P কণাটি যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন ব্যাস BOD-এর উপর কণার পাদবিন্দু N ব্যাস BOD বরাবর স্পন্দিত হতে থাকে।

সুতরাং কণাটির বেগ,

$$v = \frac{dy}{dt} = A\,\omega \cos \omega t$$

এবং ত্বরণ, $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$

$$= -\omega^2 y \qquad (40)$$

অর্থাৎ কণাটির ত্বরণ এর সরণের সমানুপাতিক। সুতরাং N বিন্দুর গতি সরল ছন্দিত গতি। O হচ্ছে এই ছন্দিত গতির মধ্যবিন্দু বা সাম্যাবস্থান, B ও D ছন্দিত গতির প্রান্তীয় অবস্থান এবং P উৎপাদনকারী বিন্দু (generating point)। বৃত্তটির নাম নির্দেশক বৃত্ত (reference circle) এবং কণাটির নাম নির্দেশক কণা (reference particle) [চিত্র ৮·৬ (ক)]। লক্ষ করলে দেখা যাবে যে কণাটি বৃত্তাকার পথে যখন ABCDA পথে একবার ঘুরে আসে সেই সময় পাদবিন্দুটি OBODO ব্যাস বরাবর যাত্রা বিন্দু বা আদি বিন্দু থেকে শুরু করে একবার পথ অতিক্রম শেষ করে আদি বিন্দুতে ফিরে আসে। কণাটির বৃত্তাকার পথে একবার ঘুরতে যে সময় লাগে তাই দোলন বা পর্যায়কাল T। ঐ একই পাদবিন্দুও একবার পথ পরিক্রমা শেষ করে। সুতরাং

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [\because \theta = \omega t \text{ এবং যখন } \theta = 2\pi, t = T \text{ সুতরাং } 2\pi = \omega T]$$

সমীকরণ (39)-এ θ বা ωt-এর কয়েকটি মান বসিয়ে কণাটির সরণ y-এর সংশ্লিষ্ট মান সারণি ৮·১-এ দেখান হল। কণাটির পর্যায়কাল T। এখন কণাটির বৃত্তাকার পথে B, C, D ও A বিন্দুতে পৌঁছার সময় T-তে প্রকাশ করলে যথাক্রমে $\frac{T}{4}$, $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$ ও T পাওয়া যাবে।

সারণি ৮·১

θ-এর মান	কণার সরণ y-এর মান	সময় t
0	0	0
$\frac{\pi}{2} = 90°$	A	$\frac{T}{4}$
$\pi = 180°$	0	$\frac{2T}{4} = \frac{T}{2}$
$\frac{3\pi}{4} = 170°$	A	$\frac{3T}{4}$
$2\pi = 360°$	0	T

P কণাটি যখন সমকৌণিক বেগে ঘুরতে থাকে তখন পাদবিন্দু N-এর পরিবর্তন, যা কণাটির সরণ নির্দেশ করে ৮·৬ (খ) চিত্রের অনুরূপ হয়।

৮·১০ সরল দোলক
Simple pendulum

একটি ক্ষুদ্র ভারী বস্তুকে একটি ওজনবিহীন অপ্রসারণীয় এবং নমনীয় সুতার সাহায্যে একটি দৃঢ় অবলম্বন হতে ঝুলিয়ে দিলে বস্তুটি যদি বিনা বাধায় অল্প বিস্তারে এদিক-ওদিক দোলে তবে সুতাসহ ঐ বস্তুটিকে সরল দোলক বলে। বস্তুটিকে দোলক বা দোলক পিণ্ড (bob) বলে।

এটি একটি আদর্শ সরল দোলকের সংজ্ঞা। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে একটি আদর্শ সরল দোলক প্রস্তুত করা সম্ভবপর নয়। কারণ সুতা ওজনবিহীন হতে পারে না, সুতা অপ্রসারণীয় হতে পারে না এবং বস্তুটি বিনা বাধায় এদিক-ওদিক দুলতে পারে না। অতএব পরীক্ষাগারে আমরা যে সরল দোলক প্রস্তুত করি তা একটি আপাত সরল

দোলক হবে। এই কারণে **একটি পাকবিহীন সরু সুতার একপ্রান্তে একটি ক্ষুদ্রাকৃতি ধাতব গোলক ঝুলিয়ে সুতাসহ গোলকটিকে একটি সরল দোলক গণ্য করা হয়** [চিত্র ৮.৭]। এই ক্ষেত্রে সুতার ওজন ধাতব গোলকের তুলনায় খুব কম হয় এবং গোলকের সমস্ত ভর তার ভারকেন্দ্রে কেন্দ্রীভূত থাকে ধরা যায়।

উপরোক্ত সংজ্ঞা হতে সরল দোলকের পাঁচটি বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায়—

(ক) সুতা ওজনবিহীন হবে।

(খ) সুতা অপ্রসারণীয় হবে।

(গ) সুতা নমনীয় হবে।

(ঘ) দোলক পিণ্ড বিনা বাধায় দুলবে।

(ঙ) দোলক পিণ্ড ক্ষুদ্র ও ভারী হবে।

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

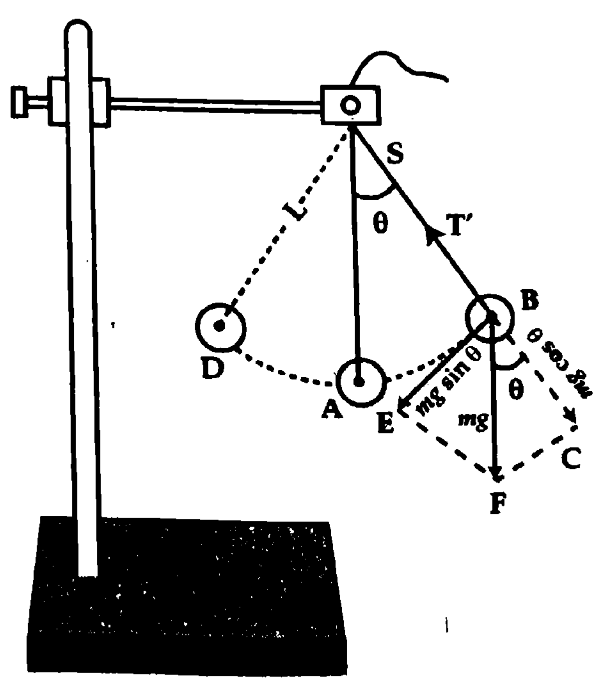
$a = -\omega x^2$

এ ছাড়া সরল দোলকের গতি সরল দোলগতি ও দুলবার কালে সরল দোলক চারটি সূত্র মেনে চলে [অনুচ্ছেদ ৮.১৪ দ্রষ্টব্য]।

দোলন বা পর্যায় কাল (Period of oscillation) : একটি পূর্ণ দোলনের জন্য একটি সরল দোলকের যে সময়ের প্রয়োজন হয় তাকে তার দোলন কাল বলে। একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একটি সরল দোলক t সে.-এ Nটি পূর্ণ দোলন দিলে, $T = \frac{t}{N}$।

৮.১১ সরল দোলকের গতি সরল ছন্দিত গতি
Motion of a simple pendulum is S. H. M.

প্রমাণ (Proof) : একটি সরল দোলক লই [চিত্র ৮.৭]। S তার ঝুলন বিন্দু এবং A গোলাকার দোলকটি পিণ্ডের ভারকেন্দ্র। SA তার সাম্যাবস্থান। মনে করি SA = L। যদি পিণ্ডের ভর 'm' এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g' হয় তবে তার ওজন mg খাড়াভাবে SA বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়া করবে। কিন্তু সুতার টান ক্রিয়া করবে তার বিপরীত দিকে। ধরি দোলকটি দুলতে দেওয়ায় তা কোন এক মুহূর্তে সাম্যাবস্থান হতে θ কোণে সরে SB অবস্থানে আসল। এই স্থানান্তরিত অবস্থানে SA-এর সমান্তরালে ভারকেন্দ্র B দিয়ে BF বরাবর ক্রিয়াশীল পিণ্ডের ওজন mg দুটি অংশে বিভাজিত হবে। একটি SB বরাবর BC-এর দিকে ; এর মান = $mg \cos\theta$। অপরটি BC-এর সমকোণে BE-এর দিকে ; এর মান = $mg \sin\theta$। কিন্তু $mg \cos\theta$ বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত সুতার টান T′ দ্বারা নিষ্ক্রিয় হবে, অর্থাৎ $T' = mg\cos\theta$। সুতরাং $mg \sin\theta$ বলই শুধু পিণ্ডটিকে তার সাম্যাবস্থায় আনার চেষ্টা করবে।



চিত্র ৮.৭

কার্যকর বল = $mg \sin\theta$

কিন্তু θ-এর মান যদি অল্প হয় (4°-এর বেশি না হলে), তবে $\sin\theta = \theta$ লেখা যায় এবং দোলক পিণ্ড মোটামুটি সরলরেখায় চলে গণ্য করা যায়।[১]

কার্যকর বল $= mg\theta$ (42)

কিন্তু বল $= ma$ (43)

সমীকরণ (42) ও সমীকরণ (43) হতে আমরা পাই, $ma = -mg\theta$ [∵ ঋণ চিহ্ন ত্বরণ ও সরণ পরস্পর বিপরীত নির্দেশ করে।]

বা, $a = -g\theta$ বা, $a = -g \times \dfrac{\text{চাপ, AB}}{\text{দৈর্ঘ্য, SA}} = -g \times \dfrac{\text{সরণ, AB}}{\text{দৈর্ঘ্য, L}}$

বা, $a = -\dfrac{g}{L} \times$ সরণ, AB (44)

উপরোক্ত সমীকরণে g এবং L ধ্রুব সংখ্যা।

$a = -$ ধ্রুব সংখ্যা $\times$ সরণ, AB

বা, $a \propto -$ সরণ, AB (45)

সমীকরণ (45) হতে দেখা যায় যে, ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং দোলক পিণ্ড A মোটামুটি সরলরেখায় চলে; শুধু তাই নয়, চিত্র হতে আরও বুঝা যায় ত্বরণের বিপরীত দিকে সরণ ঘটছে।

এরূপ গতিসম্পন্ন কোন একটি বস্তুর দোলন কাল T হলে, প্রমাণ করা যায় যে, ত্বরণ

$a = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \times$ সরণ, AB (46)

[$F = ma = -kx$, বা $a = -\dfrac{K}{m}x = -\omega^2 x = -\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 x$]

সুতরাং সমীকরণ (46) ও সমীকরণ (44) হতে লেখা যায়, $\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 = \dfrac{g}{L}$

$\boxed{\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}}$ (47)

এটিই সরল দোলকের দোলন কালের সমীকরণ।

অতএব সমীকরণ (47) হতে প্রমাণিত হয় যে, অল্প বিস্তারে সরল দোলকের গতি সরল ছন্দিত গতি।

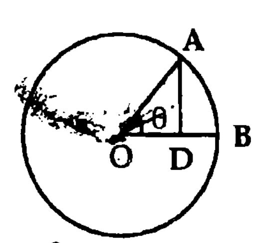
---

[১] চিত্র ৮·৮-এ $\angle AOB = \theta$

θ কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ করলে আমরা পাই,

$\theta = \dfrac{\text{চাপ, AB}}{\text{ব্যাসার্ধ, OA}}$

বা, $\sin\theta = \dfrac{AD}{OA}$



চিত্র ৮·৮

যেহেতু চাপ AB এবং লম্ব AD সমান নয়, সুতরাং sin θ-কে রেডিয়ান ধরা যায় না। কিন্তু θ খুব ছোট হলে, AB এবং AD প্রায় সমান হয়। এই অবস্থায় D বিন্দু B বিন্দুর খুব নিকটস্থ হয়। সেক্ষেত্রে, $\sin\theta \simeq \theta$ ধরা যায়।

সারণী ৮·২-এ sin θ এবং θ-এর মানের তুলনামূলক হিসাব দেখানো হল।

সারণি ৮·২

θ (ডিগ্রীতে)	θ (রেডিয়ানে)	sin θ	পার্থক্য (%)
0	0	0	0
2	0·0349	0·0349	0
4	0·0698	0·0698	0
5	0·0873	0·0872	0·11
10	0·1745	0·1736	0·52

৮·১২ সরল দোলকের সূত্রাবলি
Laws of simple pendulum

কোন একটি সরল দোলক দুলবার সময় তার দোলনকাল চারটি সূত্র মেনে চলে। এদেরকে সরল দোলকের সূত্র বলা হয়। বিখ্যাত বিজ্ঞানী **গ্যালিলিও** এই সূত্রগুলো আবিষ্কার করেন। সূত্রগুলো নিম্নে প্রদত্ত হল ঃ

(১) **১ম সূত্র—সম-কাল সূত্র (Law of Isochronism) ঃ 'সম' অর্থ সমান এবং 'কাল' অর্থ সময়। কোন এক স্থানে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন একটি সরল দোলকের বিস্তার 4 ডিগ্রির মধ্যে থাকলে তার প্রতিটি দোলনের জন্য সমান সময় লাগবে।** কাজেই কার্যকর দৈর্ঘ্য L ও অভিকর্ষজ ত্বরণ g স্থির থাকলে এবং $\theta \le 4°$ হলে, দোলনকাল, T = ধ্রুব। 1582 খ্রিস্টাব্দে গ্যালিলিও এই সূত্রটি আবিষ্কার করেন।

(২) **২য় সূত্র—দৈর্ঘ্যের সূত্র ঃ বিস্তার 4°-এর মধ্যে থাকলে কোন নির্দিষ্ট স্থানে সরল দোলকের দোলন কাল তার কার্যকর দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সমানুপাতিক।** যদি T দোলন কাল এবং L কার্যকর দৈর্ঘ্য হয়, তবে সূত্রানুযায়ী একই স্থানে $T \propto \sqrt{L}$ অর্থাৎ কার্যকর দৈর্ঘ্য চার গুণ বাড়লে দোলন কাল দুই গুণ বাড়বে বা কার্যকর দৈর্ঘ্য চার গুণ কমলে দোলন কাল দুই গুণ কমবে ইত্যাদি।

L_1 ও L_2 কার্যকর দৈর্ঘ্যের জন্য দোলনকাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 হলে, $T_1^2/L_1 = T_2^2/L_2$।

(৩) **৩য় সূত্র—ত্বরণের সূত্র ঃ বিস্তার 4°-এর মধ্যে থাকলে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোন একটি সরল দোলকের দোলন কাল ঐ স্থানের অভিকর্ষীয় বা অভিকর্ষজ ত্বরণের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।** দোলনকাল T এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ g হলে সূত্রানুসারে একই কার্যকর দৈর্ঘ্য $\boxed{T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}}$

অর্থাৎ g বাড়লে T কমবে এবং g কমলে T বাড়বে।

g_1 ও g_2 অভিকর্ষজ ত্বরণবিশিষ্ট স্থানে দোলন কাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 হলে $T_1^2 \times g_1 = T_2^2 \times g_2$।

(৪) **৪র্থ সূত্র—ভরের সূত্র ঃ বিস্তার 4°-এর মধ্যে এবং কার্যকর দৈর্ঘ্য স্থির থাকলে কোন স্থানে সরল দোলকের দোলন কাল দোলক পিণ্ডের ভর, আকৃতি বা উপাদানের উপর নির্ভর করে না।** অর্থাৎ দোলকপিণ্ড বড় কি ছোট হোক, তামা কিংবা সীসার হোক, ফাঁপা বা নিরেট হোক কার্যকর দৈর্ঘ্য স্থির থাকলে, একই স্থানে দোলকের দোলন কালের কোন পরিবর্তন ঘটে না।

সরল দোলকের সূত্র হতে দোলনকালের সমীকরণ প্রতিপাদন (Deduction of the equation of time period from the laws of simple pendulum)

সরল দোলকের দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্র হতে আমরা পাই,

$T \propto \sqrt{L}$, যখন g ধ্রুবক ও $\theta \le 4°$ এবং $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$, যখন L ধ্রুবক ও $\theta \le 4°$।

সূত্র দুটি একত্র করে আমরা পাই $\boxed{T \propto \sqrt{\frac{L}{g}}}$, যখন L এবং g উভয়েই পরিবর্তনশীল ও $\theta \le 4°$

বা, $T = k\sqrt{\frac{L}{g}}$

এখানে k একটি ধ্রুবক।

কোন স্থানে g-এর মান জানা থাকলে এবং পরীক্ষার সাহায্যে L এবং T নির্ণয় করে উপরের সমীকরণে বসালে k-এর মান 2π-এর সমান হতে দেখা যাবে।

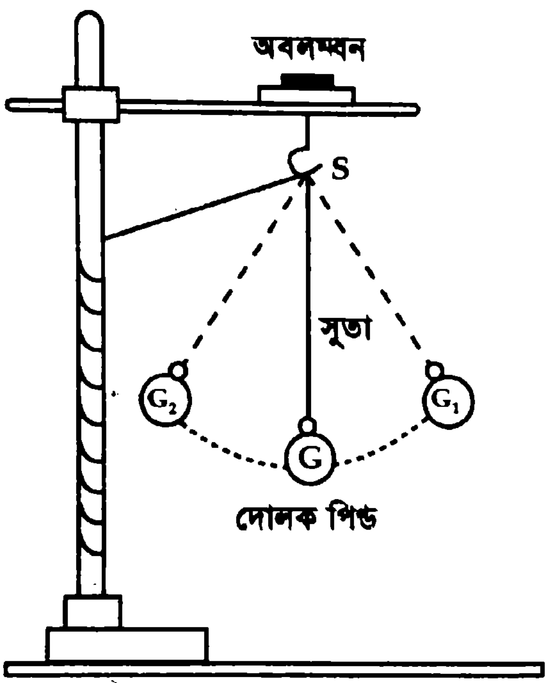
উপরের সমীকরণে k-এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \qquad (48)$$

এটিই সরল দোলকের দোলনকালের সমীকরণ। উক্ত সমীকরণের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় করা হয়।

৮·১৩ সরল দোলকের সূত্রগুলোর সত্যতা নির্ণয়
Determination of laws of simple pendulum

১ম সূত্র ঃ একটি সরল দোলক তৈরি করে তাকে দুলতে দেয়া হল যেন বিস্তার 4 ডিগ্রীর বেশি না হয় [চিত্র ৮·৯]। এখন একটি স্টপ-ওয়াচ নিয়ে 20 বা 25টি পূর্ণ দোলনের সময় বের করি। মোট সময়কে দোলন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে দোলন কাল T নির্ণয় করি। দোলকের বিস্তার 4 ডিগ্রীর মধ্যে রেখে বিভিন্ন বিস্তারে অনুরূপভাবে দোলন কাল নির্ণয় করলে দেখা যায় যে, দোলন কাল সর্বদা সমান হচ্ছে। অতএব প্রথম সূত্রটি প্রমাণিত হল।



চিত্র ৮·৯

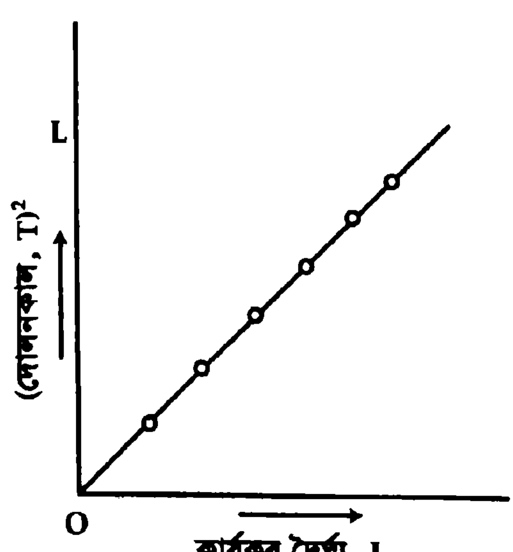
২য় সূত্র ঃ গোলাকার দোলক পিণ্ডবিশিষ্ট একটি সরল দোলক লই। স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে দোলক পিণ্ডের ব্যাসার্ধ r বের করে তার সাথে সুতার দৈর্ঘ্য l যোগ করে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = l + r$ নির্ণয় করি। এখন সরল দোলকটিকে 4° অপেক্ষা কম বিস্তারে দুলতে দিয়ে একটি স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে অনেকগুলো পূর্ণ দোলনের সময় বের করি। মোট সময়কে দোলন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে দোলন কাল বের করি এবং তার বর্গ লই। বিভিন্ন কার্যকর দৈর্ঘ্যের জন্য অনুরূপভাবে দোলন কাল নির্ণয় করে প্রত্যেক কার্যকর দৈর্ঘ্যের জন্য দোলন কালের বর্গ লই।

$L_1, L_2, L_3, \ldots$ ও L_n কার্যকর দৈর্ঘ্যের সরল দোলকের দোলনকাল যথাক্রমে, $T_1, T_2, T_3, \ldots$ ও T_n হলে পরীক্ষায় দেখা যায় যে—

$$\frac{T_1^2}{L_1} = \frac{T_2^2}{L_2} = \ldots\ldots = \frac{T_n^2}{L_n} = \text{ধ্রুবক বা, } \frac{T^2}{L} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\text{বা, } T^2 = \text{ধ্রুবক} \times L \text{ বা, } T \propto \sqrt{L}$$

দ্বিতীয় সূত্রটি প্রমাণিত হল।



চিত্র ৮·১০

অথবা,

কার্যকর দৈর্ঘ্য, L-কে X-অক্ষে এবং দোলন কালের বর্গ, T^2-কে Y অক্ষে স্থাপন করে একটি লেখচিত্র অংকন করলে [চিত্র ৮·১০] তা একটি সরলরেখা হবে। এ হতেও প্রমাণিত হয় যে, $\frac{T^2}{L}$ = ধ্রুবক অর্থাৎ $T \propto \sqrt{L}$.

৩য় সূত্র ঃ পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে গোলাকার দোলক পিণ্ডবিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরল দোলককে দুলতে দিয়ে পূর্বের নিয়মে তার দোলন কাল নির্ণয় করি। মনে করি কোন স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g_1 এবং প্রাপ্ত দোলন কাল T_1। অপর কোন স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g_2 এবং প্রাপ্ত দোলন কাল T_2। গণনায় দেখা যায়,

$$T_1^2 \times g_1 = T_2^2 \times g_2 \text{ অর্থাৎ } T^2 \times g = \text{ ধ্রুবক।}$$

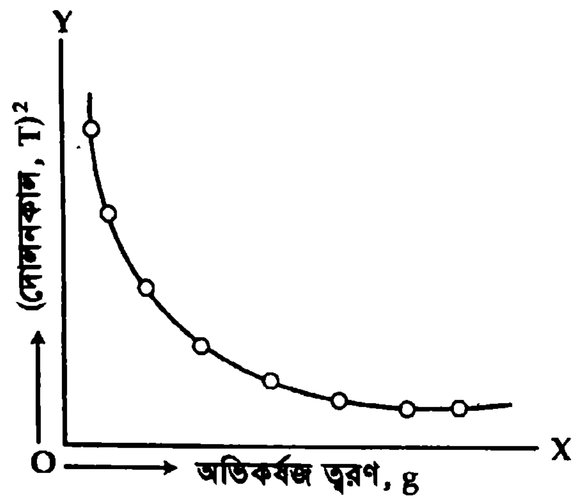
$$\text{বা, } T^2 = \text{ধ্রুবক} \times \frac{1}{g} \quad \text{বা, } T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$$

তৃতীয় সূত্র প্রমাণিত হল।

কাজেই দ্বিতীয় সূত্রের সত্যতা প্রমাণিত হল।

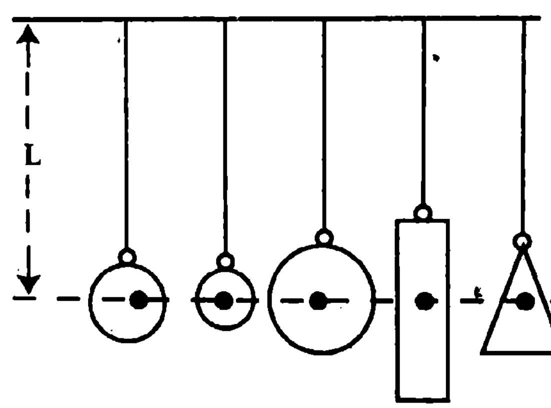
অথবা,

একটি ছক কাগজের X-অক্ষে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g এবং Y-অক্ষে দোলন কালের বর্গ T^2 নির্দেশ করে g বনাম T^2 লেখচিত্র অঙ্কন করলে লেখচিত্রটি একটি অধিবৃত্ত (Parabola) হয় [চিত্র ৮·১১]। এ দ্বারাও তৃতীয় সূত্রটি প্রমাণিত হয়।



চিত্র ৮·১১

৪র্থ সূত্র ঃ বিভিন্ন উপাদান, আকৃতি এবং ভরের কয়েকটি দোলক পিণ্ড নিয়ে সরল দোলক তৈরি করি [চিত্র ৮·১২] এবং 4° অপেক্ষা কম বিস্তারে দুলতে দিয়ে প্রত্যেক দোলকের ক্ষেত্রে পূর্বের ন্যায় দোলন কাল বের করি। পরীক্ষায় প্রতি ক্ষেত্রেই দোলন কাল সমান হতে দেখা যায়। অতএব চতুর্থ সূত্র প্রমাণিত হল।



চিত্র ৮·১২

৮·১৪ দোলকের ব্যবহার
Uses of pendulum

দোলকের কয়েকটি ব্যবহার নিম্নে আলোচিত হল।

(১) অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান নির্ণয়।

(২) পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয়।

(৩) সময় নির্ণয়।

(১) সরল দোলকের সাহায্যে g-এর মান নির্ণয় ঃ

মূলতত্ত্ব (Theory) ঃ সরল দোলকের সাহায্যে কোন স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় করা যায়। এর জন্য ব্যবহৃত সমীকরণটি হল,

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

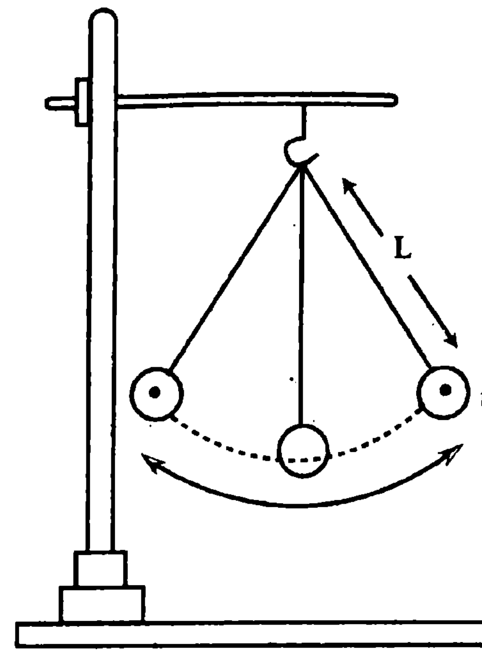
এখানে, T = দোলন কাল, L = কার্যকর দৈর্ঘ্য, এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ।

উপরের সমীকরণের উভয় পার্শ্বকে বর্গ করে পাই, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$

$$\boxed{\text{বা, } g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}}$$

π একটি ধ্রুব রাশি ও একটি নির্দিষ্ট স্থানে g ধ্রুব। কাজেই ঐ স্থানে L/T^2-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে এবং গড় L/T^2-এর মান সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যাবে।

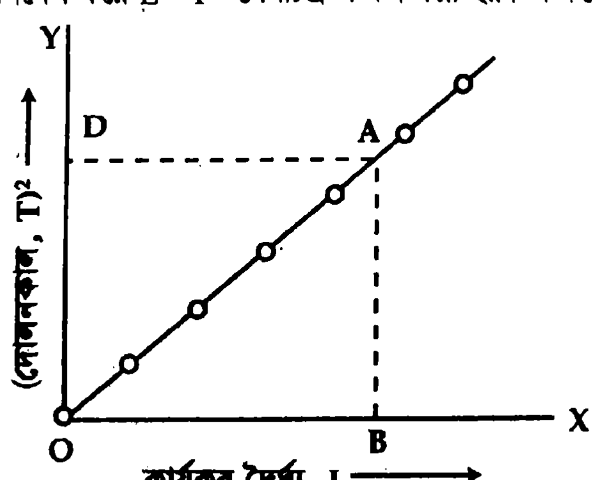
পরীক্ষা : প্রথমে মিটার স্কেলের সাহায্যে একটি সরল দোলকের [চিত্র ৮·১৩] সুতার দৈর্ঘ্য l এবং স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে দোলকের গোলাকার পিণ্ডের ব্যাস হতে ব্যাসার্ধ r জেনে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = l + r$ নির্ণয় করা হয়। এর পর পর্যবেক্ষণ স্থানে দোলকটিকে 4° অপেক্ষা কম কৌণিক বিস্তারে দুলতে দিয়ে একটি স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে তার 20টি পূর্ণ দোলনের সময় কাল t নির্ণয় করে 20 দ্বারা ভাগ করে দোলন কাল, $T = \frac{t}{20}$ বের করা হয় এবং দোলনকালের বর্গ T^2 নির্ণয় করা হয়। সুতরাং দৈর্ঘ্য l পরিবর্তন করে অনুরূপভাবে বিভিন্ন কার্যকর দৈর্ঘ্যে দোলকের দোলনকাল নির্ণয় করা হয় এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে দোলনকালের বর্গ বের করা হয়।



চিত্র ৮·১৩

হিসাব : প্রাপ্ত ফলাফল হতে প্রত্যেক ক্ষেত্রে $\frac{L}{T^2}$ নির্ণয় করে গড় $\frac{L}{T^2}$-এর মান উপরের সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়, কেননা $4\pi^2$ একটি ধ্রুব রাশি যার মান জানা আছে।

বিকল্প পদ্ধতি : একটি ছক কাগজের অনুভূমিক অক্ষে কার্যকর দৈর্ঘ্য L এবং উল্লম্ব অক্ষে দোলন কালের বর্গ, T^2 নির্দেশ করে $L—T^2$ লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। অঙ্কনে $L—T^2$ লেখচিত্রটি মূল বিন্দু O-গামী একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ৮·১৪]। এই সরলরেখার যে কোন বিন্দু A হতে X-অক্ষের উপর AB এবং Y-অক্ষের উপর AD লম্ব টেনে অঙ্কন অনুসারে AB ও AD-এর অর্থাৎ T^2 ও L-এর মান বের করা হয়। এখন L ও T^2-এর মান উপরের সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়।



চিত্র ৮·১৪

এখানে, $g = 4\pi^2 \frac{AD}{AB} = 4\pi^2 \frac{AD}{AB}$

$= 4\pi^2 \frac{OB}{AB}$

$= 4\pi^2 \cot \angle BOA$

সতর্কতা ঃ

(১) বিস্তার 4°-এর মধ্যে হওয়া উচিত।

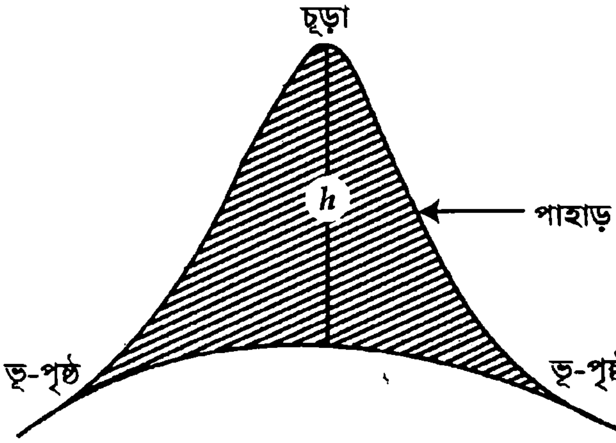
(২) পিন্ডের ব্যাস বেশ কয়েকবার নির্ধারণ করে তাদের গড় নেয়া উচিত।

(৩) T-এর মান নির্ভুল হওয়া উচিত এবং এর জন্য অধিক সংখ্যক পূর্ণ দোলনে ব্যয়িত সময় নির্ণয় করা উচিত।

(৪) পিন্ডটির উল্লম্ব তলে পাক খেতে না দিয়ে মুক্তভাবে দুলবার ব্যবস্থা করা উচিত।

(২) পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয়

(ক) সরল দোলকের সাহায্যে ঃ সরল দোলকের সাহায্যে কোন পাহাড়ের উচ্চতা অর্থাৎ ভূ-পৃষ্ঠ হতে পাহাড়ের চূড়া বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করা যায় [চিত্র ৮·১৫]। প্রথমে পাহাড়ের পাদদেশে অর্থাৎ ভূ-পৃষ্ঠে সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান উপরের নিয়মে নির্ণয় করা হয়। মনে করি এই মান = g



চিত্র ৮·১৫

এর পর পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান অনুরূপভাবে নির্ণয় করা যায়।

ধরি এই মান = g_1

হিসাব ও গণনা ঃ তা হলে নিউটনের মহাকর্ষজ সূত্রানুসারে পাহাড়ের পাদদেশে,

$$g = \frac{GM}{R^2} \tag{50}$$

এবং পাহাড়ের চূড়ায়,

$$g_1 = \frac{GM}{(R+h)^2} \tag{51}$$

এখানে, M = পৃথিবীর ভর, G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং h = পাহাড়ের উচ্চতা। সমীকরণ (50)-কে সমীকরণ (51) দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{g}{g_1} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2 \tag{52}$$

$$h = \left(\sqrt{\frac{g_1}{g}} - 1\right)R \tag{53}$$

সুতরাং R, g এবং g_1-এর মান জেনে h-এর মান নির্ণয় করা যায়।

(৩) সময় নির্ণয়

দোলক ঘড়িতে দোলকের সাহায্যে সময় মাপা হয়। এ সব দোলক সাধারণত ধাতুর দ্বারা নির্মিত। শীতকালে শৈত্যে তাদের দৈর্ঘ্য কমে যায় এবং গ্রীষ্মকালে তাপে দৈর্ঘ্য বেড়ে যায়। সুতরাং শীতকালে ঘড়ির দোলন কাল কমে যায় এবং ঘড়ি দ্রুত চলে। গ্রীষ্মকালে ঘড়ির দোলন কাল বেড়ে যায় এবং ঘড়ি ধীরে চলে। সাধারণ দোলক ঘড়ির পিন্ডের নিচের একটি স্ক্রুকে প্রয়োজনমত ঘুরিয়ে পিন্ডকে উঠা-নামা করিয়ে দোলন কাল নিয়ন্ত্রণ করা হয়।

মাটির নিচে বা উঁচু পাহাড়ের উপর g-এর মান কম। কাজেই উঁচু পাহাড়ে বা মাটির নিচে দোলকের দোলন কাল বেশি হয়। এর অর্থ ঘড়ি ধীরে চলে। বিষুব অঞ্চলে g-এর মান কম এবং মেরু অঞ্চলে g-এর মান বেশি। অতএব একটি দোলক ঘড়িকে বিষুব অঞ্চল হতে মেরু অঞ্চলে নিলে ঘড়িটি দ্রুত চলে।

৮.১৫ সেকেণ্ড দোলক
Second pendulum

যে সরল দোলকের দোলন কাল 2 সেকেন্ড তাকে সেকেণ্ড দোলক বলে। অর্থাৎ সেকেন্ড দোলকের T = 2 সে.। কোন একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য L হলে, $T = 2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{n}$

অর্থাৎ $2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ বা, $1 = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

বা, $1 = \pi^2 \frac{L}{g}$

$$\therefore \boxed{L = \frac{g}{\pi^2}} \quad (54)$$

V.V.I

100%

সুতরাং, দেখা যায়, সেকেন্ড দোলক অভিকর্ষজ ত্বরণের উপর নির্ভর করে। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের সমানুপাতিক।

৮.১৬ স্প্রিং-জনিত স্পন্দন
Oscillation due to spring

অনুভূমিক দিকে স্পন্দন ঃ

অনুভূমিক স্প্রিং-এর সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ অনুচ্ছেদ ৮.৮-এ প্রতিপাদন করা হয়েছে। সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

এটি একটি সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ

এই ছন্দিত গতির পর্যায়কাল,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \left[\because \omega^2 = \frac{K}{m}\right] \quad (55)$$

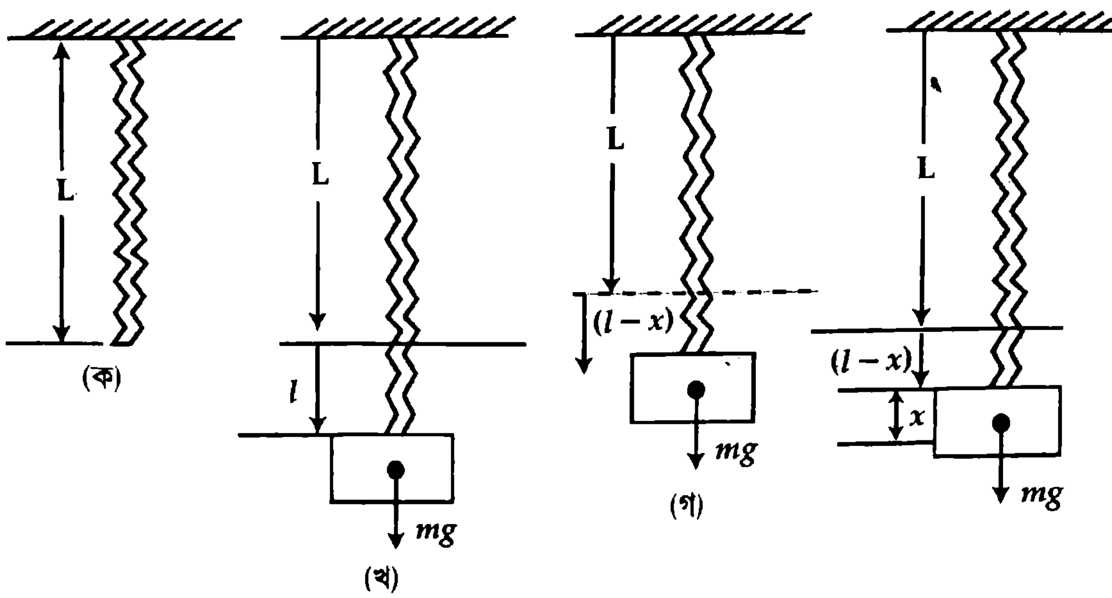
উল্লম্ব দিকে স্পন্দন ঃ

মনে করি ৮.১৬ (ক) চিত্রে ভারমুক্ত অবস্থায় একটি ঝুলন্ত স্প্রিং। ধরি এই অবস্থায় এর দৈর্ঘ্য L এবং স্প্রিং ধ্রুবকের মান K।

এখন (খ) চিত্রে স্প্রিং-এর নিম্ন প্রান্তে m ভর যুক্ত করায় স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য l পরিমাণ প্রসারিত হয়ে সাম্য অবস্থায় ঝুলতে থাকল। এমতাবস্থায় স্প্রিং দ্বারা প্রযুক্ত উর্ধ্বমুখী বল F বস্তুর ওজনের সমান হবে। কিন্তু, $F = Kl$

সুতরাং, $\boxed{Kl = mg}$ $K = \frac{mg}{L}$

মনে করি (গ) চিত্রে বস্তু সাম্য অবস্থানের উপরে x দূরত্বে রয়েছে। এখন স্প্রিং-এর প্রসারণ $(l - x)$। স্প্রিং-এর দ্বারা প্রযুক্ত ঊর্ধ্বমুখী বলের মান $= K(l - x)$



চিত্র ৮.১৬

এবং বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের লব্ধি $F = K(l - x) - mg = -Kx$ (56)

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে এই অবস্থায় প্রযুক্ত লব্ধি বল সাম্যাবস্থান হতে এর সরণের সমানুপাতিক। সুতরাং স্প্রিং দ্বারা ঝুলানো বস্তুকে উল্লম্ব দিকে গতিশীল করলে সেদিকে সরল ছন্দিত গতি হয়।

এখন সমীকরণ (56)-এ

$F = ma$ বসিয়ে পাওয়া যায় [নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্রানুসারে]

$ma = -Kx$

বা, $ma + Kx = 0$

বা, $a + \frac{K}{m}x = 0$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0$ $\left[\quad a = \frac{d^2x}{dt^2}\right]$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad [\because \omega^2 = K/m] \tag{57}$$

এটি সমীকরণ (7)-এর অনুরূপ বিধায় সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ।

অতএব, উল্লম্বভাবে স্পন্দিত স্প্রিং-এর গতি সরল ছন্দিত গতি।

এই গতির পর্যায়কাল,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{K/m}}$$

বা, $T = 2\pi\sqrt{m/K}$ (58)

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad [\quad Kl = mg\,]$$

BG & JEWEL

স্মরণিকা

পর্যাবৃত্ত গতি ঃ কোন বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর বস্তুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে ঐ গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

স্পন্দন ঃ পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোন বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোন নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে বস্তুর ঐ গতিকে স্পন্দন বলে।

সরল ছন্দিত স্পন্দন ঃ কোন পর্যায় গতিসম্পন্ন বস্তুর উপর কার্যকর ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তার মান ঐ বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল ছন্দিত স্পন্দন বলে।

সরল দোলক ঃ একটি ছোট ভারী বস্তু পিণ্ডকে একটি ওজনবিহীন, অপ্রসারণীয় এবং নমনীয় সুতার সাহায্যে একটি দৃঢ় অবলম্বনে ঝুলিয়ে দেওয়ায় তা যদি বিনা বাধায় এদিক-ওদিক দোলে, তবে সুতা সমেত পিণ্ডটিকে সরল দোলক বলে।

পূর্ণ দোলন (Complete oscillation) ঃ কোন একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড তার গতিপথের যে কোন বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে দুই প্রান্ত অবধি যেয়ে পুনরায় সেই বিন্দুতে ফিরে এলে একটি পূর্ণ দোলন হয়।

দোলন বা পর্যায় কাল (Time period) ঃ কোন একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ডের একটি পূর্ণ দোলন দিতে যে পরিমাণ সময় লাগে তাকে দোলন কাল বলে।

কম্পাঙ্ক (Frequency) ঃ কোন একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড এক সেকেণ্ডে যতবার পূর্ণ দোলন দেয়, তাকে কম্পাঙ্ক বা কম্পনি বলে।

বিস্তার (Amplitude)ঃ দুলবার সময় কোন একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড সাম্যাবস্থা হতে সর্বাপেক্ষা যতটা বেশি দূরে যায় তাকে তার বিস্তার বলে।

দশা ঃ কোন একটি কম্পমান বস্তুর যে কোন মুহূর্তের দোলনের অবস্থা অর্থাৎ বস্তুটির অবস্থান, বেগ, ত্বরণ এবং গতির অভিমুখ যা দ্বারা বুঝা যায় তাকে দশা বলে।

সেকেন্ড দোলক (Second's pendulum) ঃ যে সরল দোলকের দোলনকাল 2 সেকেন্ড, তাকে সেকেন্ড দোলক বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

সরণ, $x = a \sin \omega t$ (1)

সরণ, $x = a \sin(\omega t + \delta)$ (2)

বেগ, $v = A\,\omega \cos \omega t$ (3)

$= \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ (4)

বেগ (সর্বোচ্চ), $v_{max} = \omega A$ (5)

ত্বরণ, $a = -\omega^2 x$ (6)

ত্বরণ (সর্বোচ্চ), $= -\omega^2 A$ (7)

প্রত্যায়নী বল, $F = -Kx$ (8)

কৌণিক বেগ, $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (9)

দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{-\text{সরণ}}{\text{ত্বরণ}}}$ (10)

স্প্রিং-এর দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (11)

স্থিতিশক্তি, $P.\ E. = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ (12)

গতিশক্তি, $K.\ E. = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$ (13)

মোট শক্তি, $= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ (14)

সরল দোলকের দোলন কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (15)

কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = \frac{T^2 \times g}{4\pi^2}$ (16)

কম্পাঙ্ক ও দোলন কালের মধ্যে সম্পর্ক, $nT = 1$ (17)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। $y = 0.9 \sin \pi \left(\frac{x}{15} + \frac{2t}{0.3}\right)$; একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ। এখানে x ও y সেন্টিমিটারে প্রকাশিত হলে তরঙ্গটির কৌণিক কম্পাঙ্ক, পর্যায়কাল ও বেগ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৬]

প্রদত্ত তরঙ্গের সমীকরণ

$$y = 0.9 \sin \pi \left(\frac{x}{15} + \frac{2t}{0.3}\right) \quad (1)$$

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x) \quad (2)$$

সমীকরণ (1) ও (2) তুলনা করে পাই,

বিস্তার, $A = 0.9$

$\frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi x}{15} \qquad \lambda = 30 \text{ cm}$

কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$$\omega = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15} = 0.209 \text{ rads}^{-1}$$

বেগ, $\frac{2\pi}{\lambda} vt = \pi \frac{2t}{0.3}$

বা, $v = \frac{\lambda}{0.3} = \frac{30}{0.3} = 300 \text{ cms}^{-1}$

কম্পাঙ্ক, $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{300}{30} = 10 \text{ Hz}$

পর্যায়কাল, $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ sec}$

উত্তর : 0.209 rads^{-1} ; 0.1s ; 300 cms^{-1}

২। একটি বস্তুকণা তার দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে দোলন শুরু করে 0.1 m বিস্তার ও 1 Hz কম্পাঙ্কযুক্ত সরল ছন্দিত গতি সম্পন্ন করে। 4.5 s পর কণাটির সরণ কত হবে ?

মনে করি সরণ $= x$

আমরা পাই, $x = A \sin\omega t$

$$= A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \times t\right) \quad (1)$$

এখানে, $n = 1 \text{ Hz}$

$A = 0.1 \text{ m}$

$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{1 \text{ s}^{-1}} = 1 \text{ s}$

দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে মধ্য অবস্থানে যেতে $\frac{1}{4}\text{s} = 0.25 \text{ s}$ সময় লাগে হেতু 4.25 s-এ কণাটির 4টি পূর্ণ কম্পন দিয়ে মধ্য অবস্থানে আসবে। কাজেই মধ্য অবস্থানে অতিক্রম করার 0.25 s পরের সরণই হবে নির্ণেয় 4.5 s পর কণাটির সরণ।

সমীকরণ (1) হতে পাই, $x = 0.1 \text{ m} \times \sin\frac{2\pi}{1} \times 0.25$

$$= 0.1 \text{ m} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0.1 \text{ m}$$

৩। একটি বস্তুকণা সরল ছন্দিত গতির পর্যায়কাল 0.001 s এবং বিস্তার 0.005 m। কণাটির গরিষ্ঠ বেগ এবং গতিপথের মধ্য অবস্থান হতে 0.002 m দূরের ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে করি ত্বরণ $= a$

আমরা পাই, $|a| = \omega^2 |x| = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 |x| \quad (1)$

এখানে,

$T = 0.001 \text{ s}$

$|x| = 0.002 \text{ m}$

$\pi^2 = 9.87$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$|a| = \frac{4 \times 9.87}{(0.001\text{s})^2} \times 0.002 \text{ m} = 7.9 \times 10^4 \text{ ms}^{-2}$$

পুনরায় ধরি, গরিষ্ঠ বেগ = v_{max}

$$v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} \times A$$

এখানে, $A = 0.005\ m$

$$v_{max} = \frac{2 \times 3.14}{0.001 s} \times 0.005\ m = 31.4\ ms^{-1}$$

৪। একটি হাল্কা স্প্রিং-এর এক প্রান্তে 0.1 kg ভরের একটি ক্ষুদ্র বস্তু যুক্ত করে একটি দৃঢ় বস্তুতে অপর প্রান্তটিকে বেধে তাকে ঝুলানো হল। এতে স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য 0.02 m বৃদ্ধি পেল। যদি ক্ষুদ্র বস্তুটিকে নিচের দিকে একটু টেনে ছেড়ে দেওয়া হয় তবে তার উল্লম্ব কম্পনের পর্যায়কাল কত হবে ? স্প্রিং-এর স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।

এখানে, সরণ = 0.02 m
ত্বরণ = $9.8\ ms^{-2}$

মনে করি পর্যায়কাল = T

আমরা পাই, $T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{সরণ}}{\text{ত্বরণ}}}$ (মান বিবেচনায়) (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই, $T = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{0.02\ m}{9.8\ ms^{-2}}} = 0.284\ s$

আবার, $\frac{\text{সরণ}}{\text{ত্বরণ}} = \frac{m}{K}$

এখানে, $m = 0.1\ kg$

$$K = \frac{\text{ত্বরণ}}{\text{সরণ}} \times m = \frac{9.8\ ms^{-2} \times 0.1\ kg}{0.02\ m} = 49\ Nm^{-1}$$

৫। কোন স্প্রিং-এর এক প্রান্তে একটি বস্তু ঝুলালে এটি 20 cm প্রসারিত হয়। বস্তুটিকে একটু টেনে ছেড়ে দিলে কম্পাঙ্ক কত হবে ? [য. বো. ২০০১]

এখানে,
স্প্রিং-এর প্রসারণ, l = 20 cm = 0.2 m
অভিকর্ষজ ত্বরণ, g = $9.8\ ms^{-2}$
কম্পাঙ্ক f = ?

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.2}{9.8}}$$

$$= 0.89 s$$

অতএব, কম্পাঙ্ক $f = \frac{1}{T}$

$$f = \frac{1}{0.89} Hz = 1.11\ Hz$$

৬। একটি সরল ছন্দিত গতিতে চলমান বস্তুর বিস্তার 0.01 m ও কম্পাঙ্ক 12 Hz। বস্তুটির 0.005 m সরণে বেগ কত হবে ? বস্তুটির সর্বোচ্চ বেগ কত হবে ? [য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০১]

এখানে, $\omega = 2\pi n = 2 \times 3.14 \times 12\ rad\ s^{-1}$
$A = 0.01\ m$
$x = 0.005\ m$
$n = 12\ Hz$

মনে করি বেগ = v

আমরা পাই, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$v = 2 \times 3.14 \times 12\ rad\ s^{-1} \sqrt{(0.01\ m)^2 - (0.005\ m)^2}$$

$$= 0.653\ ms^{-1}$$

পুনরায়, সর্বোচ্চ বেগ v_{max}-এর ক্ষেত্রে, $x = 0$

সমীকরণ (1) অনুযায়ী,

$$v_{max} = \omega A$$

$$= 2 \times 3.14 \times 12\ rad\ s^{-1} \times 0.01\ m$$

$$= 0.7536\ ms^{-1}$$

৭। 0·05 kg ভরের বস্তু 20 cm বিস্তার এবং 2 s পর্যায়কালের সরল ছন্দিত গতি প্রাপ্ত হলে বস্তুটির সর্বোচ্চ দ্রুতি নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৪]

A T

আমরা জানি,
সর্বোচ্চ দ্রুতি,

$$v_{max} = \omega A$$

$$\therefore \quad v_{max} = 0{\cdot}20 \times 3{\cdot}14 = 0{\cdot}628 \text{ ms}^{-1}.$$

এখানে, $A = 20\text{ cm} = 0{\cdot}20\text{ m}$
$T = 2s$
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi = 3{\cdot}14 \text{ rad s}^{-1}$

৮। একটি জায়গায় অভিকর্ষীয় ত্বরণ $9{\cdot}81 \text{ ms}^{-2}$। ঐ স্থানে একটি সরল দোলক প্রতি সেকেন্ডে একটি অর্ধদোলন সম্পন্ন করে। দোলকটির সুতার দৈর্ঘ্য 0·99 m হলে, দোলক পিন্ডের ব্যাস নির্ণয় কর।

মনে করি দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য = L

আমরা পাই, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$L = \frac{T^2 \times g}{4\pi^2} \qquad (1)$$

এখানে, T= 2টি অর্ধ দোলনে ব্যয়িত সময় = 2 × 1টি অর্ধদোলনে ব্যয়িত সময় = 2 × 1s
$g = 9{\cdot}81 \text{ ms}^{-2}$
$\pi^2 = 9{\cdot}87$

সমীকরণ (1) অনুযায়ী, $L = \frac{(2 \times 1s)^2 \times 9{\cdot}81 \text{ ms}^{-2}}{4 \times 9{\cdot}87} = 0{\cdot}994 \text{ m}$

কাজেই দোলক পিন্ডের ব্যাসার্ধ r হলে, $L = l + r$ অনুযায়ী,

$$r = L - l = (0{\cdot}994 - 0{\cdot}990)\text{ m} = 0{\cdot}004\text{ m}$$

নির্ণেয় ব্যাস $= 2r = 2 \times 0{\cdot}004\text{ m}$
$= 0{\cdot}008\text{ m}$

৯। কোন একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 25·6% বাড়ালে এর দোলনকাল কত হবে বের কর। [চ. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \qquad (1)$$

এবং $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \qquad (2)$

সমীকরণ (2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \quad \text{বা,} \quad T_2 = T_1\sqrt{\frac{1{\cdot}256\,L_1}{L_1}}$$

বা, $T_2 = 2 \times \sqrt{1{\cdot}256}$

$\therefore \; T_2 = 2{\cdot}24\text{ s}$

এখানে,
কার্যকরী দৈর্ঘ্য = L_1
25·6% বৃদ্ধিতে কার্যকরী দৈর্ঘ্য
$L_2 = L_1$ এর $\frac{25{\cdot}6}{100} + L_1$
$= 0{\cdot}256\,L_1 + L_1 = 1{\cdot}256L_1$
এখানে,
$T_1 = 2\text{ s}$
$T_2 = ?$

$T_2 = (\sqrt{1\cdot}$
$L_2 = ($
$L_2 = (1+$

১০। কোন স্থানে দুটি সরলদোলকের দোলনকালের অনুপাত 4 : 5 হলে এদের কার্যকর দৈর্ঘ্যের অনুপাত বের কর। [ব. বো. ২০০৫]

আমরা জানি, $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

বা, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$

$\therefore \; L_1 : L_2 = 16 : 25$

এখানে,
$T_1 / T_2 = \frac{4}{5}$

১১। একটি সরল দোলকের দোলনকাল 50% বৃদ্ধি করতে এর কার্যকর দৈর্ঘ্য কত গুণ বাড়াতে হবে? [চ. বো. ২০০৩; ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g} \qquad (1)$

আবার,

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$

বা, $T_1^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}$

এখানে,
আদি দোলনকাল = Ts
শেষ দোলনকাল, $T_1 = \left(T + \frac{T\,50}{100}\right)s = \left(T + \frac{T}{2}\right)s$
আদি দৈর্ঘ্য = L
শেষ দৈর্ঘ্য = L_1

বা, $\left(T + \frac{T}{2}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{L_1}{g}$ বা, $\left(\frac{3T}{2}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{L_1}{g}$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L_1}{g} \times \frac{4}{9}$ (2)

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই, $\frac{4\pi^2 L}{g} = \frac{4\pi^2 L_1}{g} \times \frac{4}{9}$

বা, $\frac{L}{L_1} = \frac{4}{9}$ বা, $L_1 = \frac{9}{4}L = 2.25L$

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= 2.25L - L$
$= 1.25L$

কার্যকর দৈর্ঘ্য 1.25 গুণ বাড়াতে হবে।

১২। কোন সরল ছন্দিত স্পন্দন গতিসম্পন্ন কণার বিস্তার 3 cm এবং সর্বোচ্চ বেগ 6.24 cms^{-1} হলে কণাটির পর্যায়কাল কত ? [য. বো. ২০০৩]

A v_{max}

আমরা জানি,

সর্বোচ্চ বেগ, $v_{max} = \omega A$

$\omega = \frac{v}{A}$

$= \frac{0.0624}{0.03} = 2.08 \text{ rad s}^{-1}$

এখানে,
$A = 3 \text{ cm}$
$= 0.03 \text{ m}$
$v = 6.24 \text{ cm s}^{-1}$
$= 0.0624 \text{ ms}^{-1}$

আবার, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

বা, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.14}{2.08} = 3.02 \text{ sec}$

১৩। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $y = 10 \sin(\omega t + \delta)$, পর্যায়কাল 30s এবং আদি সরণ 0.05m হলে কণাটির (ক) কৌণিক কম্পাঙ্ক ; (খ) আদি দশা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\omega = \frac{2 \times 3.14}{30} = 0.209 \text{ rads}^{-1}$

আবার, $y = 10 \sin(\omega t + \delta)$

বা, $0.05 = 10 \sin(\omega t + \delta) = 10 \sin(\omega \times 0 + \delta)$

$= 10 \sin \delta$

$\sin \delta = \frac{0.05}{10} = 0.005$

$\delta = \sin^{-1}(0.005)$

$= 0.286°$

এখানে,
পর্যায়কাল, $T = 30s$
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = ?$
আদি সময়, $t = 0$
সরণ, $y = 0.05m$
আদি দশা, $\delta = ?$

১৪। একটি বস্তুকণা সরল ছন্দিত স্পন্দনে দুলছে যার গতির সমীকরণ $x = 10 \cos(6\pi t + \pi/3)$ মিটার। $t = 3$ সেকেন্ড সময় পরে বস্তুটির সরণ, বেগ ও ত্বরণ কত হবে ?

এখানে,

সরণ, $x = 10 \cos(6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে সরণ, $x = 10 \cos(6\pi \times 3 + \pi/3) = 10 \cos(18\pi + \pi/3)$

$= 10 \cos \pi/3 = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{m}$

বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{10 \cos(6\pi t + \pi/3)\} = -60\pi \sin(6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $v = -60\pi \sin(6\pi \times 3 + \pi/3) = -60\pi \sin(18\pi + \pi/3)$

$= -60\pi \sin \pi/3 = -60 \times 3.14 \times 0.866$

$= -163.15 \text{ ms}^{-1}$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\{-60\pi \sin(6\pi t + \pi/3)\} = -360\pi^2 \cos(6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $a = -360\pi^2 \cos(6\pi \times 3 + \pi/3) = -360\pi^2 \cos(18\pi + \pi/3)$

$= -360\pi^2 \cos \pi/3 = -360 \times 9.87 \times \frac{1}{2} = -1776.6 \text{ms}^{-2}$।

১৫। দেখাও যে, সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোন বস্তুকণার স্পন্দনের পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{\text{সরণ}}{\text{ত্বরণ}}}$।

আমরা জানি, সরল ছন্দিত কোন বস্তুকণার স্পন্দনের পর্যায়কাল

$$T = 2\pi\sqrt{m/K}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{\omega^2 m}} \quad [\quad \sqrt{K/m} = \omega,\ \text{বা},\ K = \omega^2 m]$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{\omega^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{\omega^2 x}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\text{সরণ}}{\text{ত্বরণ}}}$$ [মান বিবেচনায় প্রমাণিত]

১৬। সরল ছন্দিত গতি সম্পন্নকারী কোন কণার সর্বোচ্চ বেগ 0·02ms⁻¹। কণাটির বিস্তার 0·004m হলে কণাটির পর্যায়কাল কত ? [ঢা. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

সর্বোচ্চ বেগ, $v_{max} = \omega A$

বা, $\omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{0{\cdot}02}{0{\cdot}004}$

$= 5\ \text{sec}^{-1}$

আবার, পর্যায়কাল, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$= \frac{2 \times 3{\cdot}14}{5}$

$= 1{\cdot}256\ \text{s}$

এখানে,

$v_{max} = 0{\cdot}2\ \text{ms}^{-1}$

$A = 0{\cdot}004\ \text{m}$

$T = ?$

P.V

১৭। 100 cm কার্যকরী দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি দোলক প্রতি মিনিটে 30টি দোল সম্পন্ন করে। পরীক্ষনীয় স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

$T = 2\pi\sqrt{l/g}$

বা, $T^2 = 4\pi^2 l/g$

$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4 \times (3{\cdot}142)^2}{(2)^2}$

$= 9{\cdot}87\ \text{ms}^{-2}$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $l = 100$ cm

30টি দোল দিতে সময় লাগে = 1 মিনিট

1টি " $= \frac{60}{30} = 2$ সেকেন্ড

$T = 2\ \text{s}$

১৮। একটি সরল দোলক A-এর দৈর্ঘ্য অপর একটি সরল দোলক B-এর দৈর্ঘ্যের 2 গুণ। দোলক B-এর দোলন কাল 2 sec হলে দোলক A-এর দোলন কাল কত ?

আমরা জানি,

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L_A}{g}}$$

এবং $$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{L_B}{g}}$$

বা, $$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{L_A}{L_B}} = \sqrt{\frac{2L_B}{L_B}} = \sqrt{2}$$

$$T_A = \sqrt{2} \times T_B = \sqrt{2} \times 2$$

$$= 2{\cdot}838\ \text{sec}$$

এখানে,

$T_B = 2$ sec

$L_A = 2L_B$

$T_A = ?$

P.V

১৯। একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য চারগুণ করা হলে এর দোলনকাল কত হবে ? [রা. বো. ২০০৪]

মনে করি, দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির পর দোলনকাল $= T_2$

এখানে, আদি দোলনকাল, $T_1 = 2$ sec

ধরি, আদি দৈর্ঘ্য, $L_1 = L$

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির পর দৈর্ঘ্য, $L_2 = 4L$

উভয় ক্ষেত্রে অভিকর্ষজ ত্বরণ $= g$

BG & JEWEL

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$$

সমীকরণ (2) কে (1) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

বা, $T_2 = T_1\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 2 \times \sqrt{\frac{4L}{L}} = 2 \times \sqrt{4} = 2 \times 2 = 4$ sec

২০। একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য বের কর। ($g = 9.8\ ms^{-2}$) [কু. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৪]

মনে করি কার্যকর দৈর্ঘ্য = L

আমরা পাই, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$L = \frac{T^2 \times g}{4\pi^2} \qquad (1)$$

এখানে, দোলনকাল, T = 2s কেননা দোলকটি সেকেন্ড দোলক

অভিকর্ষীয় ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

এবং $\pi^2 = 9.87$

সমীকরণ (1) হতে আমরা পাই, $L = \frac{2 \times 2 \times 9.8}{4 \times 9.87} = 0.993$ m.

২১। একটি সরল দোলক $g = 9.8\ ms^{-2}$ স্থানে $\frac{3}{4}$ s-এ একবার টিক শব্দ করে বা অর্ধ-দোলনকাল $\frac{3}{4}$ s। দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে করি কার্যকর দৈর্ঘ্য = L

আমরা পাই, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$L = \frac{T^2 \times g}{4\pi^2} \qquad (1)$$

এখানে, $T = 2 \times$ টিকের সময় $= 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ s

$g = 9.8\ ms^{-2}$

$\pi^2 = 9.87$

সমীকরণ (1) হতে আমরা পাই, $L = \frac{3 \times 3 \times 9.8}{2 \times 2 \times 4 \times 9.87} = 0.5585$ m

২২। একটি সেকেন্ড দোলক ভূ-পৃষ্ঠে সঠিক সময় দেয়। চন্দ্রে নিয়ে গেলে এর দোলনকাল কত হবে ? পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ এবং পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 81 গুণ। [ঢা. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০১; সি. বো. ২০০১]

অথবা, পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দোলনকাল 2s। একে চন্দ্র পৃষ্ঠে নেয়া হল। চন্দ্র পৃষ্ঠে এর দোলনকাল কত হবে ? পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 81 গুণ এবং ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ গণ্য কর।

ধরি দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য L এবং পৃথিবী ও চন্দ্র পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ যথাক্রমে g_e এবং g_m।

আমরা জানি,

$$T_e = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_e}} \qquad (1)$$

$$\text{এবং } T_m = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_m}} \qquad (2)$$

এখানে,

পৃথিবীর পৃষ্ঠে দোলনকাল, $T_e = 2$ sec

চন্দ্রের ব্যাসার্ধ, $R_m = R$

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R_e = 4R$

চন্দ্রের ভর, $M_m = m$

পৃথিবীর ভর, $M_e = 81m$

চন্দ্রে দোলনকাল, $T_m = ?$

সমীকরণ (2)-কে (1) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{T_m}{T_e} = \sqrt{\frac{g_e}{g_m}} \qquad (3)$$

কিন্তু $g_e = \frac{GM_e}{R_e^2}$

$$g_m = \frac{GM_m}{R_m^2}$$

$T_m = \frac{\sqrt{\text{পৃথিবীর ভরের মূল}}}{\text{পৃথিবীর ব্যাসার্ধের মূল}}$

$= \frac{\sqrt{81}}{4} \times 2 = 4.5$

সমীকরণ (3) হতে পাই, $\frac{T_m}{T_e} = \sqrt{\frac{M_e R_m^2}{M_m R_e^2}}$

$$= \sqrt{\frac{81m \times (R)^2}{m \times (4R)^2}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$T_m = 2.25 \times T_e = 2.25 \times 2 = 4.5$ s

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। পর্যয়বৃত্ত গতি [কু. বো. ২০০৬] ও সরল ছন্দিত গতির সংজ্ঞা দাও। [য. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩]
২। সরল ছন্দিত গতির বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর। [চ. বো. ২০০৫; রা. বো. ২০০৩]
৩। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোন কণার সরণের রাশিমালা প্রতিপাদন কর।
৪। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোন কণার বেগ ও ত্বরণের রাশিমালা প্রতিপাদন কর।
৫। সরল ছন্দিত গতির সংজ্ঞা দাও। [রা. বো. ২০০৬] এর দুটি উদাহরণ দাও। [ঢা. বো. ২০০০; কু. বো. ২০০০]
৬। সংজ্ঞা দাও ঃ (ক) সরল দোলক [রা. বো. ২০০৪], (খ) দোলন কাল, (গ) কম্পাঙ্ক, (ঘ) বিস্তার এবং (ঙ) দশা।
৭। সরল দোলকের সংজ্ঞা দাও। সরল দোলকের গতি কি ধরনের গতি ?
৮। সরল দোলকের বৈশিষ্ট্য কি কি ?
৯। সরল দোলকের সূত্রগুলোর নাম লিখ।
১০। $L-T^2$ লেখচিত্রটির আকৃতি কিরূপ হবে ? এর তাৎপর্য কি ? [রা. বো. ২০০৩; ঢা. বো. ২০০০]
১১। সরল দোলকের ব্যবহার উল্লেখ কর।
১২। সেকেন্ড দোলক কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০৪]
১৩। সরল দোলকের সাহায্যে কিভাবে পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা যায় ?
১৪। সরল দোলকের দোলনকাল পৃথিবীর কেন্দ্রে কত ?
১৫। একটি দোলক ঘড়ি গ্রীষ্মকালে ধীরে এবং শীতকালে দ্রুত চলে কেন ?
১৬। সব সরল ছন্দিত গতি পর্যাবৃত্ত গতি কিন্তু সব পর্যাবৃত্ত গতি সরল ছন্দিত গতি নয়—উক্তিটি ব্যাখ্যা কর।
১৭। সরল ছন্দিত গতিযুক্ত পথের কোন্ কোন্ বিন্দুতে গতিবেগ এবং ত্বরণ সর্বাধিক? আবার কোন্ কোন্ বিন্দুতে সর্বনিম্ন?
১৮। সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য বাড়ালে দোলনকাল বাড়ে না কমে ?
১৯। সরল দোলকের কৌণিক সরণ $4°$-এর বেশি হলে অসুবিধা কি ?

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০৩] এর বৈশিষ্ট্যসমূহ উল্লেখ কর। [কু. বো. ২০০৩; রা. বো. ২০০২]
২। সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির সংজ্ঞা দাও। ঐরূপ গতির দুটি উদাহরণ দাও। [ঢা. বো. ২০০০; কু. বো. ২০০০]
৩। সরল ছন্দিত গতি সম্পন্নকারী কোন একটি কণার বিস্তার, কম্পাংক, দশা এবং আদি দশার সংজ্ঞা দাও।
৪। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন বস্তুর কণার সরণ, বেগ এবং ত্বরণের সমীকরণ বের কর।
৫। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন বস্তুকণার স্থিতি শক্তির সমীকরণ বের কর।
৬। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন বস্তুকণার গতি শক্তির সমীকরণ বের কর।
৭। শক্তির নিত্যতা সূত্র বিবৃত কর এবং সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার ক্ষেত্রে প্রমাণ কর।
৮। সরল ছন্দিত গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তার সাধারণ সমাধান বের কর। [কু. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০১; চ. বো. ২০০৪, ২০০১; ব. বো. ২০০৫, ২০০৩; ঢা. বো. ২০০৩, ২০০১; য. বো. ২০০৫, ২০০০ ; রা. বো. ২০০৫, ২০০০]
৯। দেখাও যে $x = A \sin(\omega t + \delta)$ সরল দোলন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সাধারণ সমাধান। [কু. বো. ২০০১]
১০। প্রমাণ কর যে, ভারযুক্ত একটি স্প্রিং-এর উল্লম্বতলে দোলন সরল ছন্দিত গতি পর্যায়ের। এ গতির পর্যায়কাল নির্ণয় কর।
১১। দেখাও যে, সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোন কণার মোট শক্তি তার দোলনের বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।
১২। লেখচিত্রের সাহায্যে সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন বস্তুকণার গতিপথের বিভিন্ন বিন্দুতে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির ভিন্নতা ব্যাখ্যা কর। দেখাও যে গতিপথের সর্বত্র স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তির সমষ্টি সর্বদা ধ্রুব থাকে। [কু. বা. ২০০৪]
১৩। সরল ছন্দিত গতির পর্যায়কালের সাথে বল ধ্রুবক ও ভরের সম্পর্ক প্রতিপাদন কর।
১৪। সরল দোলক কাকে বলে ? সরল দোলকের সূত্রগুলো বিবৃত কর।
১৫। সরল দোলকের সূত্রগুলো কিভাবে প্রমাণ করা যায় আলোচনা কর।
১৬। সরল দোলকের দৈর্ঘ্যের ও ত্বরণের সূত্র প্রমাণ করার পদ্ধতি বর্ণনা কর। [ব. বো. ২০০১]
১৭। প্রমাণ কর যে, অল্প বিস্তারে একটি সরল দোলকের গতি সরল ছন্দিত গতি বা স্পন্দন। [ঢা. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০৪; কু. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০৬, ২০০৩, '০১; চ. বো. ২০০৬, ২০০২, ২০০০; য. বো. ২০০৬, ২০০১]
১৮। সরল দোলকের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ । [চ. বো. ২০০২]
১৯। অভিকর্ষজ ত্বরণ কাকে বলে ? পরীক্ষাগারে এর মান কিভাবে নির্ণয় করা যায় ? [রা. বো. ২০০১]
২০। সেকেন্ড দোলক অবশ্যই সরল দোলক কিন্তু সরল দোলক সেকেন্ড দোলক হতেও পারে নাও হতে পারে—ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০৫]
২১। সরল দোলকের সাহায্যে কিভাবে কোন স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় করে বর্ণনা কর। [রা. বো. ২০০৩, ২০০১; ব. বো. ২০০১; চ. বো. ২০০১]
২২। স্প্রিংজনিত স্পন্দনের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, এক্ষেত্রে l = প্রসারণ। [য. বো. ২০০৪]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। একটি বস্তুকণা 0.03 m দীর্ঘ একটি সরলরেখায় সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন করছে। মধ্য অবস্থান অতিক্রমকালে বেগ $0.09\ m\ s^{-1}$ হলে এর পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [উঃ 1.05 s]
২। একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার 0.02 m সরণে ত্বরণ $5 \times 10^{-2}\ ms^{-2}$ হলে এর পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [উঃ 12.56 s]

BG & JEWEL

$T = 2\pi\sqrt{}$ $V = \omega A = $

(৩) সরল ছন্দিত গতি রচনাকারী একটি কণার বিস্তার 0·025 m ও পর্যায়কাল 1·05 s হলে মধ্য অবস্থান দিয়ে যাওয়ার কালে কণাটির বেগ কত হবে ? ✓ [উঃ 0·15 ms^{-1}]

(৪) সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোন একটি বস্তুকণার সর্বোচ্চ বেগ 0·1 ms^{-1}। এই গতির বিস্তার 0·03 m হলে পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [উঃ 1·885 s]

(৫) কোন স্থানে একটি সরল দোলকের ক্ষেত্রে $\frac{L}{T^2}$ এর মান পরীক্ষায় 0·25 ms^{-2} পাওয়া গেল। ঐ স্থানে g-এর মান নির্ণয় কর। [উঃ 9·87 ms^{-2}]

(৬) একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0·5 \sin \pi \left(100t - \frac{x}{3·4}\right)$, এখানে সব কয়টি রাশি S. I. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, পর্যায়কাল ও বেগ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬]

A f T V

[উত্তর ঃ বিস্তার 0·5m ; কম্পাঙ্ক 50 Hz ; পর্যায়কাল 0·02s, বেগ 340 ms^{-1}]

(৭) একটি সরল দোলকের দোলনকাল 3 s। এর কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [$g = 9·8\ ms^{-2}$] [উঃ 2·234 m]

(৮) একটি সরল দোলকের দোলন কাল 2 s। কোন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান 9·8 ms^{-2} হলে কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। $L = 0.992 = \frac{4 \times 9.8}{4\pi^2}$ [উঃ 0·992 m]

অথবা, একটি সরল দোলকের কম্পাঙ্ক প্রতি মিনিটে 30 বার। দোলকটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(৯) একটি সরল দোলক 1 s-এ একবার টিক শব্দ করে। যদি অভিকর্ষজ ত্বরণ 9·8 Nkg^{-1} হয়, তবে তার কার্যকর দৈর্ঘ্য বের কর। [উঃ 0·992 m]

(১০) একটি সরল দোলক অর্ধসেকেন্ডে একবার টিক শব্দ করে। অভিকর্ষীয় ত্বরণের মান 9·8 Nkg^{-1} হলে কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। $L = \frac{9.8}{4\pi^2}$ [উঃ 0·248 m]

(১১) 125 Nm^{-1} বল ধ্রুবক সম্পন্ন একটি স্প্রিং-কে দৈর্ঘ্যে 0·04 m প্রসারিত করতে কি পরিমাণ বল দৈর্ঘ্য বরাবর প্রয়োগ করতে হবে ? K x $F = Kx$ [উঃ 5N]

(১২) একটি সরল দোলক 1 min-এ 30 বার দোলন দেয় অভিকর্ষীয় ত্বরণ 9·8 ms^{-2} হলে দোলকটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উঃ 0·992 m]

(১৩) একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 1 m। কোন স্থানে g এর মান 9·8 Nkg^{-1} হলে ঐ স্থানে দোলকটির দোলনকাল নির্ণয় কর। [উঃ 2 s]

(১৪) একটি সরল দোলকের সূতার দৈর্ঘ্য 0·99 m এবং দোলন কাল 2 s। অভিকর্ষীয় ত্বরণ 9·8 Nkg^{-1} হলে দোলক পিন্ডের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [উঃ 29×10^{-4} m]

(১৫) যে স্থানে $g = 9·8\ ms^{-2}$, সে স্থানে একটি সরল দোলকের কম্পাঙ্ক প্রতি মিনিটে 30 হয়, তবে দোলকটির সুতার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। (ববের ব্যাস = 0·006 m) [উঃ 0·989 m]

(১৬) A ও B দুটি সরল দোলক। এদের মধ্যে A-এর দৈর্ঘ্য B-এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। B-এর দোলনকাল 3s হলে A-এর দোলনকাল নির্ণয় কর। [উঃ 4·23 s]

(১৭) একটি সরল দোলকের সুতার দৈর্ঘ্য 98 cm এবং এর দোলনকাল 2s হলে দোলক পিন্ডের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। ($g = 9·8\ ms^{-2}$) [উত্তর ঃ 1·29 cm]

(১৮) কোন স্প্রিং এর এক প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু ঝুলালে এটি 10cm প্রসারিত হয়। বস্তুটিকে একটু টেনে ছেড়ে দিলে এর পর্যায়কাল কত হবে ? [উত্তর ঃ 0·63s]

(১৯) যদি অভিকর্ষীয় ত্বরণ 9·8 ms^{-2} হয়, তবে 150 cm দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি সরল দোলকের দোলনকাল ও কম্পাঙ্ক বের কর। [উত্তর ঃ 2·46s ; 0·41 Hz]

(২০) একটি সরল দোলকের দোলনকাল ভূ–পৃষ্ঠে 2 সেকেন্ড। চন্দ্রপৃষ্ঠে নিয়ে গেলে এর ববের ওজন 80% হ্রাস পায়। চন্দ্রপৃষ্ঠে এর দোলনকাল নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 4·47 সেকেন্ড]

(২১)। 250gm ভরের একটি বস্তু সরল ছন্দিত গতিতে গতিশীল। মধ্যাবস্থান হতে বস্তুটির যখন 0·15m সরণ হয় তখন এর উপর ক্রিয়ারত প্রত্যায়নী বলের মান 0·4N। গতির দোলন কাল কত ? [উত্তর ঃ 1·923s]

(২২)। তাপমাত্রা বৃদ্ধির ফলে একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য এমনভাবে বৃদ্ধি পেল যে দোলনকাল পরিবর্তিত হয়ে 2·04 সেকেন্ড হল। পরিবর্তিত অবস্থায় দোলকটি ঘণ্টায় কত সেকেন্ড ধীরে চলবে ? [উত্তর ঃ 71 s]

(২৩)। একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য শৈত্যের ফলে হ্রাস পেল। এর ফলে দোলনকাল এমন হল যে, দোলকটি দিনে 10 sec ফাস্ট যায়। পরিবর্তিত দোলন কাল কত ? [কু. বো. ২০০৬] (উত্তর ঃ 1·9977s)

(২৪)। দুটি সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 25 : 16 তাদের দোলনকালের অনুপাত নির্ণয় কর। [উঃ 5 : 4]

(২৫)। দুটি সরল দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 25 : 16। বড় দৈর্ঘ্যের দোলকটির দোলনকাল 2 s হলে, ছোটটির দোলনকাল নির্ণয় কর। $T_1/T_2 = \sqrt{L_1/L_2} = 5/4 \Rightarrow T_2 = 8/5$ [উঃ 1·6 s]

(২৬) ভূ-পৃষ্ঠে ও চন্দ্রপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মানের অনুপাত 81 16 হলে একটি সেকেন্ড দোলককে ভূ-পৃষ্ঠ হতে চন্দ্রপৃষ্ঠে নেয়া হলে দোলন কাল কত হবে ? [উঃ 4·5 s]

(২৭) একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 2·5 গুণ বৃদ্ধি করলে এর দোলনকাল কত হবে ? $T_1/T_2 = \sqrt{L_1/L_2} = \sqrt{2.5}$ [উঃ 3·16 s]

(২৮) একই স্থানে কোন একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 3 গুণ বৃদ্ধি করা হলে, তার দোলন কাল কত হবে? [উঃ 1·73 গুণ]

(২৯) একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 225% বাড়ান হলে তার দোলনকাল কত হবে নির্ণয় কর। [~~উঃ 3s~~]

(৩০)। A স্থানে সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 100 সেমি এবং B স্থানে 80 সেমি.। দোলকটিকে B স্থান হতে A স্থানে নিয়ে আসলে তার ওজন কত বৃদ্ধি পাবে ? [উঃ $\frac{1}{4}$ গুণ]

(৩১)। একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হলে তার দোলনকাল কত হবে ? [উঃ $2\sqrt{2}$ s]

(৩২)। সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $x = 20 \sin \left(31t - \frac{\pi}{6}\right)$, এখানে সংকেতগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। কণাটির (ক) বিস্তার, (খ) কম্পাঙ্ক, (গ) পর্যায়কাল ও (ঘ) সর্বোচ্চ বেগ নির্ণয় কর।

[(ক) 20 m, (খ) 4·93 Hz, (গ) 0·2 s এবং (ঘ) 620 ms^{-1}]

১৩০।
৪৬৫৩+
৪৬৫৩+৮

৯
স্থিতিস্থাপকতা
ELASTICITY

৯.১ সূচনা
Introduction

কঠিন, তরল ও বায়বীয় এই তিনটি শ্রেণীতে পদার্থ সাধারণত বিভক্ত। পদার্থ ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অণু দিয়ে গঠিত। অণুর মধ্যে ক্রিয়াশীল আন্তঃআণবিক বলের বিভিন্নতার কারণে পদার্থ উপরোক্ত শ্রেণীতে বিভক্ত। কঠিন পদার্থে আন্তঃআণবিক বল অনেক বেশি। কঠিন পদার্থকে বাহ্যিক বল প্রয়োগে বিকৃত করা কষ্টকর। বল প্রয়োগে আন্তঃআণবিক স্থানের পরিবর্তনে বস্তুর আকার, আকৃতির পরিবর্তন ঘটে যা তরল বা বায়বীয় পদার্থে ঘটে না। সকল কঠিন পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা নামে একটি সাধারণ ধর্ম রয়েছে। এই অধ্যায়ে আন্তঃআণবিক বল এবং এই বলের সাহায্যে স্থিতিস্থাপকতার ব্যাখ্যা, হুকের সূত্র, স্থিতিস্থাপকতার বিভিন্ন গুণাঙ্ক ব্যাখ্যা, স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়, স্থিতিস্থাপক স্থিতিশক্তি ইত্যাদি আলোচনা করব।

৯.২ পদার্থের গঠন
Constitution of matter

স্থিতিস্থাপকতা আলোচনা করার আগে পদার্থের গঠন এবং কেন পদার্থে এই ধর্মের সৃষ্টি হয় তা জানা অত্যাবশ্যক।

আমরা জানি সব পদার্থই কতকগুলো অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র কণা দিয়ে গঠিত যা পদার্থের সব গুণ বজায় রাখে। এসব ক্ষুদ্র কণাকে **অণু** (molecule) বলে। অণুগুলো ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র স্থিতিস্থাপক গোলক বিশেষ এবং এদেরকে পদার্থের ভিত্তি প্রস্তর (Building block) বলা হয়। পদার্থ গঠনের সময় অণুগুলো পরস্পরের পাশাপাশি থাকে এবং তাদের মধ্যে অতি ক্ষুদ্র পরিমাণের ফাঁকা স্থান রয়েছে। এই ফাঁকা স্থানকে **আন্তঃআণবিক স্থান** (Intermoleculur space) বলা হয়। আন্তঃআণবিক দূরত্বের পরিমাণ প্রায় 10^{-9} m থেকে 10^{-10} m। অণুগুলো এই পরিমাণ দূরত্বে থেকে পরস্পরকে একটি বলে আকর্ষণ করে। এই বলের নাম **আন্তঃআণবিক বল** (Intermolecular force)। এই আন্তঃআণবিক বল যা কঠিন পদার্থের অণুগুলোকে পরস্পরের সঙ্গে আবদ্ধ রাখে তা মূলত তাড়িত (Electrical) বল। অণুগুলো যে সমস্ত আহিত (charged) মৌলিক কণার সমন্বয়ে সৃষ্ট তাদের মিথস্ক্রিয়ার ফলে এই তাড়িত বলের উদ্ভব হয়।

বল প্রয়োগ করে কোন একটি পদার্থকে প্রসারিত করতে চাইলে, আন্তঃআণবিক স্থানের পরিসর বেড়ে যায় এবং নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে কিংবা জড়তার দরুন অণুগুলো তাদের পূর্বাবস্থায় ফিরে আসার চেষ্টা করে। অনুরূপভাবে বল প্রয়োগে কোন বস্তুকে সংকুচিত করতে চাইলে আন্তঃআণবিক স্থানের পরিসর কমে যায় এবং পদার্থ সংকুচিত হয়। জড়তা কিংবা নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে অণুগুলো তাদের আদি স্থানে ফিরে যাবার চেষ্টা করে। এর ফলেই পদার্থে স্থিতিস্থাপকতা ধর্মের সৃষ্টি হয়।

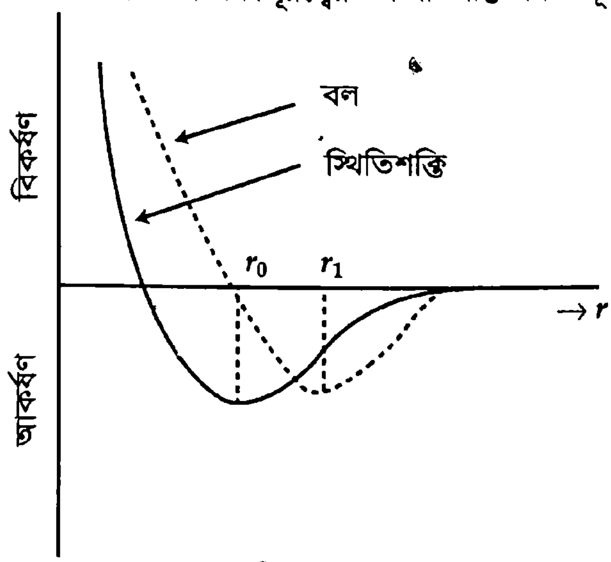
আন্তঃআণবিক স্থানের উপর ভিত্তি করে পদার্থকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা : (১) **কঠিন** (solid) এবং (২) **প্রবাহী** (fluid)। প্রবাহীকে আবার দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে, যথা— **অসংকোচনীয় প্রবাহী**, যেমন তরল (liquid) এবং **সংকোচনীয় প্রবাহী**, যেমন গ্যাস (Gas)।

উপরন্তু অত্যধিক তাপমাত্রায় বায়বীয় পদার্থ আয়নিত হয়। এক্ষেত্রে সমান সংখ্যক ধন ও ঋণ আয়ন সৃষ্টি হয়। পদার্থের এই অবস্থাকে **প্লাজমা অবস্থা** (plasma state) বলা হয়।

৯৩ আন্তঃআণবিক বলের প্রকৃতি
Nature of intermolecular forces

দুটি অণুর মধ্যে দূরত্বের পরিবর্তনের সঙ্গে আন্তঃআণবিক বল এবং স্থিতিশক্তির পরিবর্তন কিরূপ হয় তা নিম্নে আলোচনা করা হল।

ধরা যাক, দুটি অণুর মধ্যে আন্তঃআণবিক বল F এবং আন্তঃআণবিক দূরত্ব r। F এবং r-এর মধ্যে গভীর সম্পর্ক রয়েছে। ৯.১নং চিত্রে আন্তঃআণবিক বল এবং দূরত্বের ও স্থিতিশক্তি বনাম দূরত্বের রেখচিত্র দেখান হয়েছে।



চিত্র ৯.১

যখন অণুগুলোর আন্তঃআণবিক দূরত্ব অনেক বেশি হয় (যেমন গ্যাস অণুগুলোর ক্ষেত্রে) তখন এদের মধ্যে ধনাত্মক প্রকৃতির খুব সামান্য পরিমাণ বল ক্রিয়াশীল থাকে। অণুগুলো যত কাছাকাছি আসে অর্থাৎ এদের মাঝে দূরত্ব কমতে থাকে আকর্ষণ বলের মানও বাড়তে বাড়তে সর্বোচ্চ মানে পৌঁছায়। এর পর দূরত্ব আরও কমলে আকর্ষণ বলের মান কমতে থাকে, অর্থাৎ তখন আন্তঃআণবিক বিকর্ষণ বলও ক্রিয়াশীল হয়। r-এর মান কমে যখন r_0 মানে পৌঁছায় তখন বলের মান শূন্য হয়। এই অবস্থায় আন্তঃআণবিক আকর্ষণ এবং বিকর্ষণ বল সমান হয়। স্থিতিশক্তির রেখচিত্র লক্ষ্য করলে দেখা যাবে আন্তঃআণবিক দূরত্ব কমার সঙ্গে সঙ্গে স্থিতিশক্তিও কমতে থাকে এবং $r = r_0$ হয় তখন স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন হয়। প্রকৃতির স্বাভাবিক নিয়ম হল যে কোন ব্যবস্থা (system) তখনই সাম্য বা সুস্থির হবে যখন এর স্থিতিশক্তি সর্বনিম্ন হবে। সুতরাং $r = r_0$ অবস্থানকে সাম্যাবস্থান বলে এবং r_0 দূরত্বকে সাম্যাবস্থা বা সুস্থিতি দূরত্ব বলা হয়। বিভিন্ন বস্তুর অণুগুলোর মাঝে r_0-এর মান ভিন্নতর হয়।

আন্তঃআণবিক বলের আলোকে স্থিতিস্থাপকতার ব্যাখ্যা (Explanation of elasticity in the light of intermolecular forces)

কোন কেলাসিত জড় পদার্থের উপর বল প্রয়োগ করা হলে সে বল বস্তুর অণুগুলোকে সাম্য দূরত্ব r_0 থেকে খানিকটা সরিয়ে দেয়। কিন্তু অণুগুলো সর্বদাই সাম্য বা স্বাভাবিক দূরত্বে ফিরে যেতে চায়। ফলে সরণের বিপরীত দিকে একটি **প্রত্যায়নক বল** (restoring force) সৃষ্টি হয়। প্রযুক্ত বল বস্তুটিকে টেনে প্রসারিত করতে চাইলে অণুসমূহের পারস্পরিক দূরত্ব বেড়ে যায় এবং প্রত্যায়নক বল হয় **আকর্ষিক** (attractive); অপরপক্ষে প্রযুক্ত বল বস্তুটিকে সঙ্কুচিত করতে চাইলে প্রত্যায়নক বল হবে **বিকর্ষিক** (repulsive)। বস্তুর সাম্যাবস্থানের জন্য প্রযুক্ত বল এবং প্রত্যায়নক বল পরস্পর বিরোধী এবং পরিমাণে সমান হতে হবে। এই প্রত্যায়নক বলকে **স্থিতিস্থাপক বল** (elastic force) বলা হয়। সমপরিমাণ সরণের জন্য বিভিন্ন বস্তুর স্থিতিস্থাপক বল সমান হয় না। সে কারণে বিভিন্ন বস্তুর স্থিতিস্থাপকতাও ভিন্ন ভিন্ন হয়।

বস্তুকে সঙ্কোচন বা প্রসারণের জন্য প্রযুক্ত বলের মান যদি খুব বেশি না হয় তবে এই বলের জন্য সরণ রৈখিক (linear) হয়। ৯.১ চিত্রে r_0 অবস্থানের সামান্য উপরে বা নিচের কিছু অংশকে আমরা রৈখিক ধরতে পারি। এই অবস্থায় স্থিতিস্থাপক বল সরণের সমানুপাতিক। প্রযুক্ত বল তুলে নিলে বস্তুটি স্থিতিস্থাপক বলের কারণে সাম্যাবস্থানে ফিরে যাবে।

চিত্র ৯.১ হতে দেখা যায় যে আন্তঃআণবিক দূরত্ব r_1 এর বেশি হলে বলের মান কমতে থাকে অর্থাৎ আকর্ষণ বল লোপ পেতে থাকে। এই অবস্থায় প্রযুক্ত বল তুলে নিলে বস্তুটি আর পূর্বের সাম্যাবস্থানে ফিরে যায় না। বস্তুর মাঝে তখন **স্থায়ী বিকৃতি** ঘটেছে বলা হয়। অর্থাৎ বস্তুটির স্থিতিস্থাপকতা ধর্ম লোপ পেয়েছে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে প্রযুক্ত বলের একটা সর্বোচ্চ সীমা আছে। সে সীমা পর্যন্ত বল প্রয়োগ করলে বস্তুটি স্থিতিস্থাপক থাকে অর্থাৎ প্রযুক্ত বল সরিয়ে নিলে বস্তুটি পূর্বের অবস্থায় ফিরে যায় ; কিন্তু সীমা অতিক্রম করলে বস্তুটি আর স্থিতিস্থাপক থাকে না। এই সীমাকেই বলা হয় **স্থিতিস্থাপক সীমা** (elastic limit)।

৯.৪ স্থিতিস্থাপকতা
Elasticity

আমরা জানি কোন একটি বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে তার কায়িক পরিবর্তন ঘটে অর্থাৎ বস্তু বিকৃত হয় এবং প্রযুক্ত বল অপসারণ করলে বস্তু পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে। এক খণ্ড রাবার বা স্প্রিংকে দুই পাশ হতে টানলে তার দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় এবং টান ছেড়ে দিলে তা পূর্বের অবস্থায় চলে যায়। ফুটবলের ব্লাডারকে বায়ুপূর্ণ করে বাইরে থেকে চাপ প্রয়োগ করলে তা আয়তনে হ্রাস পায়। আর চাপ সরিয়ে নিলে তা পূর্বের অবস্থায় ফিরে যায়। তা হলে দেখা যায় যে, বল প্রযুক্ত হওয়ার ফলে নিউটনের তৃতীয় গতি সূত্র অনুসারে বস্তুর মধ্যে একটি প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি হয়। প্রযুক্ত বল অপসারিত হলে এই প্রতিক্রিয়া বল বিকৃত বস্তুকে তার পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসতে সাহায্য করে। আর এই বিকৃতির মান বলের পরিমাণ, বলের প্রয়োগ-বিন্দু এবং বস্তুর ধর্মের উপর নির্ভর করে। বস্তুর এই ধর্মকে স্থিতিস্থাপকতা বলে।

সংজ্ঞা ঃ বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় তার আকার বা আয়তন বা উভয়েরই পরিবর্তনের প্রচেষ্টাকে পদার্থের যে ধর্ম বাধা দেয় এবং প্রযুক্ত বল অপসারিত হলে পূর্বের আকার বা আয়তন ফিরে পায় তাকে স্থিতিস্থাপকতা বলে।

৯.৫ স্থিতিস্থাপকতা সম্পর্কে কয়েকটি রাশি
Some terms relating to elasticity

স্থিতিস্থাপকতার সাথে কয়েকটি রাশি বিশেষভাবে সংশ্লিষ্ট। নিম্নে তাদের আলোচনা করা হল ঃ

(ক) পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তু (Perfectly elastic body) ঃ কোন বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করার পর ঐ বল অপসারণ করলে যদি বস্তুটি পূর্ণভাবে পূর্বাবস্থা ফিরে পায় তবে ঐ বস্তুকে পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তু বলে। বাস্তবে কোন বস্তুই পূর্ণ স্থিতিস্থাপক নয়।

(খ) নমনীয় বস্তু (Plastic body) ঃ আমরা জানি, বল প্রয়োগে বস্তুর **বিকার** (deformation) ঘটে, অর্থাৎ বস্তু বিকৃত হয়।

বিকৃতিকারী বল অপসারণের পর যদি বস্তুর অবস্থার পুনঃ প্রাপ্তি না ঘটে তবে তাকে নমনীয় বস্তু (Plastic body) **বলে এবং বস্তুর এই ধর্মকে নমনীয়তা বলে। এই বস্তুকে অস্থিতিস্থাপক বস্তুও বলা হয়।**

(গ) পূর্ণ দৃঢ় বস্তু (Perfectly rigid body) ঃ কোন বস্তুর উপর যে কোন পরিমাণ বল প্রয়োগ করে যদি তার বিকৃতি বা কায়িক পরিবর্তন ঘটানো না যায়, তবে ঐ বস্তুকে পূর্ণ দৃঢ় বস্তু বলে। কিন্তু প্রকৃতিতে কোন বস্তুই পূর্ণ দৃঢ় নয়। কারণ বল প্রযুক্ত হলে তার কিছু না কিছু বিকৃতি ঘটবেই। তবে কোন কোন ব্যবহারিক কাজের জন্য কাচ, ইস্পাত প্রভৃতি বস্তুকে সাধারণত পূর্ণ দৃঢ় বস্তু হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

(ঘ) **স্থিতিস্থাপক সীমা (Elastic limit) :** আমরা জানি বল প্রয়োগে প্রত্যেক বস্তুরই অল্পবিস্তর বিকৃতি ঘটে। বল অপসারণ করলে স্থিতিস্থাপকতার দরুন বস্তু পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে, প্রযুক্ত বলের পরিমাণ বেশি হলে বিকৃতিও বেশি হয়। তবে প্রত্যেক বস্তুই বলের একটি নির্দিষ্ট সীমা পর্যন্ত পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকে। অতএব, **প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের যে সর্বোচ্চ বা ঊর্ধ্বসীমা পর্যন্ত কোন বস্তু পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকে তাকে ঐ বস্তুর স্থিতিস্থাপক সীমা বলে।** বিভিন্ন বস্তুর স্থিতিস্থাপক সীমা বিভিন্ন। ইস্পাত ও হীরার স্থিতিস্থাপক সীমা খুব বেশি আবার দস্তার স্থিতিস্থাপক সীমা খুব কম।

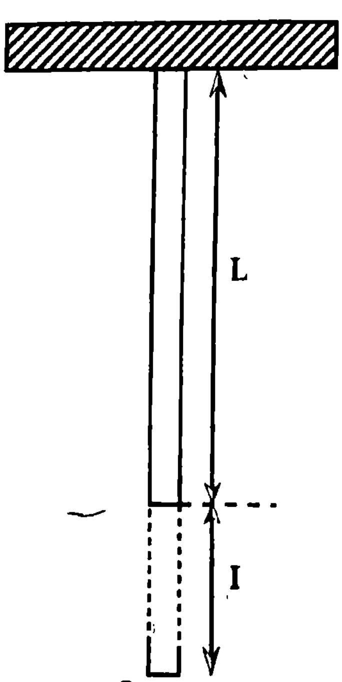
(ঙ) **অসহ ভার এবং অসহ পীড়ন** (Breaking weight and breaking stress) **:** স্থিতিস্থাপক সীমা পর্যন্ত কোন একটি বস্তু পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকে। প্রযুক্ত বল ঐ সীমা অতিক্রম করলে বস্তু পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকবে না। বল অপসারিত হলে কিছু বিকৃতি থেকে যাবে। যদি প্রযুক্ত বলের মান ক্রমশ বৃদ্ধি করা যায় তবে বস্তুটির এমন এক অবস্থা আসবে যখন ভার সহ্য করতে না পেরে ভেঙ্গে বা ছিঁড়ে যাবে। অতএব **ন্যূনতম যে নির্দিষ্ট ভারের ক্রিয়ায় কোন বস্তু ভেঙ্গে বা ছিঁড়ে যায় তাকে অসহ ভার বা অসহ ওজন বলে।** একে **ভঞ্জক-ভারও** বলা হয়।

আর **কোন একটি বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের উপর প্রযুক্ত অসহ ভারকে অসহ পীড়ন বলে।**

$$\boxed{\text{অসহ পীড়ন} = \frac{\text{অসহ ভার}}{\text{ক্ষেত্রফল}}}$$

(চ) **স্থিতিস্থাপক ক্লান্তি** (Elastic fatigue) **:** পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গেছে যে, কোন বস্তু বা তারের উপর ক্রমাগত পীড়নের হ্রাস-বৃদ্ধি করলে পীড়নের সাথে সাথে বিকৃতি হয় না; বিকৃতি ধীর গতিতে সংঘটিত হয় এবং বস্তুর স্থিতিস্থাপক ধর্মের অবনতি ঘটে। এই অবস্থায় বস্তু যেন খানিকটা ক্লান্তিতে ভোগে। এমতাবস্থায় অসহ ভার অপেক্ষা কম ভারে তারটি ছিঁড়ে যেতে পারে। বিখ্যাত বিজ্ঞানী **কেলভিন** (Kelvin) পদার্থের এই ধর্মকে **স্থিতিস্থাপক ক্লান্তি** আখ্যা দিয়েছেন।

(ছ) বিকৃতি (Strain) **:** আমরা জানি, কোন একটি বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করলে বস্তুর দৈহিক বা কায়িক পরিবর্তন ঘটে। এই পরিবর্তনকে বিজ্ঞানের ভাষায় বিকৃতি বলে। এই বিকৃতি দৈর্ঘ্যে হতে পারে, আকারে হতে পারে বা আয়তনেও হতে পারে। **কোন একটি বস্তুর একক মাত্রায় যে পরিবর্তন ঘটে তা দ্বারা বিকৃতি পরিমাপ করা যায়।**



চিত্র ৯.২

মনে করি, কোন একটি বস্তুর আদি মাত্রা = x

বল প্রযুক্ত হবার পর মাত্রা = y

মাত্রার পরিবর্তন = $x \sim y$

একক মাত্রায় পরিবর্তন অর্থাৎ **বিকৃতি** = $\frac{x \sim y}{x}$

বিকৃতির প্রকারভেদ : বিকৃতি মূলত তিন প্রকার, যথা—

(ক) দৈর্ঘ্য বিকৃতি বা অনুদৈর্ঘ্য বিকৃতি (Longitudinal strain),

(খ) আকার বিকৃতি বা কৃন্তন বিকৃতি (Shearing strain) এবং

(গ) আয়তন বিকৃতি (Volume strain)

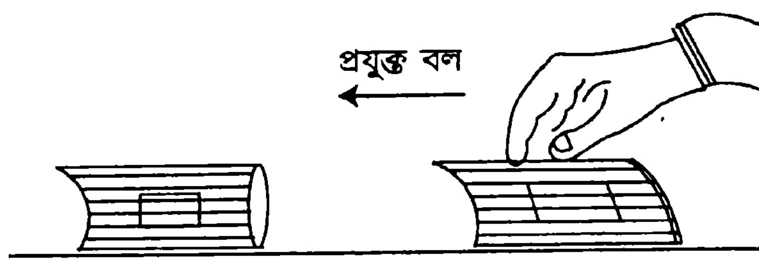
দৈর্ঘ্য বিকৃতি : বল প্রয়োগের ফলে যদি বস্তুর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন ঘটে, তবে তাকে দৈর্ঘ্য বিকৃতি বলে। একক দৈর্ঘ্যের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন দ্বারা বস্তুর দৈর্ঘ্য বিকৃতি পরিমাপ করা যায়।

মনে করি কোন একটি বস্তুর আদি দৈর্ঘ্য = L ; বল প্রয়োগে এর দৈর্ঘ্যের পরিবর্তন = l [চিত্র ৯·২]

$$\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি} = l/L \tag{1}$$

কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি (Shearing strain) ঃ যদি প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের ক্রিয়ায় বস্তুর আয়তন অপরিবর্তিত থেকে কেবলমাত্র এর আকৃতির পরিবর্তন হয় বা বস্তুটি মোচড় খায় তবে ঐ ধরনের বিকৃতিকে কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি বলা হয়। ফলে বস্তুর অভ্যন্তরে যে পীড়ন সৃষ্টি হয় তাকে কৃন্তন পীড়ন (shearing stress) বলে। এ ধরনের বিকৃতিকে ব্যবর্তন বিকৃতিও বলে।

উদাহরণ ঃ একটি মোটা বইকে টেবিলের উপরে চেপে ধরে উপরের মলাটের স্পর্শক বরাবর হাত দিয়ে অনুভূমিকভাবে ঠেললে দেখা যাবে যে বইটির আকৃতি পরিবর্তিত হয়েছে [চিত্র ৯·৩]। প্রযুক্ত বলের ক্রিয়ায় বইটির প্রত্যেক পাতা ঠিক নিচের পাতার সাপেক্ষে অল্প পরিমাণে সরে যায়।

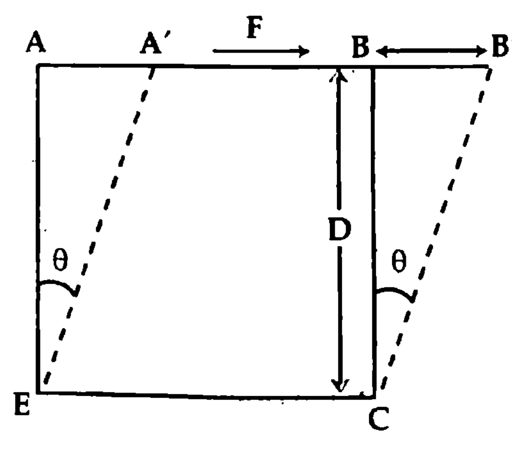


চিত্র ৯·৩

এটাই কৃন্তন বিকৃতি। চিত্রে বইটির পার্শ্বতলে একটি আয়তক্ষেত্র আঁকলে এই বিকৃতির ফলে তা একটি সামান্তরিকে পরিণত হবে [চিত্রের ভিতরের অংশে দেখান হয়েছে]।

আকার পরিবর্তনে সৃষ্ট কৌণিক বিকৃতি দ্বারা কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি পরিমাপ করা যায়।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি ABCE একটি বর্গক্ষেত্র [চিত্র ৯·৪]। এর CE বাহু স্থির রেখে AB বাহুর উপর F পরিমাণ স্পর্শনী বল প্রয়োগ করায় A বিন্দু A′ এবং B বিন্দু B′-এ স্থানান্তরিত হল এবং বস্তু A′B′CE আকার ধারণ করল। কিন্তু A′B′CE একটি রম্বস। তা হলে দেখা যায় যে, বল প্রযুক্ত হওয়ায় বস্তুর আকারের পরিবর্তন ঘটেছে। এর নাম কৃন্তন বিকৃতি।



চিত্র ৯·৪

এই কৃন্তন বিকৃতি বস্তুর কৌণিক বিচ্যুতি দ্বারা পরিমাপ করা হয়। মনে করি কৌণিক বিচ্যুতি = θ এবং θ খুবই ছোট।

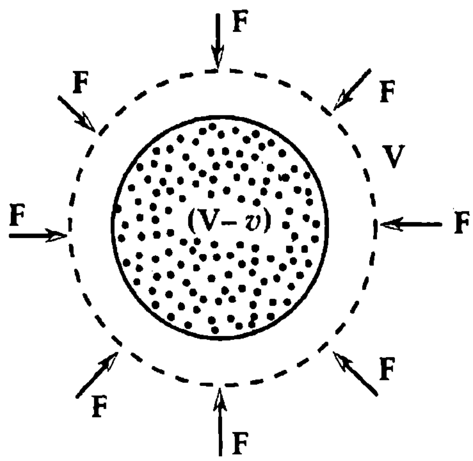
$$\left[\theta = \tan\theta = \frac{d}{D}\right]$$

$$\text{কৃন্তন বিকৃতি} = \theta = \frac{d}{D}$$

এখানে, $AA' = BB' = d$ এবং $BC = AE = D$

$$\text{কাজেই, কৃন্তন বিকৃতি} = \frac{\text{আপেক্ষিক সরণ}}{\text{ব্যবধান দূরত্ব}} \tag{2}$$

আয়তন বিকৃতি ঃ বল প্রয়োগের ফলে যদি বস্তুর আয়তনের পরিবর্তন ঘটে তবে তাকে আয়তন বিকৃতি বলে এবং একক আয়তনের আয়তন পরিবর্তন দ্বারা আয়তন বিকৃতি পরিমাপ করা হয়।



চিত্র ৯·৫

মনে করি কোন একটি বস্তুর আদি আয়তন = V [চিত্র ৯·৫] এবং বল প্রয়োগের ফলে আয়তনের পরিবর্তন = v

$$\text{আয়তন বিকৃতি} = \frac{\text{আয়তনের পরিবর্তন}}{\text{আদি আয়তন}} = \frac{v}{V} \qquad (3)$$

বিকৃতির একক এবং মাত্রা সমীকরণ (Unit and dimension of strain) ঃ বিকৃতি একই জাতীয় দুটি রাশির অনুপাত। সুতরাং **এর একক এবং মাত্রা সমীকরণ নেই।**

(জ) পীড়ন (Stress) ঃ বাহ্যিক বল প্রয়োগে কোন একটি বস্তুকে বিকৃত করলে নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে স্থিতিস্থাপকতার দরুন বস্তুর মধ্যে একটি প্রতিক্রিয়ামূলক বলের সৃষ্টি হয়। এই ক্রিয়ামূলক ও প্রতিক্রিয়ামূলক বলের মান সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব, **কোন একটি বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের উপর ক্রিয়ামূলক বা প্রতিক্রিয়ামূলক বলের মানকে পীড়ন বলে।** আরও সহজভাবে বলা যায় যে, **কোন একটি বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের উপর প্রযুক্ত বলকে পীড়ন বলে।**

মনে করি কোন একটি বস্তুর ক্ষেত্রফল = A এবং প্রযুক্ত বল = F

$$\boxed{\text{পীড়ন} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{F}{A}} \qquad (4)$$

পীড়নের প্রকারভেদ (Kinds of stress) ঃ পীড়ন তিন প্রকার, যথা ঃ

(১) **দৈর্ঘ্য পীড়ন** (Longitudinal stress); (২) **আকার বা কৃন্তন পীড়ন** (Shearing stress) এবং (৩) **আয়তন পীড়ন** (Volume stress)।

দৈর্ঘ্য পীড়ন ঃ দৈর্ঘ্য বিকৃতি ঘটাবার জন্য প্রতি একক ক্ষেত্রফলের উপর দৈর্ঘ্য বরাবর প্রযুক্ত বলকে দৈর্ঘ্য পীড়ন বলে। মনে করি কোন একটি তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A। যদি তার দৈর্ঘ্য বরাবর F পরিমাণ বল প্রয়োগ করা হয়, তবে **দৈর্ঘ্য পীড়ন** $= \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{F}{A}$

কৃন্তন বা মোচড় পীড়ন ঃ আকার বিকৃতি ঘটাবার জন্য যে পীড়ন প্রয়োগ করতে হয় তাকে কৃন্তন বা মোচড় পীড়ন বলে। যদি কোন একটি বস্তুর A ক্ষেত্রফলের উপর F পরিমাণ স্পর্শক বল প্রয়োগ করে আকার বিকৃতি ঘটানো হয় তবে,

$$\text{কৃন্তন পীড়ন} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = F/A$$

আয়তন পীড়ন ঃ আয়তন বিকৃতি ঘটাবার জন্য যে পীড়ন প্রয়োগ করতে হয় তাকে আয়তন পীড়ন বলে। মনে করি কোন একটি বস্তুর চারদিক হতে F পরিমাণ বল অভিলম্বভাবে প্রয়োগ করে আয়তন বিকৃতি ঘটানো হয়েছে। যদি তার তলের ক্ষেত্রফল A হয়, তবে

$$\text{আয়তন পীড়ন} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = F/A$$

পীড়নের একক (Unit of stress) : এম. কে. এস. একক ও এস. আই. পদ্ধতিতে পীড়নের পরম বা নিরপেক্ষ একক নিউটন/বর্গমিটার সংক্ষেপে Nm^{-2}।

পীড়নের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of stress)

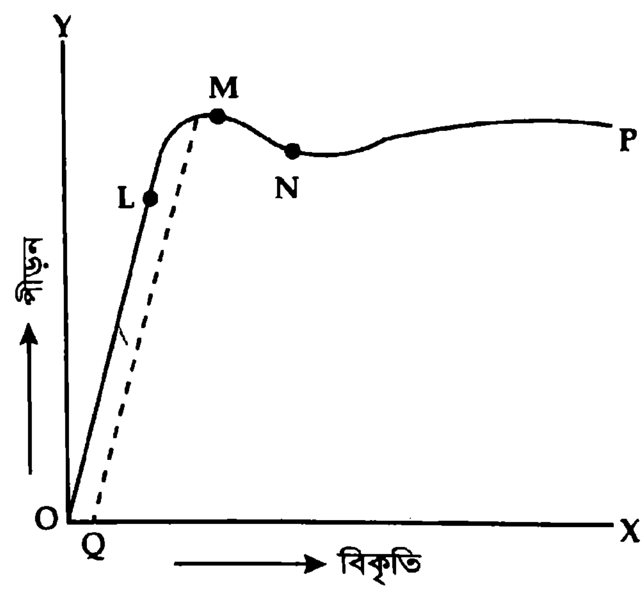
$$\text{পীড়ন} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}} = \frac{\text{ভর} \times \text{ত্বরণ}}{(\text{দৈর্ঘ্য})^2} = \left[\frac{MLT^{-2}}{L^{-2}}\right] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

৯.৬ কঠিন বস্তুর স্থিতিস্থাপক ব্যবহার এবং পীড়ন বনাম বিকৃতি লেখচিত্র

Elastic behaviour of a solid and stress-strain graph

কোন একটি তারের এক প্রান্ত কোথাও বেঁধে অপর প্রান্তে ক্রমবর্ধমান কয়েকটি ভার পর পর ঝুলাই এবং প্রত্যেক ভারের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির পরিমাণ বের করি। তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল এবং আদি দৈর্ঘ্য হতে ভিন্ন ভিন্ন পীড়নের জন্য ভিন্ন ভিন্ন বিকৃতি বের করি এবং **পীড়ন** ও **বিকৃতির** একটি লেখচিত্র অঙ্কন করি। পীড়নের সাথে বিকৃতি কিভাবে পরিবর্তিত হয় তা লেখচিত্র হতে পরিষ্কার বুঝতে পারা যায়। এই লেখচিত্রে পীড়নকে Y-অক্ষে এবং বিকৃতিকে X-অক্ষে স্থাপন করি [চিত্রে ৯.৬]।

O বিন্দুতে পীড়ন শূন্য, সুতরাং বিকৃতিও শূন্য। O বিন্দু হতে L বিন্দু পর্যন্ত লেখটি একটি সরলরেখা হওয়ায় ঐ বিন্দু পর্যন্ত পীড়ন ও বিকৃতি পরস্পরের সমানুপাতিক অর্থাৎ পীড়ন যত বাড়বে বিকৃতিও ততই বাড়বে। পীড়নের LQ মান পর্যন্ত তারটি পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তুর ন্যায় আচরণ করবে অর্থাৎ পীড়ন তুলে নিলে তারটি পুনরায় পূর্বাবস্থায় ফিরে আসবে। অতএব এই পীড়নের জন্য প্রযুক্ত বলই তারটির **স্থিতিস্থাপক সীমা**। পীড়ন LQ অপেক্ষা একটু বাড়ালে তারটি আর পূর্ণ স্থিতিস্থাপক থাকবে না।



চিত্র ৯.৬

এখন পীড়ন আরও বাড়াতে থাকলে পীড়ন বৃদ্ধির হার অপেক্ষা বিকৃতি বৃদ্ধির হার বেশি হবে অর্থাৎ বিকৃতি দ্রুত তালে সংঘটিত হবে। এমতাবস্থায় পীড়ন তুলে নিলেও তারটি আর পূর্বাবস্থায় ফিরে আসবে না এবং তারে একটি **স্থায়ী বিকৃতি** দেখা দিবে [চিত্রে OQ বস্তুর স্থায়ী বিকৃতি নির্দেশ করছে]। এই অবস্থা M বিন্দু পর্যন্ত চলতে থাকবে। এই M বিন্দুকে **নতি বিন্দু** (yield point) বলে। এর পর পীড়ন আর না বাড়ালেও তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি চলতে থাকবে এবং এই ঘটনা N বিন্দু পর্যন্ত চলবে। N বিন্দুর পর পীড়ন আরও বাড়াতে থাকলে তারের বিভিন্ন স্থান সরু হতে থাকবে এবং পরিশেষে কোন এক স্থান হতে ছিঁড়ে যাবে। যে বিন্দুতে তারটি ছিঁড়ে যাবে তাকে **সহন সীমা** (breaking point) বলে। লেখচিত্রে P হচ্ছে সেই সহন সীমা। P বিন্দুতে পীড়নের মানকে **অসহ পীড়ন** (breaking stress) বলে।

সুতরাং, অসহ পীড়নের সংজ্ঞা লেখা যায় : **প্রতি একক প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলে ন্যূনতম যে বলের ক্রিয়ায় তারটি ছিঁড়ে যায়, তাকে ঐ তারের অসহ পীড়ন বলে।** অসহ পীড়নকে তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল দিয়ে গুণ

করে অসহ ভার (breaking weight) বা অসহ বল পাওয়া যায়। উল্লেখ্য পীড়ন স্থিতিস্থাপক সীমা অপেক্ষা কম হলেও তা যদি বস্তুর উপর দীর্ঘক্ষণ যাবত ক্রিয়াশীল থাকে তবে সেক্ষেত্রে বস্তুর বিকৃতি স্থায়ী হবে।

৯.৭ হুকের সূত্র
Hooke's law

বিখ্যাত বিজ্ঞানী রবার্ট হুক পীড়ন ও বিকৃতির মধ্যে একটি নিবিড় সম্পর্ক লক্ষ করেন। এই সম্পর্ককে তিনি 1678 খ্রিস্টাব্দে একটি সূত্রের আকারে প্রকাশ করেন। এর নাম হুকের সূত্র। সূত্রটি নিম্নে বিবৃত হল ঃ

"স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর উপর প্রযুক্ত পীড়ন তার বিকৃতির সমানুপাতিক।" গাণিতিকভাবে লেখা যায়, পীড়ন $\propto$ বিকৃতি।

বা, পীড়ন = ধ্রুবক $\times$ বিকৃতি

বা, $\dfrac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$ = **ধ্রুবক** (constant)

এই ধ্রুবককে **স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক** বা **স্থিতিস্থাপক মানাঙ্ক** (Co-efficient of elasticity) বলে। একে **স্থিতিস্থাপক ধ্রুবকও** (Elastic constant) বলা হয়।

৯.৮ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের প্রকারভেদ
Kinds of elastic constants

বিভিন্ন প্রকার পীড়নের জন্য বিভিন্ন প্রকার বিকৃতি পাওয়া যায়। বিভিন্ন প্রকার বিকৃতির জন্য বিভিন্ন প্রকার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক আছে। স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক মূলত তিন প্রকার ; যথা—

(১) **ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক** (Young's modulus of elasticity)
(২) **কাঠিন্যের বা দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক** (Rigidity modulus of elasticity)
(৩) **আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক** (Volume or Bulk modulus of elasticity)

ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে দৈর্ঘ্য পীড়ন ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। এই ধ্রুব রাশিকে ইয়ং-এর গুণাঙ্ক বলে। একে 'Y' দ্বারা সূচিত করা হয়। একে দৈর্ঘ্যের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কও বলা হয়।

$$Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} \tag{5}$$

যদি দৈর্ঘ্য বিকৃতি = 1 হয় তবে, Y = দৈর্ঘ্য পীড়ন।

কাজেই, **স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে একক দৈর্ঘ্য বিকৃতির জন্য প্রয়োজনীয় দৈর্ঘ্য পীড়নকে ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।**

তাৎপর্য ঃ "লোহার ইয়ং-এর গুণাঙ্ক 2×10^{11} Nm^{-2}"—বলতে বুঝায় যে, এক বর্গমিটার প্রস্থচ্ছেদ-এর ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি লোহার তারে একক দৈর্ঘ্য বিকৃতির জন্য দৈর্ঘ্য বরাবর 2×10^{11} নিউটন বল প্রয়োগের প্রয়োজন হবে।

দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আকার পীড়ন ও আকার বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। এই ধ্রুব রাশিকে দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে। একে কাঠিন্যের বা আকারের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

একে 'n' দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$n = \frac{\text{আকার পীড়ন}}{\text{আকার বিকৃতি}} = \frac{\text{মোচড় বা কৃন্তন পীড়ন}}{\text{মোচড় বা কৃন্তন বিকৃতি}} \tag{6}$$

একে আকারের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কও বলে।

যদি আকার বিকৃতি = 1 হয়, তবে

n = আকার পীড়ন।

কাজেই, **স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে একক আকার বিকৃতি উৎপন্ন করতে প্রয়োজনীয় আকার পীড়নকে দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।**

তাৎপর্য ঃ "পিতলের দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাংক $9 \times 10^{10}\,\text{Nm}^{-2}$"— বলতে বুঝায় যে, এক ঘনমিটার আয়তনের পিতলের একটি ঘনকের এক বর্গ মিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এক তল দৃঢ়ভাবে আটকিয়ে আয়তনের কোন পরিবর্তন না ঘটিয়ে একক আকার বিকৃতির জন্য বিপরীত তলের উপর স্পর্শকভাবে 9×10^{10} নিউটন বল প্রয়োগের প্রয়োজন হবে।

আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আয়তন পীড়ন ও আয়তন বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি। এই ধ্রুব রাশিকে আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে। একে 'K' দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$K = \frac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}} \qquad (7)$$

যদি আয়তন বিকৃতি = 1 হয়, তবে

K = আয়তন পীড়ন।

কাজেই, **স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে একক আয়তন বিকৃতি উৎপন্ন করতে প্রয়োজনীয় আয়তন পীড়নকে আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।**

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি কোন একটি বস্তুর আদি আয়তন = V। এর প্রতি একক ক্ষেত্রফলে চতুর্দিক হতে লম্বভাবে p পরিমাণ বল প্রয়োগ করি। যদি বস্তুর আয়তন হ্রাসের পরিমাণ $= v$ হয়, তবে আয়তন বিকৃতি $= v/V$ এবং আয়তন পীড়ন $= p$

$$K = \frac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}} = \frac{p}{v/V} = \frac{pV}{v} \qquad 7(a)$$

চাপ যত বেশি হোক না কেন কঠিন ও তরল বস্তুর ক্ষেত্রে আয়তন বিকৃতি খুব কম হয়। কিন্তু গ্যাসের ক্ষেত্রে কম চাপ প্রয়োগ করলেও যথেষ্ট পরিমাণ আয়তন বিকৃতি ঘটে।

সমীকরণ 7 (a) অনুযায়ী আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের ব্যবকলনীয় সমীকরণ হবে,

$K = -\dfrac{Vdp}{dV}$, p বৃদ্ধিতে V হ্রাস পায় হেতু ঋণ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।

তাৎপর্য ঃ পানির আয়তন গুণাঙ্ক $2 \times 10^9\ \text{Nm}^{-2}$ বলতে বুঝায় যে পানির একক আয়তন বিকৃতি উৎপন্ন করতে এর প্রতি 1m^2 ক্ষেত্রফলের উপর 2×10^9 N বল প্রয়োগ করতে হয়।

সংনম্যতা (Compressibility) ঃ সংনম্যতা হল আয়তন গুণাঙ্কের বিপরীত রাশি। সুতরাং বলা যায়, **স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আয়তন বিকৃতি ও আয়তন পীড়নের অনুপাতই সংনম্যতা।**

$$\text{সংনম্যতা} = \frac{\text{আয়তন বিকৃতি}}{\text{আয়তন পীড়ন}} = \frac{1}{\beta}$$

আয়তন গুণাঙ্ককে অনেক সময় অসংনম্যতা (Incompressibility) নামেও অভিহিত করা হয়।

স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের একক (Units of elastic constant)

স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের সংজ্ঞায় দুটি রাশি আছে। একটি পীড়ন, অপরটি বিকৃতি। বিকৃতির কোন একক নেই। অতএব পীড়নের এককই স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের একক। আমরা জানি,

$$\text{পীড়ন} = \frac{\text{বল}}{\text{ক্ষেত্রফল}}$$

সুতরাং বল ও ক্ষেত্রফলের একক হতে স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের একক পাওয়া যাবে।

BG & JEWEL

এম. কে. এস. ও এস. আই. পদ্ধতিতে স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের একক হল নিউটন/বর্গমিটার সংক্ষেপে Nm^{-2}।

ব্যাখ্যা ঃ যদি বলা হয় ইস্পাতের ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক $Y = 2 \times 10^8\ Nm^{-2}$, তবে উক্ত উক্তি দ্বারা বুঝা যায় $1\ m^2$ **বা এক বর্গমিটার প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারে একক দৈর্ঘ্য বিকৃতির জন্যে তার বরাবর 2×10^8 (নিউটন) বল প্রয়োগের প্রয়োজন হবে।**

স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of elastic constants)

বিকৃতির কোন মাত্রা সমীকরণ নেই। অতএব পীড়নের মাত্রা সমীকরণই স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মাত্রা সমীকরণ।

$$\text{স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মাত্রা সমীকরণ} = \frac{[\text{বল}]}{[\text{ক্ষেত্রফল}]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$$

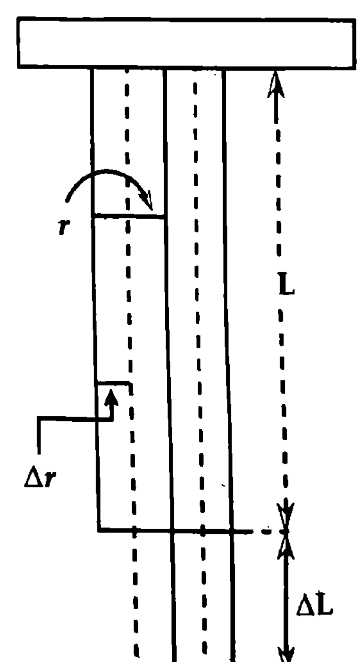
৯.৯ পয়সন-এর অনুপাত
Poisson's ratio

উপরোক্ত তিনটি স্থিতিস্থাপক ধ্রুবক ছাড়া আরও একটি বিশেষ ধরনের স্থিতিস্থাপক ধ্রুবক আছে। একে আবিষ্কার করেন বিজ্ঞানী পয়সন। তাঁর নামানুসারে এই ধ্রুবকের নাম দেওয়া হয়েছে **পয়সন-এর অনুপাত**।

কোন একটি তারের এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনের সাথে আটকিয়ে অন্য প্রান্তে বল প্রয়োগ করে টানলে **দৈর্ঘ্য বিকৃতির** সঙ্গে সঙ্গে **পার্শ্ব বিকৃতি** ঘটে অর্থাৎ তারের ব্যাস বা ব্যাসার্ধ কমে যায়। পয়সন-এর পরীক্ষা এবং প্রাপ্ত ফলাফল অনুসারে **স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর পার্শ্ব বিকৃতি ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব রাশি।**

অর্থাৎ, $\dfrac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$ = **ধ্রুবক**। এই ধ্রুবককে 'σ' দ্বারা সূচিত করা হয়। এর নাম **পয়সন-এর অনুপাত**।

$$\therefore \boxed{\sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}}$$



চিত্র ৯.৭

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি, একটি তারের আদি দৈর্ঘ্য 'L' এবং ব্যাসার্ধ 'r' [চিত্র ৯.৭]। তারটির এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনের সাথে আটকিয়ে নিম্ন প্রান্তে বল প্রয়োগ করে টানলে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে এবং পার্শ্ব হ্রাস পাবে। মনে করি দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পেয়ে L' হল এবং ব্যাসার্ধ হ্রাস পেয়ে r' হল।

অতএব, দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= L' - L = \Delta L$

এবং ব্যাসার্ধ হ্রাস $= r - r' = \Delta r$

সুতরাং, পার্শ্ব বিকৃতি $= \dfrac{\Delta r}{r}$ এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \dfrac{\Delta L}{L}$

$$\text{পয়সন-এর অনুপাত, } \sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

$$= \frac{\Delta r / r}{\Delta L / L} = \frac{L}{r}\frac{\Delta r}{\Delta L}$$

ΔL ধনাত্মক হলে Δr ঋণাত্মক হয়। আবার ΔL ঋণাত্মক হলে Δr ধনাত্মক হয়।

$$\boxed{\sigma = -\frac{L}{r}\frac{\Delta r}{\Delta L}} \qquad (8)$$

পয়সন-এর অনুপাত কেবলমাত্র কঠিন পদার্থেরই বৈশিষ্ট্য।

σ-এর মান ঃ কোন পদার্থের পয়সন-এর অনুপাত -1 হতে $\frac{1}{2}$ এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ $-1 < \sigma < \frac{1}{2}$।

মাত্রা ও একক ঃ পয়সনের অনুপাত দুটি বিকৃতির অনুপাত, তাই এর কোন মাত্রা ও একক নেই।

তাৎপর্য ঃ তামার পয়সনের অনুপাত 0·33 বলতে বুঝায় যে স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে দৈর্ঘ্য বরাবর বল প্রয়োগ করলে পার্শ্ব বিকৃতি ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত 0·33 হয়।

৯·১০ বিকৃতির দরুন কৃত কাজ বা সঞ্চিত বা বিভব শক্তি
Work done in deforming a body or potential energy

বল প্রয়োগ করে যখন কোন বস্তুকে বিকৃত করা হয়, তখন বস্তুর উপর যে কাজ সম্পন্ন করা হয়, তা স্থিতিশক্তিরূপে বস্তুতে সঞ্চিত থাকে। বস্তুর বিভিন্ন বিকৃতি সৃষ্টি করতে যে কাজ সাধিত হয়ে থাকে নিম্নে তা আলোচিত হল।

(ক) দৈর্ঘ্য বিকৃতি ঃ মনে করি L দৈর্ঘ্য এবং A প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি তারে দৈর্ঘ্য বরাবর F বল প্রয়োগ করায় দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হল $=l$; ধরি এই দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি l অসংখ্য ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি dl-এর সমষ্টির সমান।

dl দৈর্ঘ্য বৃদ্ধিতে কাজের পরিমাণ, $dW =$ বল $\times$ সরণ $= F \times dl$

সুতরাং l
$$\int dW = \int_0^l F.dl$$

বা, $$W = \int_0^l F.dl \qquad (9)$$

কিন্তু আমরা জানি, $Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{F/A}{l/L}$

বা, $F = \frac{Y.lA}{L}$

উপরোক্ত সমীকরণে F-এর মান বসিয়ে পাই,

$$W = \int_0^l \frac{YlA}{L} dl = \frac{Y.A}{L} \int_0^l l.dl = \frac{YAl^2}{2L}$$

$$W = \frac{YAl^2}{2L} \qquad (10)$$

এই কাজই তারের মধ্যে স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি হিসেবে সঞ্চিত থাকে।

পুনঃ, আয়তন, $V =$ ক্ষেত্রফল $\times$ দৈর্ঘ্য $= AL$

দৈর্ঘ্য-পীড়ন $= \frac{F}{A} = \frac{YlA}{LA} = \frac{Yl}{L}$

এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{l}{L}$

একক আয়তনে কৃত কাজ

= একক আয়তনে সঞ্চিত শক্তি

$$= \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\frac{YAl^2}{L \times LA} \qquad [\because V = LA]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{Y.l.l}{L.L} = \frac{1}{2}\left(\frac{Yl}{L}\right) \times \left(\frac{l}{L}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{F}{A}\right) \times \left(\frac{l}{L}\right) \qquad (11)$$

একক আয়তনে কৃত কাজ বা বিভব শক্তি $= \frac{1}{2} \times$ দৈর্ঘ্য-পীড়ন $\times$ দৈর্ঘ্য বিকৃতি

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, (খ) **কৃন্তন বিকৃতির** ক্ষেত্রে একক আয়তনে কৃত কাজ

$= \frac{1}{2} \times$ **কৃন্তন পীড়ন** $\times$ **কৃন্তন বিকৃতি**, এবং

(গ) **আয়তন বিকৃতির** ক্ষেত্রে একক আয়তনে কৃত কাজ

$= \frac{1}{2} \times$ আয়তন পীড়ন $\times$ আয়তন বিকৃতি।

সাধারণভাবে বলা যায়, **যে কোন বিকৃতির ক্ষেত্রে প্রতি একক আয়তনে কৃত কাজ**

$= \frac{1}{2}$ (পীড়ন $\times$ বিকৃতি)

৯.১১ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়
Determination of elastic constants

ভূমিকা ঃ আমরা জানি সর্বমোট **চারটি** স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক রয়েছে, যথা Y, K, n এবং σ। এখানে আমরা শুধুমাত্র ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়ের বিষয়টি আলোচনা করব। ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়ের অনেক পদ্ধতি রয়েছে। এই অধ্যায়ে ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়ের জন্যে দুটি পদ্ধতি আলোচনা করা হবে। পদ্ধতি দুটি হল ঃ

(১) **ভার্নিয়ার পদ্ধতি** এবং

(২) **সার্লির পদ্ধতি**

(১) ভার্নিয়ার পদ্ধতিতে ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় (Determination of Young's modulus by Vernier method)

তত্ত্ব ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে দৈর্ঘ্য পীড়ন এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাত একটি ধ্রুব সংখ্যা। এর নাম ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক। একে Y দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{F/A}{l/L} = \frac{F \times L}{Al}$$

$$= \frac{mgL}{\pi r^2 l}$$

m, g, L, r এবং l এস. আই. এককে পরিমাপ করা হলে,

$$Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l} \text{ নিউটন/বর্গমিটার } (Nm^{-2})। \quad (12)$$

এখানে m = প্রযুক্ত ভর, g =অভিকর্ষীয় ত্বরণ, L = পরীক্ষাধীন তারের আদি দৈর্ঘ্য, l = দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি এবং r = তারের ব্যাসার্ধ।

এখন, m, g, L, l এবং r-এর মান জেনে Y-এর মান বের করা হয়।

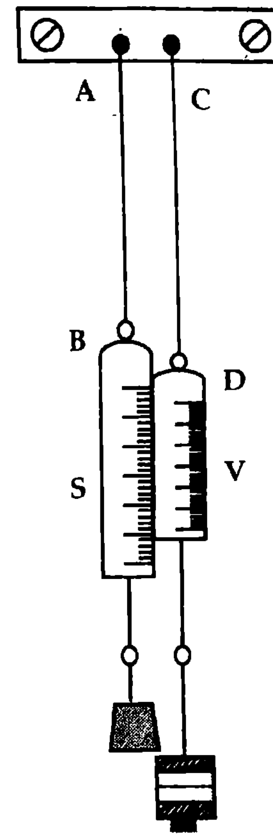
ভার্নিয়ার পদ্ধতি (যন্ত্রের বর্ণনা) ঃ এই পদ্ধতিতে পরীক্ষাধীন পদার্থের সমদৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুটি তার নিই। মনে করি এর AB ও CD তার দুটিকে একই দৃঢ় অবলম্বন E হতে ঝুলাই [চিত্র ৯.৮]। এদের মধ্যে CD হল পরীক্ষাধীন তার, AB হল সাহায্যকারী তার। সাহায্যকারী তারের সাথে মিলিমিটারে দাগাঙ্কিত একটি সরল স্কেল S যুক্ত আছে। তার যাতে খাঁজ ও মোচড়হীন অবস্থায় সম্পূর্ণ সোজা থাকে তার জন্য এর নিম্ন প্রান্তে একটি নির্দিষ্ট ভরের বস্তু ঝুলানো হল।

পরীক্ষাধীন তারের নিম্ন প্রান্তে একটি হুক এবং এই হুকের সাথে একটি ধারক (hanger) থাকে। এই ধারকে পীড়ন সৃষ্টিকারী প্রয়োজনীয় ভর স্থাপন করা হয়। এই তারের সাথে একটি ভার্নিয়ার স্কেল V লাগানো থাকে, এই স্কেলটি সাধারণ স্কেল S-এর পাশ দিয়ে উঠা-নামা করে।

কার্যপদ্ধতি ঃ r

নির্ণয় ঃ প্রথম স্ক্রু গজের সাহায্যে পরীক্ষাধীন তারের ব্যাস বিভিন্ন জায়গায় সতর্কভাবে বের করি এবং গড় ব্যাস নির্ণয় করি। একে 2 দ্বারা ভাগ করে তারের ব্যাসার্ধ r গ্রহণ করি এবং তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

এখন পরীক্ষাধীন তারের অসহ ভার (Breaking weight) বের করতে হয়। ভৌত বিষয়াদি সংক্রান্ত বিবিধ ধ্রুবকের মান যে পুস্তকে পাওয়া যায় (Physical constant table) তা হতে তারের অসহ পীড়ন দেখে নিয়ে তাকে তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল দিয়ে গুণ করে অসহ ভার নির্ণয় করা হয়। পীড়ন মাত্রা এর অর্ধেকের বেশি না হলে তারটি স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে থাকবে। এজন্য পরীক্ষাধীন তারে অসহ ভারের অর্ধেকের বেশি ভার কখনও অর্পণ করা হয় না। পীড়নকারী সর্বোচ্চ ভরের মান এভাবেই নির্ণীত হয়।



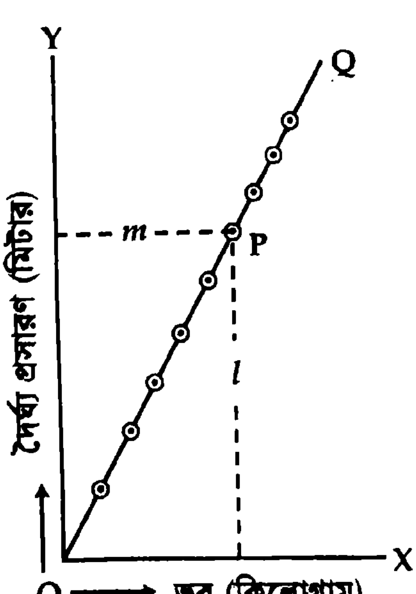
চিত্র ৯·৮

পরীক্ষাধীন তারের ধারকের উপর পূর্বের বর্ণিত সর্বোচ্চ ভর চাপিয়ে কিছুক্ষণ পর ভরের কিছুটা রেখে বাকি ভর অপসারণ করা হয়, যাতে তার সোজা থাকে এবং এতে কোন খাঁজ থাকে না। এই ভরকে **প্রারম্ভিক ভর** (Dead load) বলে। এই ভারের জন্য ভার্নিয়ারের শূন্য বরাবর প্রধান স্কেল ও ভার্নিয়ারের পাঠ গ্রহণ করা হয়।

L নির্ণয় ঃ এর পর একটি স্কেলের সাহায্যে পরীক্ষাধীন তারটিকে যে বিন্দু হতে ঝুলানো হয়েছে, সেই বিন্দু হতে ভার্নিয়ারের শূন্য দাগ পর্যন্ত দৈর্ঘ্য মেপে তার আদি দৈর্ঘ্য L বের করি।

***l* নির্ণয় ঃ** এখন পরীক্ষাধীন তারে অর্ধ কিলোগ্রাম পরিমাণের ভার পর পর চাপাই এবং প্রতিবার প্রধান স্কেল এবং ভার্নিয়ার স্কেলের মান নিয়ে তারের প্রসারণ বের করি। এখানে লক্ষ রাখতে হবে যে, মোট ভার যেন অসহ ভার-এর অর্ধেকের বেশি না হয়।

$\frac{l}{m}$ নির্ণয় ঃ অতঃপর প্রতি ধাপে এক একটি করে অর্ধ কিলোগ্রাম ভার নামিয়ে পূর্বের ন্যায় প্রধান স্কেল ও ভার্নিয়ার স্কেলের পাঠ হতে তারের সঙ্কোচন বের করি। অতএব প্রতিটি ভারের জন্য l-এর দুটি করে পাঠ নেয়া যাবে—একটি ভার বৃদ্ধির জন্য, অপরটি ভার হ্রাসের জন্য। এদের গড় মান বের করে বিভিন্ন ভারের আনুষঙ্গিক দৈর্ঘ্য প্রসারণ পাওয়া যায়।



চিত্র ৯·৯

এখন ভরকে X-অক্ষে এবং আনুষঙ্গিক দৈর্ঘ্য প্রসারণকে Y-অক্ষে স্থাপন করে একটি লেখ (Graph) অঙ্কন করি [চিত্র ৯·৯]। লেখটি একটি সরলরেখা হবে এবং অক্ষ দুটির মূল বিন্দু দিয়ে যাবে। এটা হতে প্রমাণিত হয় যে, পীড়ন ও বিকৃতি পরস্পরের সমানুপাতিক। **এটা হুকের সূত্রের পরীক্ষামূলক প্রমাণ দেয়।** লেখ হতে সুবিধাজনক ভার m-এর জন্য আনুষঙ্গিক দৈর্ঘ্য পরিবর্তন l-এর মান বের করি।

হিসাব ও গণনা ঃ ধরি পরীক্ষালব্ধ ফলাফল অনুসারে তারের আদি দৈর্ঘ্য L মিটার, ব্যাসার্ধ r মিটার ও m কিলোগ্রাম ভরের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি l মিটার। তাহলে,

ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, $Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l}$ নিউটন/বর্গমিটার।

সতর্কতা : (১) পরীক্ষণীয় তারটিকে স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে রেখে বিকৃতি নিরূপণ করা উচিত।

(২) ব্যাস নিরূপণ সর্বাপেক্ষা বেশি ত্রুটিমুক্ত হওয়া উচিত ও প্রত্যেক বারে পরস্পর লম্বিক পাঠ নেওয়া উচিত।

(৩) তার দুটিকে দৃঢ় অবলম্বন হতে ঝুলানো উচিত ও তার দুটি একই পদার্থের হওয়া উচিত।

৯.১২ ইস্পাত রবার অপেক্ষা অধিক স্থিতিস্থাপক
Steel is more elastic than rubber

আমরা জানি, **স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক** $= \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}}$।

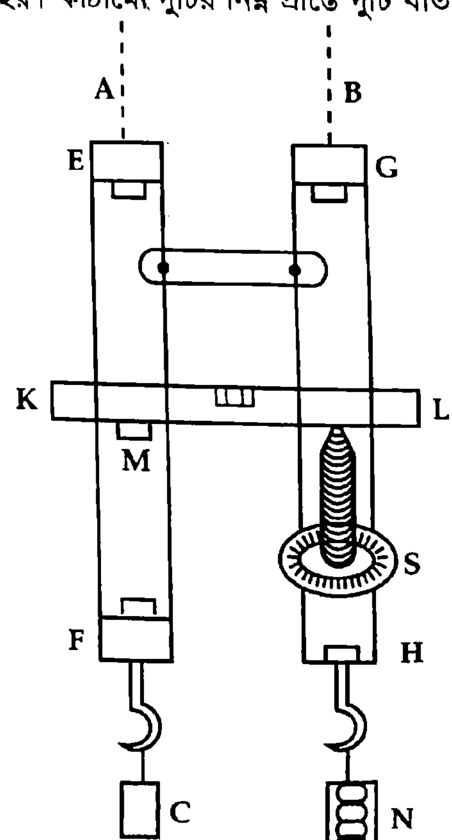
উপরের সমীকরণ হতে বলা যায়—**যে সব বস্তুর ক্ষেত্রের পীড়ন এবং বিকৃতির অনুপাত বেশি অর্থাৎ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মান বেশি সে সব বস্তু বেশি স্থিতিস্থাপক। আর যেসব বস্তুর ক্ষেত্রে পীড়ন এবং বিকৃতির অনুপাত কম, অর্থাৎ স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের মান কম সেসব বস্তু কম স্থিতিস্থাপক।**

ইস্পাতের ক্ষেত্রে অধিক পীড়ন দেয়া সত্ত্বেও বিকৃতির মান যৎসামান্য হয়। সুতরাং পীড়ন এবং বিকৃতির অনুপাত অনেক বেশি। কিন্তু রবারের ক্ষেত্রে অল্প পীড়ন দিলেই বিকৃতির মান অনেক বেশি হয়। সুতরাং রবারের ক্ষেত্রে পীড়ন এবং বিকৃতির অনুপাত অনেক কম। অতএব, সিদ্ধান্ত এই যে, ইস্পাত রবার অপেক্ষা অধিক স্থিতিস্থাপক।

৯.১৩ সার্লির পদ্ধতিতে ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয়
Determination of Young's modulus by Searle's method

বিজ্ঞানী সি. জি. এস. সার্লি এই পদ্ধতি উদ্ভাবন করেন বলে এই পদ্ধতিকে সার্লির পদ্ধতি বলা হয়।

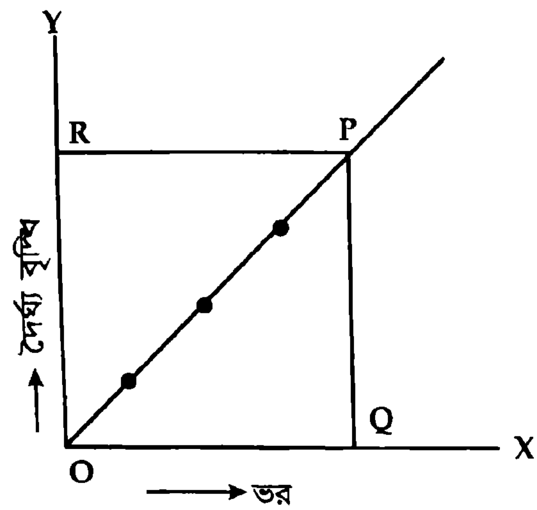
যন্ত্রের বর্ণনা : এই যন্ত্রে A এবং B পরীক্ষাধীন পদার্থের সমদৈর্ঘ্য এবং সমব্যাসের দুটি তার থাকে [চিত্র ৯.১০]। A সাহায্যকারী তার এবং B পরীক্ষাধীন তার। এগুলোকে একই দৃঢ় অবলম্বন হতে পাশাপাশি ঝুলিয়ে তাদের নিম্ন প্রান্তে যথাক্রমে EF এবং GH দুটি ধাতব কাঠামো যুক্ত করা হয়। কাঠামো দুটির নিম্ন প্রান্তে দুটি ধাতব হুকের সাথে দুটি ওজন ধারক সংযুক্ত থাকে। A-কে সোজা ও খাঁজমুক্ত করার জন্য এর ওজন ধারকের উপর প্রয়োজনীয় ওজন স্থাপন করা হয়। B-এর ওজন ধারকের উপর প্রয়োজনীয় ওজন স্থাপন করে এটাকেও প্রসারিত করা হয়। GH কাঠামোতে একটি মাইক্রোমিটার স্ক্রু S যুক্ত থাকে। KL একটি স্পিরিট লেভেল। এর এক প্রান্ত মাইক্রোমিটার স্ক্রুর উপরে এবং অপর প্রান্ত EF কাঠামোর সাথে দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত একটি ধাতব দণ্ড M-এর উপরে স্থাপিত থাকে। মাইক্রোমিটার স্ক্রু এবং স্পিরিট লেভেলের সাহায্যে পরীক্ষাধীন তারের দৈর্ঘ্যের হ্রাস-বৃদ্ধি পরিমাপ করা হয়।



চিত্র ৯.১০

কার্যপদ্ধতি : মিটার স্কেল ও স্ক্রু-গজের সাহায্যে পরীক্ষাধীন তারের আদি দৈর্ঘ্য এবং ব্যাস নির্ণয় করি। ব্যাসকে দুই দ্বারা ভাগ করে ব্যাসার্ধ বের করি। অতঃপর প্রস্থচ্ছেদ ও তারের উপাদানের অসহ পীড়নের মান হতে অসহ ওজন বের করি। পরীক্ষাকালে তারে সর্বোচ্চ অসহ ওজনের অর্ধেক ওজন ব্যবহার করা হয়। পরীক্ষাধীন ও সাহায্যকারী তারের নিম্ন প্রান্তের ওজন ধারকের উপর কিছু ভর চাপিয়ে তারদ্বয়কে টান টান রাখি। অতঃপর মাইক্রোমিটার স্ক্রু ঘুরিয়ে স্পিরিট লেভেলের বায়ু বুদ্বুদ মধ্যস্থলে আনি ও স্কেলের পাঠ নিই। অতঃপর অর্ধ কিলোগ্রাম ভর চাপালে স্পিরিট লেভেলের বায়ু

বুদ্‌বুদ্ এক প্রান্তে সরে যায়। মাইক্রোমিটার স্ক্রু ঘুরিয়ে লেভেলটিকে পূর্বাবস্থায় ফিরিয়ে আনি এবং প্রথম ও দ্বিতীয় পাঠের পার্থক্য হতে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নির্ণয় করি। এভাবে পরপর কয়েক বার অর্ধ কিলোগ্রাম ভর প্রয়োগ করে মাইক্রোমিটার স্ক্রুর সাহায্যে প্রত্যেক ওজনের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির পরিমাপ করি। অতঃপর এক একটি করে ভর নামিয়ে প্রত্যেক বার পাঠ নিই। এভাবে ভর বৃদ্ধি ও ভর হ্রাসের জন্য দুটি করে পাঠ পাওয়া যাবে। পাঠদ্বয়ের গড় নির্ণয় করি। অতঃপর X-অক্ষ বরাবর বিভিন্ন ভর এবং Y-অক্ষ বরাবর আনুষঙ্গিক দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির মান বসিয়ে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করলে এটা মূল বিন্দুগামী একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ৯·১১]। সরলরেখার উপর সুবিধামত P একটি বিন্দু নিই। P বিন্দু হতে X-অক্ষের উপর PQ একটি লম্ব টানি। তা হলে OQ ভরের মান m এবং PQ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির মান l নির্দেশ করবে।



চিত্র ৯·১১

হিসাব ও গণনা ঃ

মনে করি পরীক্ষাধীন তারের

আদি দৈর্ঘ্য = L মি.

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি = l „

ব্যাসার্ধ = r „

অভিকর্ষজ ত্বরণ = g মি./সে.^{2}

ভর = m কিলোগ্রাম

$$Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l} \text{ নিউটন/বর্গমিটার } (Nm^{-2})$$

সতর্কতা ঃ

১। তার দুটি একই পদার্থের ও সমান দৈর্ঘ্যের হওয়া উচিত। সুষম ব্যাসের তার নেয়া উচিত।

২। তার দুটিতে কোন ভাঁজ যাতে না থাকে তাই কিছু ওজন চাপিয়ে তার দুটিকে টান টান রাখতে হয়।

৩। Y-এর মান নির্ণয়ে ব্যাসার্ধ r-এর বর্গ ব্যবহৃত হয়, তাই r এর ত্রুটি পরিহার করার জন্য একই অবস্থানে সোজা ও আড়াআড়িভাবে পাঠ নিতে হয়।

৪। পরীক্ষণীয় তারে ওজন অসহ ওজনের অর্ধেকের কম নিতে হয়।

৫। পাঠ নেয়ার সময় স্ক্রুগজ সব সময় একই দিকে ঘুরাতে হয়। এতে স্ক্রুগজের পিছট ত্রুটি দূর হয়।

৯·১৪ স্থিতিস্থাপকতা কোন্ কোন্ শর্তের উপর নির্ভর করে
Factors affecting elasticity

পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা বিভিন্ন শর্তের উপর নির্ভর করে, যার একটি সংক্ষিপ্ত বিবরণ নিম্নে বর্ণনা করা হল ঃ

১। **আঘাত (Hammering) ঃ** কোন একটি পদার্থকে আঘাতের ফলে ভাঙাতে চাইলে তার স্থিতিস্থাপকতা বৃদ্ধি পায়।

২। **খাদ (Impurity) ঃ** কোন পদার্থে খাদের উপস্থিতি এর স্থিতিস্থাপকতাকে বিশেষভাবে প্রভাবিত করে। কখনও কখনও খাদের উপস্থিতি পদার্থের বিভিন্ন কণার মধ্যকার আকর্ষণ ধর্ম বৃদ্ধি করে। ফলে খাদের উপস্থিতি পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা বৃদ্ধি করে।

৩। **তাপমাত্রা (Temperature) ঃ** স্থিতিস্থাপকতার উপর তাপমাত্রার প্রভাব সমধিক উল্লেখযোগ্য। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে কঠিন পদার্থের স্থিতিস্থাপকতা হ্রাস পায় অর্থাৎ তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে পদার্থ স্থিতিস্থাপকতা হতে ক্রমাগত অস্থিতিস্থাপক হতে থাকে। কিন্তু ইস্পাত, ইনভার এবং কোয়ার্টজ-এর ক্ষেত্রে ব্যতিক্রম পরিলক্ষিত হয়।

পুনঃ, তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে তরল পদার্থের আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক হ্রাস পায়। তবে পানির ক্ষেত্রে এর ব্যতিক্রম পরিলক্ষিত হয়। 50°C তাপমাত্রায় পানির আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক সর্বাধিক।

BG & JEWEL

স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক তালিকা

বস্তু	ইয়ং গুণাঙ্ক Y (Nm^{-2})	দৃঢ়তা গুণাঙ্ক n (Nm^{-2})	আয়তন গুণাঙ্ক K (Nm^{-2})	পয়সনের অনুপাত σ
অ্যালুমিনিয়াম	7×10^{10}	$2{\cdot}5 \times 10^{10}$	$7{\cdot}5 \times 10^{10}$	0·34
তামা	$12{\cdot}3 \times 10^{10}$	$4{\cdot}2 \times 10^{10}$	$13{\cdot}1 \times 10^{10}$	0·33
লোহা (তার)	20×10^{10}	$5{\cdot}1 \times 10^{10}$	$9{\cdot}6 \times 10^{10}$	0·26
ইস্পাত	22×10^{10}	$8{\cdot}9 \times 10^{10}$	16×10^{10}	0·28
রূপা	$7{\cdot}8 \times 10^{10}$	$2{\cdot}8 \times 10^{10}$	$10{\cdot}9 \times 10^{10}$	0·37
পানি	—	—	$0{\cdot}2 \times 10^{10}$	—
পারদ	—	—	$2{\cdot}6 \times 10^{10}$	—
বাতাস (সাধারণ চাপে)	—	—	$1{\cdot}015 \times 10^{5}$	—

স্মরণিকা

স্থিতিস্থাপকতা ঃ যে ধর্মের ফলে বাইরে থেকে প্রযুক্ত বল অপসারিত হলে বিকৃত বস্তু তার পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে, তাকে স্থিতিস্থাপকতা বলে।

বিকৃতি ঃ বল প্রয়োগে কোন একটি বস্তুর প্রতি একক মাত্রায় যে পরিবর্তন সাধিত হয় তাকে বিকৃতি বলে।

পীড়ন ঃ কোন একটি বস্তুর একক ক্ষেত্রফলের উপর লম্বভাবে ক্রিয়ারত (ক্রিয়ামূলক বা প্রতিক্রিয়ামূলক) বিকৃতি সৃষ্টিকারী বলের মানকে পীড়ন বলে।

স্থিতিস্থাপক সীমা ঃ বাহ্যিক বলের যে নির্দিষ্ট সীমা পর্যন্ত বস্তু স্থিতিস্থাপক বস্তুর ন্যায় আচরণ করে এবং ঐ প্রযুক্ত বল অপসারণ করলে বস্তু পূর্বাবস্থায় ফিরে যায়, তাকে স্থিতিস্থাপক সীমা বলে।

হুকের সূত্র ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে বস্তুর উপর প্রযুক্ত পীড়ন তার বিকৃতির সমানুপাতিক।

অসহ পীড়ন ঃ প্রতি একক প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলে ন্যূনতম যে বলের ক্রিয়ায় তারটি ছিড়ে যায়, তাকে ঐ তারের অসহ পীড়ন বলে।

অসহ ভার বা অসহ ওজন ঃ ন্যূনতম যে নির্দিষ্ট ভারের ক্রিয়ায় কোন বস্তু ভেঙ্গে বা ছিঁড়ে যায় তাকে অসহ ভার বা অসহ ওজন বলে।

কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি ঃ যদি প্রযুক্ত বাহ্যিক বলের ক্রিয়ায় বস্তুর আয়তন অপরিবর্তিত থেকে কেবলমাত্র এর আকৃতির পরিবর্তন হয় বা বস্তুটি মোচড় খায় তবে ঐ ধরনের বিকৃতিকে কৃন্তন বা মোচড় বিকৃতি বলে।

সংনম্যতা ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আয়তন বিকৃতি ও আয়তন পীড়নের অনুপাতকে সংনম্যতা বলে। সংনম্যতা হল আয়তন গুণাঙ্কের বিপরীত রাশি।

ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে দৈর্ঘ্য পীড়ন ও দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাতকে ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আকার বা কৃন্তন পীড়ন এবং আকার বিকৃতির অনুপাতকে দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ঃ স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে আয়তন পীড়ন এবং আয়তন বিকৃতির অনুপাতকে আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক বলে।

পয়সন-এর অনুপাত ঃ পীড়ন দৈর্ঘ্য বরাবর হলে, পার্শ্ব বিকৃতি এবং দৈর্ঘ্য বিকৃতির অনুপাতকে পয়সন-এর অনুপাত বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

$$\text{স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক} = \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}} \qquad (1)$$

$$\text{পীড়ন} = \frac{F}{A} \qquad (2)$$

$$\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি} = \frac{l}{L} \qquad (3)$$

$$\text{কৃন্তন বিকৃতি},\ \theta = \frac{d}{D} \qquad (4)$$

$$\text{আয়তন বিকৃতি} = \frac{v}{V} \qquad (5)$$

$$\text{হুকের সূত্র} = \frac{\text{পীড়ন}}{\text{বিকৃতি}} = \text{ধ্রুবক} \qquad (6)$$

$$\text{ইয়ং এর গুণাঙ্ক},\ Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

$$= \frac{F/A}{l/L} = \frac{F\times L}{Al} = \frac{MgL}{\pi r^2 l} \qquad (7)$$

$$\text{কৃন্তন গুণাঙ্ক},\ \eta = \frac{\text{কৃন্তন পীড়ন}}{\text{কৃন্তন বিকৃতি}} = \frac{F}{A}\times\frac{y}{x} \qquad (8)$$

$$\text{আয়তন গুণাঙ্ক},\ K = \frac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}} = \frac{F}{A}\times\frac{V}{v} \qquad (9)$$

$$\text{পয়সন এর অনুপাত},\ \sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{r\times L}{R\times l} \qquad (10)$$

$$\text{সংনম্যতা} = \frac{1}{K} \qquad (11)$$

$$\text{মোট কৃত কাজ},\ W = \frac{1}{2}\times F\times l \qquad (12)$$

$$\text{একক আয়তনে স্থিতিশক্তি বা কাজ},\ E = \frac{W}{V} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(ক) দৈর্ঘ্য বিকৃতির ক্ষেত্রে} = \frac{1}{2}\times\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}\times\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}\\
\text{(খ) কৃন্তন বিকৃতির ক্ষেত্রে} = \frac{1}{2}\times\text{কৃন্তন পীড়ন}\times\text{কৃন্তন বিকৃতি}\\
\text{(গ) আয়তন বিকৃতির ক্ষেত্রে} = \frac{1}{2}\times\text{আয়তন পীড়ন}\times\text{আয়তন বিকৃতি।}
\end{array}\right\}$$

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। একটি বস্তুর দৈর্ঘ্য বিকৃতি 2×10^{-4} এবং দৈর্ঘ্য পীড়ন $20\times10^{6}\ Nm^{-2}$। বস্তুটির ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে করি ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক = Y

$$\text{আমরা পাই},\ Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{20\times10^{6}\,Nm^{-2}}{2\times10^{-4}}$$

$$= 10\times10^{10}\,Nm^{-2} = 1\times10^{11}\,Nm^{-2}$$

$$= 10\times10^{10}\,Pa = 1\times10^{11}\,Pa$$

২। 4m দীর্ঘ একটি তামার তারের এক প্রান্তে 20kg ভর চাপানো হলে তারটির দৈর্ঘ্য 6mm বৃদ্ধি পায়। তারের ব্যাসার্ধ 0·58 mm হলে তারের ইয়ং এর গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

$$Y = \frac{mg L}{\pi r^2 l}$$

$$Y = \frac{20 \times 9{\cdot}8 \times 4}{3{\cdot}14 \times (5{\cdot}8 \times 10^{-4})^2 \times 6 \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{20 \times 9{\cdot}8 \times 4 \times 10^{11}}{3{\cdot}14 \times 5{\cdot}8 \times 5{\cdot}8 \times 6}$$

$$= 1{\cdot}24 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$$

এখানে,

আদি দৈর্ঘ্য, $L = 4\ \text{m}$

ভর, $m = 20\ \text{kg}$

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 6\text{mm} = 6 \times 10^{-3}\ \text{m}$

ব্যাসার্ধ, $r = 0{\cdot}58\ \text{mm} = 5{\cdot}8 \times 10^{-4}\ \text{m}$

$Y = ?$

২.১

৩। $2 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$ প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারে কত বল প্রয়োগ করলে এর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হবে ? [$Y = 2 \times 10^{11}$ Pa] [চ. বো. ২০০৪]

মনে করি, প্রযুক্ত বল = F

আমরা জানি,

$$Y = \frac{F}{A} \times \frac{L}{l}$$

বা, $F = YAl/L$

$$= 2 \times 10^{11}\text{Pa} \times 2 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \times \frac{L}{L}$$

$$= 4 \times 10^7\ \text{N} \quad [\because 1\ \text{Pa} = 1\ \text{Nm}^{-2}]$$

এখানে,

$Y = 2 \times 10^{11}$ Pa

$A = 2 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$

আদি দৈর্ঘ্য L হলে,

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 2L - L = L$

৪। 2 m দৈর্ঘ্যের ও 6×10^{-4} m ব্যাসের একটি ইস্পাতের তারের এক প্রান্ত ছাদে বেঁধে অপর প্রান্তে 10 kg ভর ঝুলালে তারটির দৈর্ঘ্য কতটুকু বৃদ্ধি পাবে ? [$Y = 2{\cdot}2 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$] [রা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$$Y = \frac{F}{A} \times \frac{L}{l}$$

বা, $l = \frac{FL}{YA} = \frac{FL}{Y\pi r^2}$

$$l = \frac{10 \times 9{\cdot}8 \times 2}{2{\cdot}2 \times 10^{11} \times 3{\cdot}14 \times (3 \times 10^{-4})^2}$$

$$= \frac{20 \times 9{\cdot}8 \times 10^{-3}}{2{\cdot}2 \times 3{\cdot}14 \times 9}$$

$$= 3{\cdot}15 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

এখানে,

তারের দৈর্ঘ্য, $L = 2$ m

তারের ব্যাস, $d = 6 \times 10^{-4}$ m

তারের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = 3 \times 10^{-4}$ m

তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = 2{\cdot}2 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$

ঝুলানো ভর $m = 10$ kg

$g = 9{\cdot}8$

$F = mg = 10 \times 9{\cdot}8$

$l = ?$

২.১

৫। একটি তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক $2 \times 10^{11}\ \text{N/m}^2$। তারটির দৈর্ঘ্য 15% বৃদ্ধি করতে প্রযুক্ত পীড়ন নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

$$Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{F/A}{l/L}$$

দৈর্ঘ্য পীড়ন, $\frac{F}{A} = Y \times$ দৈর্ঘ্য বিকৃতি

$= Y \times l/L$

$$F/A = 2 \times 10^{11} \times \frac{15}{100}$$

$$= 3 \times 10^{10}\ \text{Nm}^{-2}$$

এখানে,

$Y = 2 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$

$\frac{l}{L} = 15\% = \frac{15}{100}$

পীড়ন $= F/A = ?$

৬। 2 m দীর্ঘ এবং 0·02 mm² প্রস্থচ্ছেদের একটি তারের এক প্রান্তে 10 kg ওজন দিলে তারটির দৈর্ঘ্য আদি দৈর্ঘ্যের 0·005% বৃদ্ধি পায়। তারটির বিকৃতি কত ? [চ. বো. ২০০২]

তারটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 0{\cdot}005\,\%\,L = \frac{0{\cdot}005}{100} \times L = 5 \times 10^{-5}\,L$

দৈর্ঘ্য বিকৃতি, $\frac{l}{L} = \frac{5 \times 10^{-5}\,L}{L} = 5 \times 10^{-5}$

৭। 10 m লম্বা এবং 1 mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি তারকে 100 N বল দ্বারা টানা হল। তারটির দৈর্ঘ্য কতটুকু বৃদ্ধি পাবে বের কর। [$Y = 2 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$] [সি. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

$$Y = \frac{F/A}{l/L} = \frac{FL}{Al}$$

বা, $$l = \frac{FL}{AY} = \frac{FL}{\pi r^2 Y}$$

$$l = \frac{100 \times 10}{3{\cdot}14 \times (0{\cdot}5 \times 10^{-3})^2 \times 2 \times 10^{11}}$$

$$= 6{\cdot}4 \times 10^{-3}\,m$$

এখানে,

তারের দৈর্ঘ্য, $L = 10\,m$

তারের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\,mm = 0{\cdot}5 \times 10^{-3}\,m$

প্রযুক্ত বল, $F = 100\,N$

তারটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = ?$

$Y = 2 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$

৮। 1 mm² প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি ইস্পাত তারের দৈর্ঘ্য 5% বৃদ্ধি করলে কত বল প্রয়োগ করতে হবে? [ইস্পাতের $Y = 2 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$] [রা. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০০]

আমরা জানি,

$$Y = \frac{F}{A} \times \frac{L}{l}$$

বা, $$F = \frac{YAl}{L}$$

$$= \frac{2 \times 10^{11} \times 1 \times 10^{-6} \times 0{\cdot}05\,L}{L}$$

$$= 1 \times 10^{4}\,N$$

ধরি,

আদি দৈর্ঘ্য = L

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = \frac{5\,L}{100} = 0{\cdot}05L$

ক্ষেত্রফল, $A = 1\,mm^2$
$= 1 \times 10^{-6}\,m^2$

$Y = 2 \times 10^{11}\,N\,m^{-2}$

বল, $F = ?$

৯। 2m লম্বা ও 1 mm ব্যাস বিশিষ্ট একটি তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি 0·05 cm হলে তারটির ব্যাস কতটুকু হ্রাস পাবে? (পয়সনের অনুপাত, $\sigma = 0{\cdot}25$)।

আমরা জানি,

$$\sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$$

$$= \frac{d/D}{\frac{l}{L}} = \frac{dL}{Dl}$$

$$d = \frac{\sigma D l}{L}$$

$$= \frac{0{\cdot}25 \times 1 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-4}}{2}$$

$$= 6{\cdot}25 \times 10^{-8}\,m$$

এখানে,

তারের দৈর্ঘ্য, $L = 2\,m$

ব্যাস, $D = 1mm = 1 \times 10^{-3}\,m$

দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি, $l = 0{\cdot}05\,cm = 5 \times 10^{-4}\,m$

পয়সনের অনুপাত, $\sigma = 0{\cdot}25$

তারের ব্যাস হ্রাস, $d = ?$

১০। একটি তারের দৈর্ঘ্য 3m ; প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 2mm² এবং অসহ পীড়ন $2{\cdot}45 \times 10^{8}\,Nm^{-2}$। তারটির অসহ ওজন ও অসহ ভর নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

অসহ ওজন = অসহ পীড়ন × প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

$$= 2{\cdot}45 \times 10^{8} \times 2 \times 10^{-6}$$
$$= 4{\cdot}90 \times 10^{2}\,N$$

$$\therefore \text{অসহ ভর} = \frac{\text{অসহ ওজন}}{\text{অভিকর্ষীয় ত্বরণ}}$$

$$= \frac{4{\cdot}90 \times 10^{2}}{9{\cdot}8} = 50\,kg$$

এখানে,

দৈর্ঘ্য, $L = 3\,m$

প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল, $A = 2mm^2$
$= 2 \times 10^{-6}\,m^2$

অসহ পীড়ন = $2{\cdot}45 \times 10^{8}\,Nm^{-2}$

অসহ ওজন = ?

অসহ ভর = ?

১১। 0·1 m বাহুবিশিষ্ট অ্যালুমিনিয়ামের তৈরি একটি ঘনকের কোন তলে $89·67 \times 10^5$ N আকার পীড়ন সৃষ্টিকারী স্পর্শক বল প্রয়োগ করলে বিপরীত স্থির তলের সাপেক্ষে তলটির $3·05 \times 10^{-3}$ m সরণ ঘটে। আকার পীড়ন, আকার বিকৃতি ও দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, আকার পীড়ন $= \frac{F}{A} = \frac{89·67 \times 10^5 \text{ N}}{0·1 \text{ m} \times 0·1 \text{ m}} = 89·67 \times 10^7 \text{ Nm}^{-2}$

আকার বিকৃতি $= \frac{x}{y} = \frac{3·05 \times 10^{-3} \text{ m}}{0·1 \text{ m}} = 3·05 \times 10^{-2}$

এবং দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, $\eta = \frac{\text{আকার পীড়ন}}{\text{আকার বিকৃতি}}$

$$= \frac{89·67 \times 10^7 \text{ Nm}^{-2}}{3·05 \times 10^{-2}} = 2·94 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$$

১২। স্থির তাপমাত্রায় 20 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের পরিবর্তনে একটি বস্তুর আয়তনের পরিবর্তন 0·01% হল। এর আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ = $1·013 \times 10^5$ Nm^{-2}]।

ধরি নির্ণেয় গুণাঙ্ক $= K$

আমরা পাই, $K = \frac{F}{A} \times \frac{V}{v}$ (1)

সমীকরণ (1)-এ মানগুলো বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$K = \frac{20 \times 1·013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}}{\frac{1}{10000}}$$

$= 2·026 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$

এখানে, $F/A = 20$ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ

$= 20 \times 1·013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$

$\frac{v}{V} = 0·01\% = \frac{1}{10000}$

১৩। কত চাপে 500 ঘন সেন্টিমিটার পারদের 1 ঘন সেন্টিমিটার সংকোচন হবে ? (পারদের আয়তন গুণাঙ্ক = $2·6 \times 10^{10}$ Nm^{-2})

আমরা জানি,

$K = \frac{pV}{v}$

বা, $p = \frac{Kv}{V}$

$p = \frac{2·6 \times 10^{10} \times 1 \times 10^{-6}}{500 \times 10^{-6}} = \frac{2600}{500} \times 10^7$

$= 5·2 \times 10^7 \text{ Nm}^{-2}$

এখানে,

আয়তন গুণাঙ্ক, $K = 2·6 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$

আদি আয়তন, $V = 500 \text{ cm}^3$

$= 500 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

আয়তন পরিবর্তন, $v = 1 \text{ cm}^3 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

আয়তন পীড়ন = প্রযুক্ত চাপ, $p = ?$

১৪। একটি তারে 0·01m দৈর্ঘ্য বিকৃতিতে পার্শ্ব বিকৃতি 0·0024 m হলে তারের উপাদানের পয়সনের অনুপাত নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

পয়সনের অনুপাত, $\sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

এখানে, দৈর্ঘ্য বিকৃতি = 0·01 m

পার্শ্ব বিকৃতি = 0·0024 m

তারটির উপাদানের পয়সনের অনুপাত, $\sigma = \frac{0·0024 \text{ m}}{0·01 \text{ m}} = 0·24$

১৫। 1m দীর্ঘ কোন তারের ব্যাস 5mm তারের দৈর্ঘ্য বরাবর একটি বল প্রয়োগ করায় এর ব্যাস 0.01mm হ্রাস পায় এবং দৈর্ঘ্য 2 cm বৃদ্ধি পায়। পয়সনের অনুপাত নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৫]

আমরা জানি,

$$\text{পয়সনের অনুপাত}, \quad \sigma = \frac{\text{পার্শ্ব বিকৃতি}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}} = \frac{d/D}{l/L} = \frac{d \times L}{D \times l} = \frac{0·001 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}}{0·5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}} = 0·1$$

$\sigma = 0·1$

এখানে,

$L = 1\text{m} = 100 \text{ cm}$

$l = 2 \text{ cm}$

$D = 5 \text{ mm} = 0·5 \text{ cm}$

$d = 0·01 \text{ mm} = 0·001 \text{ cm}$

$\sigma = ?$

৪.

১৬। কোন ধাতুর ইয়ং-এর গুণাঙ্ক $1 \times 10^{11}\, Nm^{-2}$ এবং অসহ পীড়ন $1.96 \times 10^6\, Nm^{-2}$। ধাতুটির দৈর্ঘ্য বিকৃতি ঘটলে ধাতুটির প্রতি ঘনমিটারে সর্বোচ্চ কি পরিমাণ স্থিতিশক্তি সঞ্চিত হতে পারে ?

প্রতি একক আয়তনে কৃত কাজ = প্রতি একক আয়তনে সঞ্চিত স্থিতিশক্তি

$= \frac{1}{2} \times$ দৈর্ঘ্য পীড়ন $\times$ দৈর্ঘ্য বিকৃতি (1)

এখানে দৈর্ঘ্য পীড়ন $= 1.96 \times 10^6\, Nm^{-2}$

$Y = 1 \times 10^{11}\, Nm^{-2}$

$Y = \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{\text{দৈর্ঘ্য বিকৃতি}}$

দৈর্ঘ্য বিকৃতি $= \frac{\text{দৈর্ঘ্য পীড়ন}}{Y}$

$= \frac{1.96 \times 10^6\, Nm^{-2}}{1 \times 10^{11}\, Nm^{-2}}$

$= 1.96 \times 10^{-5}$

সমীকরণ (1) অনুযায়ী সঞ্চিত স্থিতিশক্তির সর্বোচ্চ মান হতে পারে

$= \frac{1}{2} \times 1.96 \times 10^6\, Nm^{-2} \times 1.96 \times 10^{-5}$

$= 19.208\, (Nm)\, m^{-3}$

$= 19.208\, Jm^{-3}$

P.

১৭। 2 m লম্বা ও $1 \times 10^{-6}\, m^2$ প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারের দৈর্ঘ্য 1×10^{-3} m বৃদ্ধিতে কাজের পরিমাণ বা অর্জিত স্থিতিশক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [$Y = 2 \times 10^{11}\, Nm^{-2}$]

মনে করি, কাজের পরিমাণ = W

আমরা পাই, $W = \frac{1}{2}\frac{YAl^2}{L}$ (1)

মানগুলো সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই,

$$W = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 10^{11}\, Nm^{-2} \times 1 \times 10^{-6}\, m^2 \times (1 \times 10^{-3}\, m)^2}{2m}$$

$= 0.05 J$

এখানে, $Y = 2 \times 10^{11}\, Nm^{-2}$

$A = 1 \times 10^{-6}\, m^2$

$l = 1 \times 10^{-3}\, m$

$L = 2 m$

P.

১৮। 200 cm লম্বা এবং $1\, mm^2$ প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাত তারের দৈর্ঘ্য 1×10^{-3} m বৃদ্ধি করতে প্রয়োজনীয় কাজের পরিমাণ 0.05 J। তারের উপাদানের ইয়ং গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৩]

আমরা জানি,

$W = \frac{YAl^2}{2L}$

বা, $Y = \frac{W \times 2L}{Al^2}$

$= \frac{0.05 \times 2 \times 2}{10^{-6} \times (10^{-3})^2}$

$= 2 \times 10^{11}\, Nm^{-2}$

এখানে,

$L = 200\, cm = 2\, m$

$A = 1\, mm^2 = 10^{-6}\, m^2$

$l = 1 \times 10^{-3}\, m$

$W = 0.05\, J$

$Y = ?$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন

১। হুকের সূত্র বিবৃত কর। [ঢা. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০২]

২। পয়সনের অনুপাত কি ? [রা. বো. ২০০৬, ২০০৩, ২০০১; ব. বো. ২০০৬, ২০০৪ য. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৪; ঢা. বো. ২০০২ ; চ. বো. ২০০৫]

৩। অসহ পীড়ন কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৪]

৪। পয়সনের অনুপাতের একক নেই কেন ? [ব. বো. ২০০৪]

৫। ইস্পাত ও রাবারের মধ্যে কোন্‌টি বেশি স্থিতিস্থাপকে এবং কেন ? [কু. বো. ২০০৩]

৬। "ইস্পাত রাবারের চেয়ে বেশি স্থিতিস্থাপক"—ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০০৫]

৭। সংজ্ঞা লিখ ঃ

পীড়ন [চ. বো. ২০০৩]

আয়তন গুণাঙ্ক [চ. বো. ২০০৪]

কাঠিন্যের গুণাঙ্ক [চ. বো. ২০০৪]

আকার বিকৃতি [চ. বো. ২০০৪]

পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তু [চ. বো. ২০০৪]

স্থিতিস্তাপক সীমা [চ. বো. ২০০৪]

৮। স্থিতিস্থাপকতা কি ? [ব. বো. ২০০৩]
৯। স্থিতিস্থাপক সীমার সংজ্ঞা দাও। [রা. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১]
১০। হুকের সূত্র বর্ণনা কর। [কু. বো ২০০১]
১১। পীড়ন কাকে বলে ? [চ. বো. ২০০১]
১২। আণবিক দূরত্বের পরিবর্তনে আন্তঃআণবিক বলের কিরূপ পরিবর্তন ঘটে ? [য. বো. ২০০৪]
১৩। ইস্পাতের ইয়ং-এর গুণাঙ্কের মান $2\times10^{11}\,Nm^{-2}$ বলতে কি বুঝ? [য. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০০]
১৪। স্থিতিস্থাপকতা কোন্ কোন্ শর্তের উপর নির্ভর করে ?
১৫। পয়সনের অনুপাত 0·3 বলতে কি বুঝ ?
১৬। স্থিতিস্থাপকতার উপর তাপমাত্রার প্রভাব কি ?
১৭। স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি কি ? [সি. বো. ২০০৬]

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। স্থিতিস্থাপকতার সংজ্ঞা দাও। স্থিতিস্থাপকতা সম্পর্কে হুকের সূত্র বিবৃত কর ও ব্যাখ্যা কর এবং তা থেকে স্থিতিস্থাপকতা গুণাঙ্কের সংজ্ঞা দাও। [সি. বো. ২০০৫]
২। পদার্থ কাকে বলে ? পদার্থের কয়টি অবস্থা ও কি কি ?
৩। আন্তঃআণবিক বল কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৬] এর প্রকৃতি আলোচনা কর।
৪। আন্তঃআণবিক বলের আলোকে স্থিতিস্থাপকতার ব্যাখ্যা দাও।
৫। পদার্থের গঠন বর্ণনা কর। পূর্ণ স্থিতিস্থাপক বস্তু বলতে কি বুঝ ?
৬। হুকের সূত্র কি ? স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক কাকে বলে ?
৭। হুকের স্থিতিস্থাপকতার সূত্র বিবৃত কর এবং ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০০১]
৮। হুকের সূত্র বর্ণনা কর। স্থিতিস্থাপকতার বিভিন্ন গুণাঙ্কের সংজ্ঞা দাও।
৯। হুকের সূত্র প্রমাণের একটি পরীক্ষা বর্ণনা কর।
১০। ব্যাখ্যা কর ঃ বিকৃতি পীড়ন, স্থিতিস্থাপক সীমা, দৃঢ়তার স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক ও পয়সন-এর অনুপাত।
১১। বিভিন্ন প্রকার বিকৃতি ও পীড়নের নাম কর এবং সংশ্লিষ্ট স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের নাম লিখ।
১২। বিভিন্ন প্রকার বিকৃতি, পীড়ন ও স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের রাশিমালা নির্ণয় কর।
১৩। পীড়ন বনাম বিকৃতি লেখচিত্র হতে স্থিতিস্থাপক সীমা, স্থায়ী বিকৃতি, অসহ-পীড়ন ব্যাখ্যা কর।
১৪। ইয়ং গুণাঙ্ক, কাঠিন্য গুণাঙ্ক এবং আয়তন গুণাঙ্কের একক ও মাত্রা সমীকরণ বের কর।
১৫। পয়সন-এর অনুপাতের সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, পয়সন-এর অনুপাতের কোন একক ও মাত্রা নেই।
১৬। পয়সনের অনুপাত, $\sigma = -\frac{L_0}{r}\frac{\Delta r}{\Delta L}$। এ সম্পর্কটি প্রতিপাদন কর এবং এর একক ও মাত্রা সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ব. বো. ২০০৬; ঢা. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০২ ; রা. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০৫]
১৭। একটি তারকে বল প্রয়োগে সম্প্রসারিত করলে এর একক আয়তনে সঞ্চিত শক্তির বা স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তির রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [য. বো. ২০০০]
১৮। একটি ইস্পাতের তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর। [চ. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; কু. বো. ২০০৬, ২০০১,২০০৩; ঢা. বো. ২০০৪; সি. বো. ২০০৩,২০০১; য. বো.২০০১; রা. বো. ২০০৫,২০০৩]
১৯। ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয়ের পরীক্ষার তার সম্প্রসারণ লেখচিত্রের প্রকৃতি কিরূপ হবে ? [ব. বো. ২০০৪]
২০। কোন তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় পদ্ধতি বর্ণনা কর।
[ঢা. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০১]
২১। দেখাও যে, কোন বস্তু একক আয়তনের স্থিতিস্থাপক বিভব শক্তি পীড়ন ও বিকৃতির গুণফলের অর্ধেক।
[সি. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০১]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। কোন বস্তুর দৈর্ঘ্য বিকৃতি 15×10^5 এবং দৈর্ঘ্য পীড়ন $30\times10^{16}\,Nm^{-2}$। বস্তুটির ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $2\times10^{11}\,Nm^{-2}$]
২। একটি তারের অসহ পীড়ন $4{\cdot}9\times10^8\,Nm^{-2}$ এবং প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফল $1\times10^{-6}\,m^2$ হলে এর অসহ ওজন কত ? [উঃ 490N]
৩। পিতলের একটি তারে $4{\cdot}51\times10^6\,Nm^{-2}$ দৈর্ঘ্য পীড়নে দৈর্ঘ্য বিকৃতি 5×10^{-5} হল। পিতলের ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $9{\cdot}02\times10^{10}\,Nm^{-2}$]
৪। $3\times10^7\,Nm^{-2}$ আয়তন পীড়নে একটি পদার্থের আয়তন বিকৃতি $1{\cdot}5\times10^{-4}$ হলে, পদার্থটির আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $2\times10^{11}\,Nm^{-2}$]
৫। এক মিটার দীর্ঘ একটি তারের ব্যাস 0·01 m। এর দৈর্ঘ্য বরাবর একটি বল প্রয়োগ করায় ব্যাস $1\times10^{-5}\,m$ হ্রাস পায় ও দৈর্ঘ্য $1\times10^{-4}\,m$ বৃদ্ধি পায়। তারের উপাদানের পয়সনের অনুপাত নির্ণয় কর। [উঃ 0·1]
৬। একটি ইস্পাতের তারের প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফল $1\times10^{-6}\,m^2$ ও অসহ বিকৃতি $4{\cdot}9\times10^{-3}$। তারটিতে দৈর্ঘ্য বরাবর সর্বোচ্চ কত বল প্রয়োগ করা যাবে ? [ইস্পাতের ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক $=2\times10^{11}\,Nm^{-2}$] [উঃ 980 N]
৭। 1 m দীর্ঘ এবং $1\times10^{-6}\,m^2$ প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারকে দৈর্ঘ্য বরাবর 19·6N বলে টানা হল। তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নির্ণয় কর। [$Y=2\times10^{11}\,Nm^{-2}$] [উঃ $9{\cdot}8\times10^{-5}\,m$]
৮। 2 m লম্বা ও $2{\cdot}1\times10^{-7}\,m^2$ প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তার একটি ছাদ হতে ঝুলিয়ে অপর প্রান্তে 2·5 kg ভর যুক্ত করলে তারের দৈর্ঘ্য $1{\cdot}5\times10^{-3}\,m$ বৃদ্ধি পায়। তারের উপাদানের ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $1{\cdot}555\times10^{11}\,Nm^{-2}$]

৯। 5 m দীর্ঘ ও 1×10^{-6} m^2 প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি অনুভূমিক ইস্পাতের তারের দু প্রান্তকে পরস্পর বিপরীত দিকে 20 কিলোগ্রাম-ওজনের সমান বলে টানলে তারের উভয় প্রান্তের দিকে দৈর্ঘ্য 25×10^{-4} m বৃদ্ধি পায়। ইস্পাতের ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 1.96×10^{11} Nm^{-2}]

১০। দুটি সমান দৈর্ঘ্যের তার A ও B-এর ব্যাস যথাক্রমে 1×10^{-3} m ও 4×10^{-3} m। উভয়কে সমান বল দ্বারা টানলে A-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি B-এর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির 4 গুণ হয়। A ও B-এর উপাদানের ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের তুলনা কর। [উঃ 4 ঃ 1]

১১। 1 লিটার আয়তনের গ্লিসারিন 98×10^4 Nm^{-2} চাপে 0.245×10^{-6} m^3 সংকুচিত হয়। গ্লিসারিনের আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। (1 lit = 10^{-3} m^3) [উঃ 4×10^9 Nm^{-2}]

১২। এক বায়ুমণ্ডলীয় চাপে কোন বস্তুর আয়তন 3.5×10^{-3} m^3। এই চাপ বৃদ্ধি করে 25 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান করা হলে আয়তন 8.5×10^{-8} m^3 হ্রাস পায়। বস্তুর উপাদানের আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ = 1.013×10^5 Pa]। [উঃ 1.0428×10^{11} Pa]

১৩। 4 m দীর্ঘ ও 2 mm প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি তারকে টেনে 2 mm প্রসারিত করা হল। যদি তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক 7×10^{11} Nm^{-2} হয়, তবে তারটি প্রসারিত করতে কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [উঃ 0.7 J]

১৪। 3 m দীর্ঘ ও 0.3 mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি তারকে 90 N বল দ্বারা টানা হলে, তারটি কতটুকু বৃদ্ধি পাবে ? [$Y = 2 \times 10^{11}$ Nm^{-2}] [উঃ 4.77×10^{-3} m]

১৫। অ্যালুমিনিয়ামের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক 7×10^{11} Nm^{-2} হলে 5 m দীর্ঘ ও 0.6 mm ব্যাসযুক্ত একটি তারের দৈর্ঘ্য 1.5 cm বৃদ্ধি করতে কত বলের প্রয়োজন হবে ? [উঃ 593.5 N]

১৬। একটি তারের উপাদানের গুণাঙ্ক 1.6×10^{11} Nm^{-2} এবং তারটির ব্যাসার্ধ 1 mm। তারটির দৈর্ঘ্য 0.05% বৃদ্ধি করতে কত বলের প্রয়োজন হবে ? [উঃ 2.512×10^3 J]

১৭। 1 m দীর্ঘ ও 2.5×10^{-4} ব্যাসার্ধের একটি ইস্পাতের তারে 40 N বল প্রয়োগ করলে এটি বৃদ্ধি পেয়ে 1.01 m হয়। তারের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 2.04×10^{10} Nm^{-2}]

১৮। একটি 3 m দীর্ঘ ও 1 mm^2 প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কোন তারকে 2 kg ওজন দ্বারা সম্প্রসারিত করা হল। তারের সম্প্রসারণ নির্ণয় কর। [$Y = 2 \times 10^{11}$ Nm^{-2}] [উঃ 2.94×10^{-4} m]

১৯। একটি তারের দৈর্ঘ্য বরাবর বল প্রয়োগ করায় যদি দৈর্ঘ্যে 6% বৃদ্ধি পায়, তাহলে ব্যাস 4% হ্রাস পাওয়া কি সম্ভব? [উত্তর ঃ এক্ষেত্রে $\sigma = 0.67$; কিন্তু σ-এর মান 0.5 এর বেশি হতে পারে না। তাই এটি সম্ভব নয়।]

২০। 1×10^{-4} m^2 প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ইস্পাতের তারে কত বল প্রয়োগ করলে দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হবে ? [$Y = 2 \times 10^{11}$ Pa] [রা. বো. ২০০১] [উত্তর ঃ 2×10^7 N]

২১। 6m দীর্ঘ এবং 1mm^2 প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি খাড়া তারের প্রান্তে 20 kg-এর একটি ভর বুলিয়ে দেয়া হল। তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক 2.35×10^{11} Nm^{-2} হলে তারটি কতটুকু বৃদ্ধি পাবে ? [য. বো. ২০০১] [উত্তর ঃ 5×10^{-3}m]

২২। 10 cm বাহুবিশিষ্ট একটি ধাতব ঘনকের উপর 8.82×10^5 N কৃন্তন বল প্রয়োগ করায় ঘনকটির উপরের তল নীচের তল সাপেক্ষে 0.3 mm সরে গেল। কৃন্তন পীড়ন, কৃন্তন বিকৃতি ও ধাতুর দৃঢ়তা গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 8.82×10^7 Nm^{-2} ; 3×10^{-3} ; 2.94×10^{10} Nm^{-2}]

২৩। 1.5m দীর্ঘ ও 1mm ব্যাসবিশিষ্ট একটি ধাতব তারের এক প্রান্ত আবদ্ধ রেখে অপর প্রান্তে ভার চাপালে 2mm দৈর্ঘ্য প্রসারণ এবং 3.2×10^{-4} mm ব্যাস সংকোচন হয়। তারের উপাদানের পয়সন-এর অনুপাত নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 0.24]

২৪। একটি পিতলের তারের ব্যাস 1mm। তারটির আদি দৈর্ঘ্যের শতকরা 0.1 ভাগ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি করতে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? (পিতলের $Y = 9 \times 10^{10}$ Nm^{-2}) [উত্তর ঃ 7.85 N]

২৫। 3m দীর্ঘ এবং 0.5mm ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ঝুলন্ত তারের নিচের প্রান্তে 4 kg ওজন চাপানো হল। তারটির কত দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি হবে ? প্রসারিত তারটিতে সঞ্চিত বিভব শক্তির মান বের কর। (ইস্পাতের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক = 2×10^{11} Nm^{-2}) [উত্তর ঃ 0.749 mm ; 1.47×10^{-2} J]

২৬। একটি ইস্পাত তারের দৈর্ঘ্য 2m এবং প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 1mm^2। তারটির প্রান্তে 20N বল প্রয়োগ করলে এর বৃদ্ধি নির্ণয় কর। ($Y = 2 \times 10^{11}$ Nm^{-2}) [কু. বো. ২০০০] [উত্তর ঃ 2×10^{-4} m]

২৭। 1.5m দীর্ঘ একটি তারের একপ্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকিয়ে অপর প্রান্তে ভার চাপালে 2mm দৈর্ঘ্য প্রসারণ হয়। তারের ব্যাস 1mm এবং তারের উপাদানের পয়সন-এর অনুপাত 0.24 হলে প্রসারিত অবস্থায় তারটির ব্যাসের পরিবর্তন নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 3×10^{-4} mm]

২৮। 1m লম্বা ও 1mm ব্যাসের একটি তারের দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি 0.025 cm হলে তারটির ব্যাস কতটুকু হ্রাস পাবে ? [রা. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 2×10^{-5} cm]

২৯। 1 m দৈর্ঘ্য এবং 0.004 m ব্যাসবিশিষ্ট একটি ঝুলন্ত তারের নিম্নপ্রান্ত হতে 5 kg ভরের একটি বস্তু ঝুলিয়ে দেওয়া হল। যদি তারটির দৈর্ঘ্য 0.002 m বৃদ্ধি পায়, তবে এর ইয়ং-এর গুণাঙ্ক বের কর। [উঃ 1.96×10^9 Nm^{-2}]

৩০। 1×10^{-6} m^2 প্রস্থচ্ছেদ ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এবং 2 m দৈর্ঘ্যের একটি সুষম তারকে 2×10^5 N বল দ্বারা 1×10^{-3} m প্রসারিত করতে কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [তারের উপাদানের ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = 2 \times 10^{11}$ Nm^{-2}] [উঃ 100 J]

৩১। 1×10^{-6} m^3 আয়তনের একটি তামার ঘনকের চার পাশের উপর ভিতরমুখী গড় চাপ বৃদ্ধি 2.4×10^6 Pa ধরে তার আয়তন সঙ্কোচন নির্ণয় কর। [তামার আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক = 1.2×10^{11} Pa] [উঃ 2×10^{-11} m^3]

১০
প্রবাহী পদার্থ
FLUID

১০·১ সূচনা
Introduction

পদার্থকে আমরা সাধারণত তিনভাগে ভাগ করে থাকি। যথা–কঠিন, তরল ও গ্যাস। তরল এবং গ্যাসকে মিলিতভাবে প্রবাহী (Fluid) বলে। এদেরকে কোন পাত্রে আবদ্ধ না রাখলে চিরকাল ধরে প্রবাহিত হতে থাকবে। এই ধর্মের জন্যে এদেরকে প্রবাহী বলা হয়। প্রবাহীকে আবার দুই ভাগে ভাগ করা হয়েছে—একটি **অসঙ্কোচনীয় প্রবাহী** (Incompressible fluid) এবং অপরটি **সঙ্কোচনীয় প্রবাহী** (Compressible fluid)। তরল পদার্থের উপর চাপ দিলে এর আয়তনের কোন পরিবর্তন ঘটে না। কাজেই তরল অসঙ্কোচনীয় প্রবাহী। আর গ্যাসের উপর চাপ প্রয়োগ করলে এর আয়তনের পরিবর্তন ঘটে। অতএব গ্যাস সঙ্কোচনীয় প্রবাহী।

প্রবাহীর কয়েকটি বৈশিষ্ট্যমূলক বিশেষ ধর্ম রয়েছে। তবে সব ধর্মই তরল এবং গ্যাসের মধ্যে বিদ্যমান থাকে না। যেমন **পৃষ্ঠটান** তরলের একটি বিশেষ ধর্ম ; কিন্তু এ ধর্ম গ্যাসের মধ্যে নেই। আবার **সান্দ্রতা** অপর একটি ধর্ম যা তরল এবং গ্যাস উভয় প্রবাহীতেই বিদ্যমান। এ অধ্যায়ে প্রবাহীর পৃষ্ঠটান এবং সান্দ্রতা আলোচনা করব।

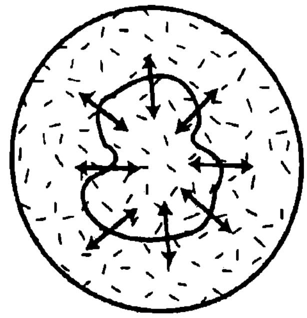
১০·২ পৃষ্ঠটান
Surface tension

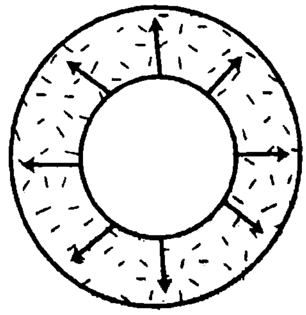
তরল মাত্রই একটি ধর্ম আছে—তরল পৃষ্ঠ সর্বদাই সঙ্কুচিত হয়ে সর্বনিম্ন ক্ষেত্রফলে আসতে চায়। তরলের মধ্যে যে বলের প্রভাবে এই বিশেষ ধর্ম প্রকাশ পায় সেই বলকেই পৃষ্ঠটান বলে।

আমরা সকলেই লক্ষ্য করেছি যে মশা, মাকড়সা ইত্যাদি কীটপতঙ্গ পানির উপরে হেঁটে চলতে পারে। একটু পর্যবেক্ষণ করলেই দেখা যাবে যে, যেখানে এদের পা পড়ে তরলের সেই স্থানটুকু একটু নীচু বা অবনমিত (depressed) হয়—কিছুটা যেন রবারের পর্দাকে চাপ দিলে যেরূপ হয়। এ ছাড়া কোন সিরিঞ্জের সূচের মাথা দিয়ে খুব আস্তে আস্তে তরল ওষুধ বা পানি নির্গত করলে দেখা যায় যে তরল বা পানি নিরবচ্ছিন্নভাবে বের না হয়ে ফোঁটায় ফোঁটায় বের হচ্ছে এবং ফোঁটাগুলো সম্পূর্ণ গোলাকার। আমরা জানি একই আয়তনের সর্বনিম্ন ক্ষেত্রফল হল গোলাকার আকৃতির। তরলের মুক্ত পৃষ্ঠে নিশ্চয়ই কোন বল ক্রিয়াশীল রয়েছে যা ফোঁটাগুলো গোলাকার রাখছে। কাজেই তরলের মুক্ত পৃষ্ঠে স্থিতিস্থাপক পর্দার টানের ন্যায় একটা টান ক্রিয়া করে। উক্ত টান তরল পৃষ্ঠের স্পর্শক অভিমুখী। তরল পৃষ্ঠ যেখানে এসে শেষ হয় সেখানেই পৃষ্ঠের সীমারেখায় পৃষ্ঠটান ক্রিয়া করে।

নিচে বর্ণিত একটি পরীক্ষার সাহায্যে সহজেই পৃষ্ঠটান ক্রিয়া প্রদর্শন করা যায়।

ধাতব তারের একটি গোল আংটা সাবান পানিতে ডুবিয়ে তুলে আনলে আংটার ভেতরে সাবান পানির একটি পাতলা সর (Thin film) আটকে থাকে। এবার একটি সুতা দিয়ে ছোট ফাঁস (loop) তৈরি করে সাবান পানিতে ভিজিয়ে আংটার সরের উপর বসালে দেখা যাবে ফাঁসটি এলোমেলোভাবে অবস্থান করছে [চিত্র ১০·১(ক)]।


(ক)

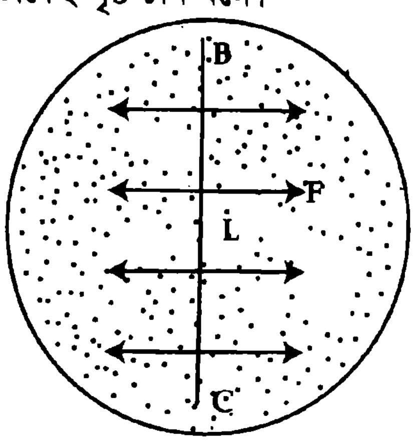

(খ)

চিত্র ১০·১

এবার একটি সুঁচ বা আলপিন দিয়ে ফাঁসের ভেতরের অংশ ছিদ্র করে দিলে দেখা যাবে ফাঁসটি এলোমেলো অবস্থা ত্যাগ করে বৃত্তাকার হয়েছে [চিত্র ১০·১(খ)]।

উপরের ঘটনা দুটো ব্যাখ্যায় বলা যায়, যখন ফাঁসের ভেতরে সর ছিল তখন ফাঁসের প্রতিটি বিন্দুতে পৃষ্ঠের স্পর্শক বরাবর সমান ও বিপরীতমুখী বল ক্রিয়া করে। ফলে প্রতিটি বিন্দুতে বলদ্বয় পরস্পরকে প্রশমিত করে। তাই ফাঁসটি এলোমেলো থাকে। পরবর্তীতে ফাঁসটি ছিদ্র করায় ফাঁসের ভেতরের দিকের বল না থাকায় প্রতিটি বিন্দুতে শুধু সরের বাইরের দিকে বল ক্রিয়া করে, ফলে বাইরের দিকে টান অনুভূত হয় এবং বাইরের দিকের সর সংকুচিত হয়ে টান টান হয়ে যায়। উপরের পরীক্ষা থেকে স্পষ্ট যে তরল পদার্থের মুক্ত পৃষ্ঠে এক ধরনের টান ক্রিয়াশীল। এই টানই পৃষ্ঠ টান। অতএব পৃষ্ঠটানের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয় যায়।

সংজ্ঞা ঃ কোন তরলের পৃষ্ঠে একটি সরলরেখা কল্পনা করলে উক্ত রেখার প্রতি একক দৈর্ঘ্যে ঐ রেখার দু'পার্শ্বে তরলের পৃষ্ঠ তলে এক অংশ অন্য অংশের উপরে যে স্পর্শক বল (tangential force) প্রয়োগ করে তাকেই পৃষ্ঠ টান বলে।



চিত্র ১০·২

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি কোন একটি তরল তলের মুক্ত পৃষ্ঠের উপর অঙ্কিত একটি রেখার (BC) দৈর্ঘ্য L [চিত্র ১০·২]। ঐ সরলরেখার উভয় পার্শ্বের তরলপৃষ্ঠ সংকুচিত হতে চাইবে এবং পরস্পর হতে দূরে সরে যাওয়ার প্রবণতা পরিলক্ষিত হবে। কাজেই BC রেখার উপর প্রতি একক দৈর্ঘ্যে একটা টান পড়বে। মনে করি ঐ রেখার অভিলম্বভাবে ও পৃষ্ঠের স্পর্শকরূপে রেখার উভয় পার্শ্বে বিদ্যমান বল F।

$$\text{পৃষ্ঠটান} = \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$$

$$\text{বা, } \boxed{T = \frac{F}{L}} \qquad (1)$$

পৃষ্ঠ টানের আরো একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে ঃ

কোন একটি তরল তলের ক্ষেত্রফল এক একক বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করতে হয় তাকে ঐ তরলের পৃষ্ঠ টান বলে এবং $T = \frac{W}{A}$

এখানে তরল তলের ক্ষেত্রফল A, একক বৃদ্ধিতে কাজের পরিমাণ = W.

পৃষ্ঠ টানের একক (Unit of surface tension)

পৃষ্ঠ টান একটি প্রাকৃতিক রাশি। অতএব এর একক আছে।

এম. কে. এস. ও এস. আই. বা আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে পৃষ্ঠ টানের নিরপেক্ষ একক নিউটন/মিটার (Nm^{-1})।

পৃষ্ঠ টানের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of surface tension)

$$\text{পৃষ্ঠ টান} = \frac{\text{বল}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$$

এর মাত্রা সমীকরণ,

$$[\text{পৃষ্ঠ টান}] = \frac{[\text{বল}]}{[\text{দৈর্ঘ্য}]} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L]} = [MT^{-2}] \qquad (2)$$

পৃষ্ঠ টানের বৈশিষ্ট্য (Characteristics of surface tension)

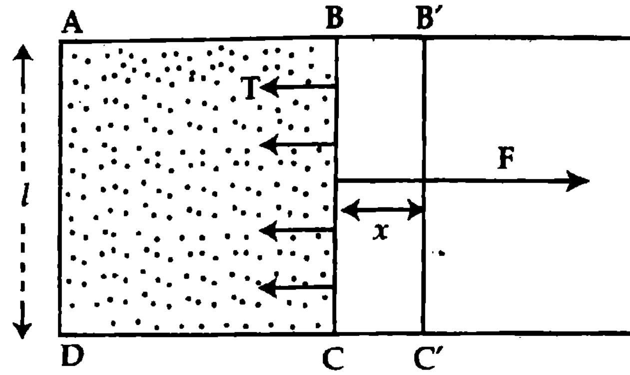
তরলের পৃষ্ঠ টানের নিম্নলিখিত দুটি উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য রয়েছে, যথা ঃ

(ক) পৃষ্ঠ টান তরল তলকে সংকুচিত করার চেষ্টা করে।

(খ) তরল তলের ক্ষেত্রফল বাড়াবার চেষ্টা করলে পৃষ্ঠ টান তা প্রতিরোধ করার চেষ্টা করে।

১০·৩ পৃষ্ঠ শক্তি বা তল শক্তি
Surface energy

আমরা জানি কোন একটি তরল তলে একটি টান বা বল সর্বদা ক্রিয়া করে এবং এই বল তরল তলের ক্ষেত্রফল হ্রাস করতে চেষ্টা করে। সুতরাং এ অবস্থায় তরল তলের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি করতে হলে ঐ বলের বিরুদ্ধে কিছু কাজ করতে হবে। এ কাজ স্থিতিশক্তি হিসেবে তরল তলে সঞ্চিত থাকবে। তরল পৃষ্ঠের এই স্থিতিশক্তিকে আপাতভাবে **পৃষ্ঠ শক্তি** বা **তল শক্তি** বলে। তবে সঠিকভাবে বলা যায়— **কোন একটি তরল তলের ক্ষেত্রফল এক একক বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয়, তাকে ঐ তলের পৃষ্ঠ শক্তি বলে। একে সাধারণত E দ্বারা প্রকাশ করা হয়।**



চিত্র ১০·৩

এখন তরলের পৃষ্ঠ টান এবং পৃষ্ঠ শক্তির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে মনে করি ABCD একটি হাল্কা আয়তকার ফ্রেম যার AB, AD এবং DC বাহু স্থির [চিত্র ১০·৩]। কেবল BC বাহু AB এবং DC বরাবর বাধাহীনভাবে চলাচল করতে পারে। তরলের একটি পর্দা এই ফ্রেমের উপর স্থাপন করি। পৃষ্ঠ টানের দরুন এই পর্দা BC বাহু ছাড়া অন্য সকল বাহু আটকানো থাকায় তারা স্থির থাকবে, কিন্তু BC বাহুটি ভিতরের দিকে যেতে চাইবে।

যদি তরলের পৃষ্ঠ টান T হয় এবং BC বাহুর দৈর্ঘ্য l হয়, তবে পৃষ্ঠ টানের দরুন BC বাহুর উপর ভিতরমুখী বল

$$F = 2l \times T \qquad (3)$$

যেহেতু পর্দার দুটি তল আছে, একটি উপরের দিকে এবং অপরটি নিচের দিকে, সেহেতু BC বাহুর দৈর্ঘ্য = $2l$। BC-কে স্থির রাখতে হলে তার উপর পৃষ্ঠ টানের বিপরীতমুখী সম পরিমাণের একটি বল প্রয়োগ করতে হবে।

এবার BC বাহুকে ধীরে ধীরে x দূরত্ব বাইরের দিকে সরিয়ে B′C′ অবস্থানে আনতে ঐ বলের বিরুদ্ধে কিছু কাজ করতে হবে। এর ফলে ABCD পর্দাটির মোট ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি = $2l \times x$, যেহেতু পর্দার দুটি তল আছে। এই পদ্ধতিতে কৃত কাজের পরিমাণ—

$$W = \text{বল} \times \text{সরণ} = F \times x = 2lTx.$$

একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধিতে কাজের পরিমাণ

$$= \frac{\text{কাজ}}{\text{ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি}} = \frac{W}{2lx} = \frac{2lTx}{2lx} = T$$

কিন্তু একক ক্ষেত্রফল বৃদ্ধিতে কাজের পরিমাণ = একক ক্ষেত্রফলে সঞ্চিত স্থিতি শক্তি। পুনঃ একক ক্ষেত্রফলে সঞ্চিত স্থিতি শক্তি = পৃষ্ঠ শক্তি। অতএব আমরা এই সিদ্ধান্ত করতে পারি যে, কোন তরলের পৃষ্ঠ শক্তি সংখ্যাগতভাবে তরলের পৃষ্ঠ টানের সমান।

যদি পৃষ্ঠ শক্তিকে E এবং পৃষ্ঠ টানকে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে

$$\boxed{E = T} \qquad (4)$$

পৃষ্ঠ শক্তির একক (Unit of surface energy)

পৃষ্ঠ শক্তির এম. কে. এস. বা এস. আই. একক হল জুল/মিটার^2 (J/m^2)। কিন্তু J/m^2 হচ্ছে Nmm^{-2} বা Nm^{-1}। কাজেই কোন তরলের পৃষ্ঠ শক্তির একক এবং পৃষ্ঠ টানের একক অভিন্ন।

প্রকৃত পক্ষে, কোন তরলের পৃষ্ঠ শক্তি আর পৃষ্ঠ টান একই।

পৃষ্ঠ শক্তির মাত্রা সমীকরণ (Dimension of surface energy)

$$[\text{পৃষ্ঠ শক্তি}] = \left[\frac{\text{কাজ}}{\text{ক্ষেত্রফল}}\right] = \left[\frac{\text{বল} \times \text{সরণ}}{\text{ক্ষেত্রফল}}\right]$$

$$= \left[\frac{MLT^{-2} \times L}{L^2}\right]$$

$$\boxed{= [MT^{-2}]}$$

উল্লেখ্য, সাধারণ তাপমাত্রায় পানির পৃষ্ঠ শক্তি বা তল শক্তি, $E = 72 \times 10^{-3}$ জুল/মিটার^2 (Jm^{-2})

১০·৪ পৃষ্ঠ টান সংক্রান্ত কয়েকটি প্রয়োজনীয় রাশি
Some terms relating surface tension

পৃষ্ঠ টানের তত্ত্ব ব্যাখ্যা করার পূর্বে কয়েকটি রাশি জানা দরকার। রাশিগুলো হল—

(ক) **সংসক্তি বা সংযুক্তি বল** (Cohesive force),

(খ) **আসঞ্জন বল** (Adhesive force) এবং

(গ) **আণবিক পাল্লা** (Molecular range)

সংসক্তি বা সংযুক্তি বল : আমরা জানি কোন একটি পদার্থ কতকগুলো অণুর সমষ্টি। **একই পদার্থের বিভিন্ন অণুর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে সংসক্তি বা সংযুক্তি বল বলে।** যেমন লোহার বিভিন্ন অণুর মধ্যে যে পারস্পরিক আকর্ষণ বল আছে, তার নাম সংসক্তি বল। এই বল দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক সূত্র মেনে চলে।

আসঞ্জন বল : একটি পদার্থকে অন্য একটি পদার্থের সংস্পর্শে রেখে দিলে পদার্থ দুটির অণুগুলোর মধ্যে একটি পারস্পরিক আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে। **বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে এই পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে আসঞ্জন বল বলে।** একটি পাত্রে পানি রাখলে পাত্রের অণু ও পানির অণুর মধ্যে যে আকর্ষণ বল ক্রিয়া করে তাই আসঞ্জন বল।

আণবিক পাল্লা : আমরা জানি সংসক্তি বল অণু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। দূরত্ব বৃদ্ধি পেতে থাকলে বল দ্রুত হ্রাস পেতে থাকে। **দুটি অণুর মধ্যে ক্রিয়ারত সংসক্তি বল সর্বাধিক যতটুকু দূরত্ব পর্যন্ত অনুভূত হয়, তাকে আন্তঃআণবিক পাল্লা বলে।** এই দূরত্বের মান প্রায় 10^{-9} m। কোন একটি অণুকে কেন্দ্র করে আণবিক পাল্লার সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি গোলক কল্পনা করলে তাকে ঐ অণুর **প্রভাব গোলক** (sphere of attraction) বলে। ঐ অণুটি কেবল প্রভাব গোলকের ভিতরের অণুগুলোর দ্বারা প্রভাবিত হবে। প্রভাব গোলকের বাইরের কোন অণু এই অণুটির উপর কোন সংসক্তি বল প্রয়োগ করে না ধরে নেয়া হয়।

১০·৫ ল্যাপ্লাসের পৃষ্ঠ টানের আণবিক তত্ত্ব
Laplace's molecular theory of surface tension

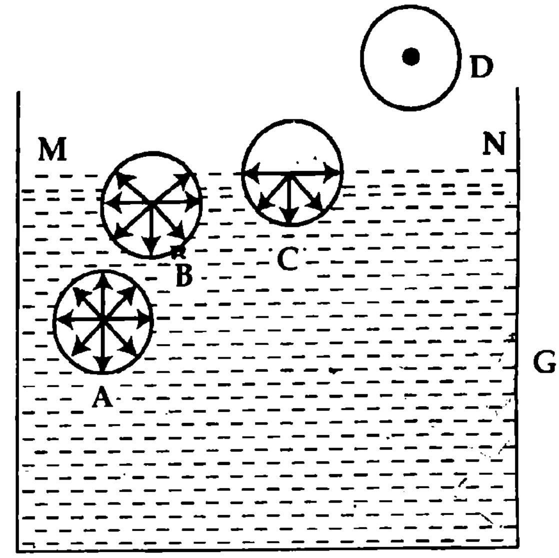
তরলের পৃষ্ঠ টানকে ব্যাখ্যা করার জন্য বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন বিজ্ঞানী বিভিন্ন তত্ত্ব প্রদান করেন। সর্বাপেক্ষা নির্ভরযোগ্য তত্ত্ব প্রদান করেন বিজ্ঞানী ল্যাপ্লাস। ল্যাপ্লাস-এর নামানুসারে এই তত্ত্বকে **ল্যাপ্লাসের আণবিক তত্ত্ব** বলে। ল্যাপ্লাস আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে পৃষ্ঠ টানের ব্যাখ্যা করেন বলে তত্ত্বের এরূপ নামকরণ হয়েছে।

মনে করি, A, B, C এবং D তরলের চারটি অণু [চিত্র ১০·৪]। এদের মধ্যে A তরলের গভীর অভ্যন্তরে, B তরল তলের একটু নিচে, C ঠিক তরল তলে এবং D তরলের বাইরে অবস্থিত। তাদের চারদিকে প্রভাব গোলক অঙ্কন করি।

'A' অণুটির প্রভাব গোলক তরলের অভ্যন্তরে সম্পূর্ণভাবে নিমজ্জিত থাকায় তা অন্যান্য অণু দ্বারা চারদিকে সমভাবে আকৃষ্ট হবে এবং তার উপর লব্ধি সংসক্তি বলের মান শূন্য হবে। ফলে তা যে অবস্থায় আছে সেই অবস্থায় থাকবে।

'B' অণুর প্রভাব গোলকের কিছু অংশ তরলের বাইরে থাকায় ঐ গোলকের নিচের অংশের অণুর সংখ্যা উপরের অংশের অণুর সংখ্যা অপেক্ষা অধিক হওয়ায় 'B' অণুর উপর একটি নিম্নমুখী লব্ধি সংসক্তি বল ক্রিয়া করবে।

পুনঃ 'C' অণু ঠিক তরল পৃষ্ঠের উপরে থাকায় এর প্রভাব গোলকের অর্ধেক ভাগ তরলের ভিতরে এবং অর্ধেক ভাগ তরলের বাইরে থাকবে। অতএব এটি কেবল গোলকের নিচের অংশের অণু দ্বারা আকৃষ্ট হবে এবং এটি সম্পূর্ণভাবে একটি নিম্নমুখী সর্বাধিক লব্ধি সংসক্তি বল অনুভব করবে। তরল তলে অবস্থিত সকল অণুর ক্ষেত্রে এই ঘটনা পরিলক্ষিত হবে। তরল তলের ঠিক উপরের D অণুর প্রভাব গোলক সম্পূর্ণ রূপে তরলের উপরে থাকায় তার উপর তরলের টান "শূন্য"। ফলে অণুটি গ্যাস অণুর ন্যায় মুক্তভাবে বিচরণ করবে। অতএব MN তরল তল একটি নিম্নমুখী বল বা টান অনুভব করে এবং সঙ্কুচিত হতে প্রয়াস পায়। অর্থাৎ MN তলের ক্ষেত্রফল কমাতে চায়, যার ফলে স্থিতিশক্তি কমে। সকল বস্তুই সুস্থির বা সাম্যাবস্থায় থাকার জন্য সর্বনিম্ন স্থিতিশক্তিতে আসতে চায়। যেমন একটি রাবারের টান দেয়া পর্দা নিজ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল হ্রাস করতে চায়। এই সঙ্কোচনের প্রবণতা হতেই তরলের পৃষ্ঠ টানের উৎপত্তি হয়। এই টান তরল তলের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়া করে।

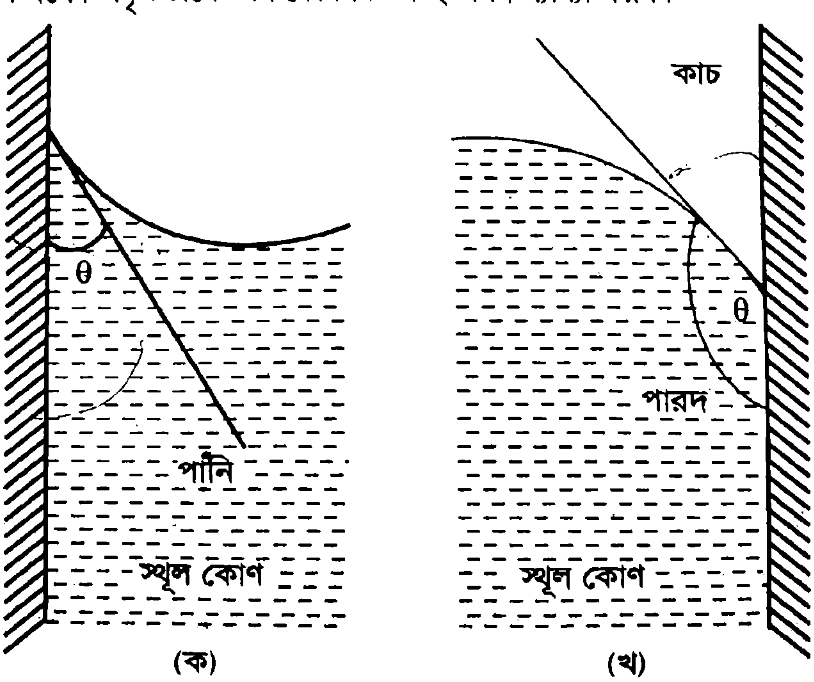


চিত্র ১০.৪

এটিই হল ল্যাপ্লাস কর্তৃক তরলের পৃষ্ঠ টানের সরল আণবিক ব্যাখ্যা।

১০.৬ স্পর্শ কোণ
Angle of contact

তরল পদার্থ যখন কোন কঠিন পদার্থের সংস্পর্শে আসে, তখন তাদের মধ্যে একটি কোণ উৎপন্ন হয়। একেই আপাতভাবে স্পর্শ কোণ বলে। প্রকৃতভাবে স্পর্শ কোণ কি তা-ই এখন ব্যাখ্যা করব।



চিত্র ১০.৫

কোন একটি কঠিন বস্তু খাড়াভাবে পানিতে বা অন্য কোন তরলে আংশিকভাবে ডুবালে তাদের সংযোগ স্থানে তরল তল কিছুটা বেঁকে যায়। তরলের বিভিন্ন অণুর মধ্যে সংসক্তি বল ছাড়াও কঠিন ও তরলের অণুর আসঞ্জন বল

আছে। সংসক্তি বল তরল তলকে অনুভূমিকভাবে রাখার চেষ্টা করে। পক্ষান্তরে আসঞ্জন বল তরল তলকে উপরে উঠাতে চেষ্টা করে। এই দুটি বলের সম্মিলিত ক্রিয়ায় তরল তল কঠিন পদার্থের গা বেয়ে উপরে উঠে কিংবা নিচে নেমে আসে এবং কঠিন পদার্থের দেয়ালের সাথে একটি কোণ উৎপন্ন করে। এই কোণকে **স্পর্শ কোণ** বলে। একে সাধারণত 'θ' বা 'α' দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

সংজ্ঞা : কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু হতে বক্র তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন বস্তুর সাথে তরলের মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে উক্ত কঠিন ও তরলের মধ্যকার স্পর্শ কোণ বলে।

চিত্রে θ হল স্পর্শ কোণ।

স্পর্শ কোণ দুই প্রকার, যথা—

১। **সূক্ষ্ম স্পর্শ কোণ** (Acute angle of contact) এবং

২। **স্থূল স্পর্শ কোণ** (Obtuse angle of contact)।

স্পর্শ কোণ 90° অপেক্ষা কম হলে সূক্ষ্ম স্পর্শ কোণ হবে। যে সব তরলের ঘনত্ব কঠিনের ঘনত্ব অপেক্ষা কম সে সব তরল সাধারণত কঠিনকে ভিজায়। এসব ক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ সূক্ষ্ম কোণ হবে [চিত্র ১০·৫ (ক)]। যেমন পানির ঘনত্ব কাচের ঘনত্ব অপেক্ষা কম। পানি কাচকে ভিজায়। এক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ সূক্ষ্ম কোণ হবে। সাধারণ পানি এবং কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় 8°। বিশুদ্ধ পানি ও পরিষ্কার কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় শূন্য এবং রূপা ও পানির ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় 90°।

আর স্পর্শ কোণ 90° অপেক্ষা বড় হলে স্থূল স্পর্শ কোণ হয়। যে সব তরলের ঘনত্ব কঠিনের ঘনত্ব অপেক্ষা বেশি, সেসব তরল সাধারণত কঠিনকে ভিজায় না। এক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ স্থূলকোণ হবে [চিত্র ১০·৫ (খ)]। যেমন পারদের ঘনত্ব কাচের ঘনত্ব অপেক্ষা বেশি। পারদ কাচকে ভিজায় না। এক্ষেত্রে স্পর্শ কোণ স্থূল কোণ হবে। পারদ এবং কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় 140°।

স্পর্শ কোণ যে যে বিষয়ের উপর নির্ভর করে (Factors affecting angle of contact)

নিম্নলিখিত বিষয়গুলোর উপর স্পর্শ কোণ নির্ভর করে—

(ক) কঠিন ও তরলের প্রকৃতি।

(খ) তরলের উপরিস্থিত মাধ্যম। যেমন পারদের উপর বায়ু থাকলে কাচ ও পারদের স্পর্শ কোণ যা হবে, পারদের উপর পানি থাকলে কাচ ও পারদের স্পর্শ কোণ ভিন্নতর হবে।

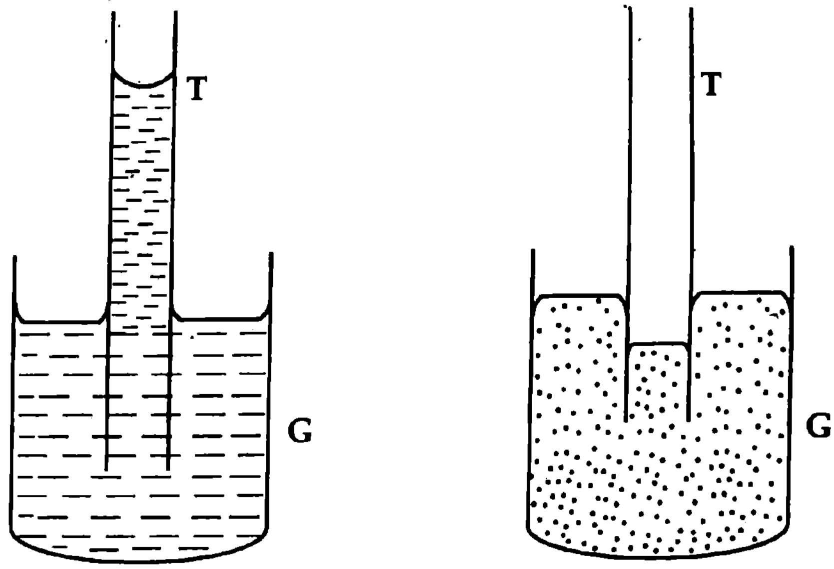
(গ) কঠিন ও তরলের বিশুদ্ধতা। যদি তরল বিশুদ্ধ না হয় এবং কঠিন পরিষ্কার না হয় তবে স্পর্শ কোণ পরিবর্তিত হয়। বিশুদ্ধ পানি ও পরিষ্কার কাচের ভিতরকার স্পর্শ কোণ প্রায় শূন্য। কিন্তু কাচ সামান্য তৈলাক্ত হলে স্পর্শ কোণ বৃদ্ধি পায়; এমন কি 90°-এর বেশি হতেও দেখা যায়।

১০·৭ কৈশিকতা বা কৈশিকত্ব
Capillarity

'Capillus' একটি ল্যাটিন শব্দ। এর বাংলা অর্থ **'কেশ'**। কেশের মত সরু ছিদ্রবিশিষ্ট নলকে কৈশিক নল বলে।

দুই মুখ খোলা কাচের একটি সরু নলকে খাড়াভাবে পানিতে বা কাচ ভিজায় এমন একটি তরলে আংশিক ডুবালে দেখা যাবে যে, নলের ভিতরে পানি বা ঐ তরল খানিকটা উপরে উঠেছে [চিত্র ১০.৬ (ক)] অর্থাৎ নলের ভিতরের পানির তল এবং বাইরের পানির তল একই অনুভূমিক তলে নেই। শুধু তাই নয়, নলের ভিতরের পানির তল অবতল আকার ধারণ করেছে।

আবার কৈশিক নলটিকে পারদ বা কাচ ভিজায় না এমন একটি তরলে ডুবালে দেখা যাবে নলের ভিতরে পারদ বা ঐ তরল খানিকটা নিচেরব দিকে নেমে গেছে [চিত্র ১০.৬ (খ)]। অধিকন্তু নলের ভিতরের পাঁরদ তল উত্তল আকার ধারণ করেছে। **কৈশিক নলের মধ্যে তরলের উত্থান বা পতনকে** (rise or fall) **কৈশিকত্ব বলে।** আরও সহজ ভাষায় বলা যায় যে, **কৈশিকতা বলতে কৈশিক নলে তরলের উঠা বা নামা সংক্রান্ত ব্যাপার বুঝায়।** তরলের পৃষ্ঠ টানের জন্য এটি ঘটে।

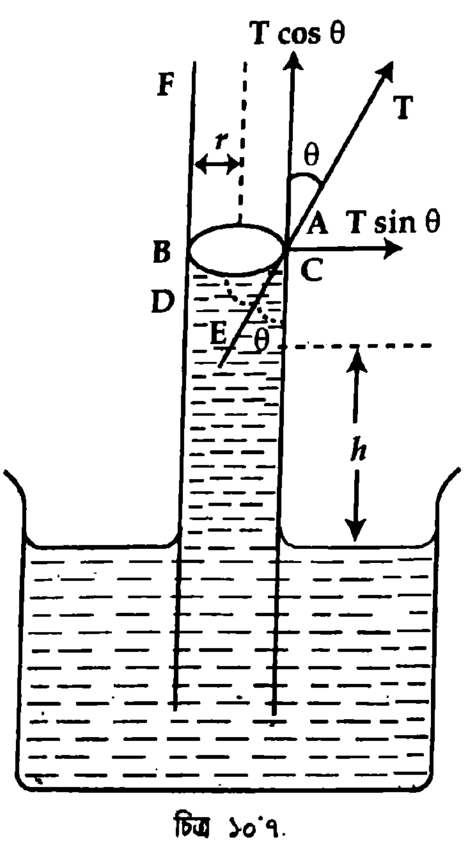


পানি
(ক)

পারদ
(খ)

চিত্র ১০.৬

১০.৮ কৈশিকতা তত্ত্ব
Theory of capillarity



চিত্র ১০.৭

দুই মুখ খোলা এবং আগা-গোড়া সমান প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট কাচের একটি কৈশিক নল নিই। নলটিকে খাড়াভাবে পানিতে আংশিক ডুবালে দেখা যাবে পানি নলের মধ্যে খানিকটা উপরে উঠেছে এবং নলের মধ্যে পানির তল বেঁকে অবতল আকার ধারণ করেছে।

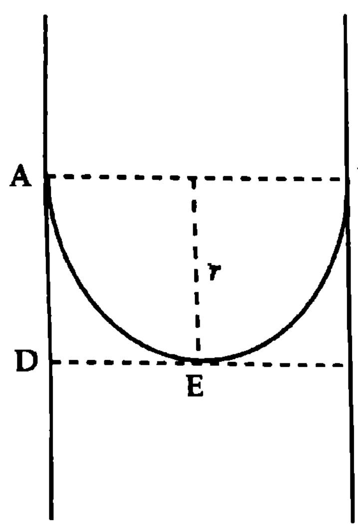
মনে করি পানির অবতল পৃষ্ঠে সর্বনিম্ন তল পর্যন্ত নলের মধ্যে পানির উচ্চতা = h [চিত্র ১০.৭]। ধরি নলের ব্যাসার্ধ = r, পানি ও কাচের মধ্যকার স্পর্শকোণ = θ এবং পানির পৃষ্ঠটান = T। এই পৃষ্ঠ টান পানি ও কাচের স্পর্শ বিন্দু A-তে অঙ্কিত স্পর্শক বরাবর অন্তর্মুখী ক্রিয়া করে। নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্র অনুযায়ী কাচ তরলের উপর একটি সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া বল T (চিত্রে এটি নির্দেশ করা হয়েছে) প্রয়োগ করবে। বল বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা উক্ত বলকে পারস্পরিক অভিলম্ব দিকে দুটি উপাংশে ভাগ করা যেতে পারে। একটি খাড়া ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ T cos θ এবং অপরটি এর অভিলম্ব দিকে বহির্মুখী উপাংশ T sin θ। কাচের সাথে তরলের সমগ্র স্পর্শ রেখা

AB বিবেচনা করলে দেখা যায় যে, এদের মধ্যে বহির্মুখী অনুভূমিক উপাংশগুলো পরস্পরকে নিষ্ক্রিয় বা নাকচ করে দেয়, ফলে শুধু খাড়া ঊর্ধ্বমুখী উপাংশ কার্যকর হয়। সুতরাং তরলের সাথে স্পর্শ রেখা বরাবর মোট ঊর্ধ্বমুখী কার্যকর বল

$= T\cos\theta \times$ দৈর্ঘ্য $= T\cos\theta \times 2\pi r = 2\pi r\, T\cos\theta$

এই ঊর্ধ্বমুখী বল নলের মধ্যে পানিস্তম্ভের ওজনকে ধারণ করে। যদি নলের মধ্যে পানিস্তম্ভের ভর m হয় এবং ঐ স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ g হয়, তবে নলের মধ্যে পানির ওজন, $W = mg$

আমরা পাই, $2\pi r\, T\cos\theta = mg$ (5)



চিত্র. ১০.৮

এখন বাইরের পানির তল হতে নলের ভিতরের পানির তলের নিম্ন প্রান্ত DEC পর্যন্ত h উচ্চতাবিশিষ্ট পানি স্তম্ভের আয়তন V এবং পানির তলের বক্র অংশে পানির আয়তন v হলে নলের মধ্যে পানির মোট আয়তন $= (V + v)$। পানির ঘনত্ব ρ হলে ভর $m = (V + v)\rho$.

$$2\pi r\, T\cos\theta = (V + v)\rho g \qquad (6)$$

কিন্তু $V = \pi r^2 h$, এবং

v = ABCD চোঙের আয়তন—AEB অর্ধগোলকের আয়তন [চিত্র ১০.৮]।

$$v = \pi r^2 . r - \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$$

সমীকরণ (6) হতে পাই,

$$2\pi r\, T\cos\theta = \left(\pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3\right)\rho g$$

বা, $2\pi r\, T\cos\theta = \pi r^2 \rho g\left(h + \frac{1}{3}r\right)$

বা, $2T\cos\theta = r\rho g\left(h + \frac{1}{3}r\right)$

$$T = \frac{r\rho g\left(h + \frac{1}{3}r\right)}{2\cos\theta} \qquad (7)$$

যদি r-এর মান খুবই ছোট হয়, তবে $\frac{1}{3}r$-কে সহজেই উপেক্ষা করা যেতে পারে।

$$T = \frac{hr\rho g}{2\cos\theta} \qquad (8)$$

কাচ এবং পানির ক্ষেত্রে, $\theta = 0°$; কাজেই সমীকরণ (7) অনুসারে,

$$T = \frac{rg\rho}{2}\left(h + \frac{1}{3}r\right) \qquad (9)$$

অবশ্য পানির ক্ষেত্রে r-এর মান ক্ষুদ্র হলে,

$$T = \frac{hr\rho g}{2} \qquad (10)$$

প্রয়োজনবোধে (7), (8), (9) এবং (10) সমীকরণের যে কোন একটির সাহায্যে পানি কিংবা অন্য কোন তরলের পৃষ্ঠ টান নির্ণয় করা যায়।

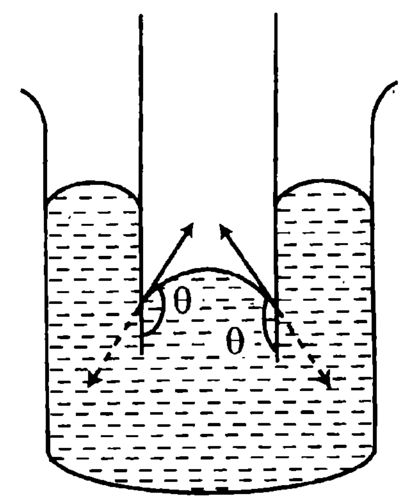
কৈশিক নলে তরলের ওঠানামার কারণ

পরীক্ষায় দেখা যায় যে কৈশিক নল পানিতে ডুবালে খানিকটা উপরে ওঠে যায়। আবার কৈশিক নলটিকে পারদে ডুবালে নলের ভেতরে পারদ খানিকটা নিচে নেমে যায়। এর কারণ নিম্নরূপ ঃ

চিত্র ১০·৭ হতে কাচ ও পানির ক্ষেত্রে প্রতিক্রিয়া বল T-এর খাড়া উর্ধ্বমুখী উপাংশ = $T\cos\theta$। স্পর্শ কোণ θ সূক্ষ্মকোণ $(0 < \theta < 90°)$ হওয়ায় $T\cos\theta$-এর মান ধনাত্মক। এই উর্ধ্বমুখী বলের ক্রিয়ায় পানি কৈশিক নলের ভেতর দিয়ে উপরে ওঠে।

চিত্র ১০·৯-এ কৈশিক নল পারদে ডুবানো দেখান হয়েছে। এক্ষেত্রে স্পর্শকোণ স্থূলকোণ $(90° < \theta < 180°)$। পৃষ্ঠটান ও প্রতিক্রিয়া বলের অভিমুখ থেকে দেখা যায়, যে প্রতিক্রিয়া বলের খাড়া উর্ধ্বমুখী কোন উপাংশ নেই। খাড়া নিম্নমুখী উপাংশ রয়েছে। এই নিম্নমুখী বলের ক্রিয়ায় কাচনলে পারদ নিচের দিকে খানিকটা নেমে যায়। পারদ নিচে নামার কারণ নিম্নোক্তভাবেও ব্যাখ্যা করা যায়। যেহেতু θ স্থূলকোণ, সুতরাং $\cos\theta$ ঋণাত্মক। এখন পৃষ্ঠ টানের

সমীকরণ (8) হতে দেখা যায় যে, $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে সমীকরণের ডানপক্ষ ঋণাত্মক হয়; কিন্তু বামপক্ষের পৃষ্ঠ টান T ধনাত্মক। তাই $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে h ঋণাত্মক হয়। এর অর্থ হল পারদ কাচনলের মধ্যে নিচে নেমে যায়।



চিত্র ১০·৯

১০·৯ সাবান বুদ্‌বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ
Excess pressure inside a soap bubble

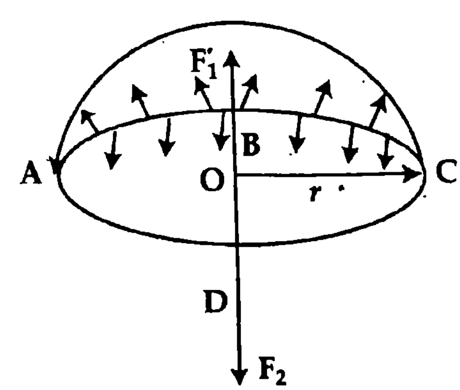
সাবান পানির পাতলা ফিল্ম দ্বারা পরিবেষ্টিত বায়ুকে সাবান বুদ্‌বুদ্ বলা হয়। এই ধরনের বুদ্‌বুদের বাইরের দিকে এবং ভেতরের দিকে দুটি পৃষ্ঠ থাকে। এই পৃষ্ঠদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থানে তরলের খুবই পাতলা সরের চলাচল লক্ষ করা যায়। বুদ্‌বুদের ভেতরের দিকের চাপ বাইরের চাপের তুলনায় অধিক হয়, না হলে বুদ্‌বুদ্ চুপসে যেত। অভ্যন্তরীণ চাপ বেশি হওয়ায় বুদ্‌বুদের আয়তন বৃদ্ধি পেতে চেষ্টা করে ; কিন্তু পৃষ্ঠ টানের কারণে এই আয়তন বৃদ্ধি বাধাপ্রাপ্ত হয়। যখন এই দুটি বিপরীতমুখী বল সমান হয় তখন বুদ্‌বুদের সাম্যাবস্থা সৃষ্টি হয়।

চিত্র ১০·১০-এ একটি গোলাকার বুদ্‌বুদকে ব্যাস বরাবর একটি কাল্পনিক তল দ্বারা বিভক্ত দেখান হয়েছে। ধরা যাক, বুদ্‌বুদের ব্যাসার্ধ এর সাবান পানির পৃষ্ঠ টান T এবং সরের অভ্যন্তরে বাইরের তুলনায় অতিরিক্ত p।

এখন ABCD তলের উপর উর্ধ্বমুখী ক্রিয়াশীল বল,

$\overrightarrow{OF_1}$ = চাপের পার্থক্য × প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

$= p \times \pi r^2$



চিত্র ১০·১০

আবার, পৃষ্ঠ টানের দরুন ABCD-এর পরিধি বরাবর পৃষ্ঠ টানজনিত নিম্নমুখী বল ক্রিয়া করে। এই বল O বিন্দু বরাবর নিম্নমুখী। বুদ্‌বুদের দুটি তল থাকায় পৃষ্ঠ টানজনিত বল,

$\overrightarrow{OF_2} = 2 \times T \times (2\pi r)$

সাম্যাবস্থায়, $\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{OF_2}$ হবে,

অর্থাৎ, $\pi r^2 p = 4\pi r T$

বা, $\boxed{p = \frac{4T}{r}}$ (11)

স্থির তাপমাত্রায় T-এর মান নির্দিষ্ট।

সুতরাং, সমীকরণ (11) অনুসারে বলা যায়,

নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় বুদ্‌বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ এর ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক।

বুদ্‌বুদের বাইরে বায়ুমণ্ডলীয় চাপ যদি P হয় তবে বুদ্‌বুদের অভ্যন্তরস্থ মোট চাপ হবে $P + p$

অতএব, মোট চাপ $= P + p = P + \frac{4T}{r}$

[বিঃ দ্রঃ তরল ফোঁটা বা তরলবেষ্টিত বায়ু বুদ্‌বুদের ক্ষেত্রে একটিমাত্র তল থাকে। ফলে অতিরিক্ত চাপ $P = \frac{2T}{r}$ হয়]

১০·১০ তরলের পৃষ্ঠ টান নির্ণয়
Determination of surface tension of liquid

তরলের পৃষ্ঠ টান নির্ণয়ের জন্য অনেকগুলো পদ্ধতি রয়েছে। এদের মধ্যে উল্লেখযোগ্য হল ঃ

১। কৈশিক নল পদ্ধতি (Capillary tube method)
২। জ্যাগারের পদ্ধতি (Jaeger's method)
৩। কুইঙ্কের পদ্ধতি (Quincke's method)
৪। বুদবুদ পদ্ধতি (Bubble method)

যেহেতু এই অধ্যায়ে আমরা কৈশিকতা নিয়ে আলোচনা করছি, সুতরাং কৈশিক নলের সাহায্যে পানির পৃষ্ঠ টান নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করব।

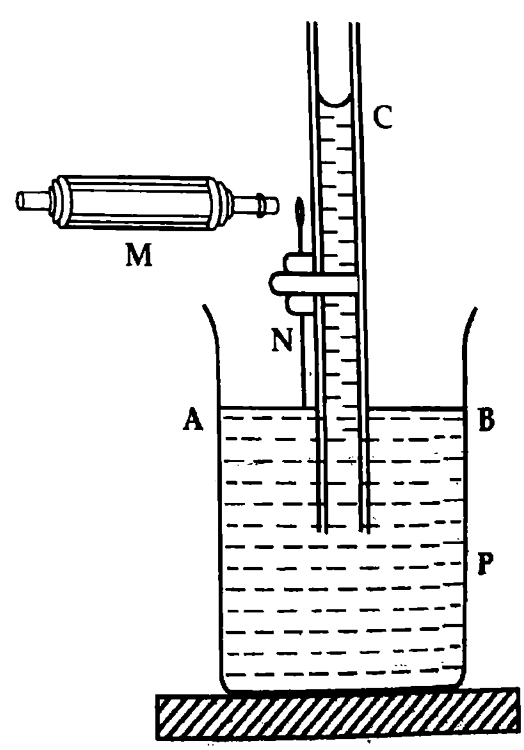
কৈশিক নল পদ্ধতিতে পানির পৃষ্ঠ টান নির্ণয় (Determination of surface tension of water by capillary tube method)

তত্ত্ব (Theory) ঃ ধরি 'r'-ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কাচের তৈরি একটি নলকে খাড়াভাবে পানিতে আংশিক নিমজ্জিত করায় কৈশিকতার দরুন নলের মধ্যে পানি স্তম্ভের উচ্চতা h হল। পানির ঘনত্ব ρ এবং পরীক্ষাধীন স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান g হলে, তার পৃষ্ঠ টান,

$$T = \frac{\rho r g}{2}\left(h + \frac{1}{3}r\right) \quad (12)$$

পরীক্ষা এবং কার্যপদ্ধতি ঃ কাচের তৈরি একটি কৈশিক নল C লই। একে প্রথমে নাইট্রিক এসিড ও কস্টিক সোডা দ্রবণে ধুয়ে পরিষ্কার করি। পরে নলকূপের পানিতে ভালভাবে ধুই এবং শুকিয়ে নিই। এবার একটি কাচ পাত্র P-এ খানিকটা পানি লই এবং নলটিকে পানির মধ্যে আংশিক ডুবিয়ে একটি দণ্ডের সাহায্যে খাড়াভাবে আটকিয়ে রাখি [চিত্র ১০·১১]।

কৈশিক ক্রিয়ার দরুন নলের ভিতর পানি উপরে উঠবে। পাত্রটিকে একটু উঁচু করে ধরি এবং পরে নামিয়ে পূর্বের অবস্থানে আনি। এতে নলের অভ্যন্তরীণ দেয়াল পানিতে ভালভাবে ভিজবে। এখন একটি চলমান অণুবীক্ষণ যন্ত্র M-এর সাহায্যে নলের ভিতর পানিস্তম্ভের উচ্চতা বের করি। কিন্তু পাত্রের মধ্যে পানির তল ফোকাস করা অসুবিধাজনক হওয়ায় নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি সূচক N-কে ঐ নলের গায়ে খাড়া করে এমনভাবে স্থাপন করি যাতে সূচকের নিম্ন প্রান্ত পাত্রস্থিত পানির তল স্পর্শ করে। পানিস্তম্ভের স্থির অবস্থানে



চিত্র ১০·১১

পানিস্তম্ভের শীর্ষদেশে নলের গায়ে একটি কালির দাগ দিই। এখন অণুবীক্ষণ যন্ত্রের সাহায্যে ঐ স্থির অবস্থান এবং সূচকের শীর্ষ বিন্দুর পাঠ লই। এই দুই পাঠের পার্থক্যের সাথে সূচকের দৈর্ঘ্য যোগ করে নলের মধ্যে পানি স্তম্ভের উচ্চতা বের করি। এবার কালির দাগ দেয়া জায়গাটি খুব সাবধানে কাটি এবং অণুবীক্ষণ যন্ত্রের যাহায্যে নলের কর্তিত অংশের ব্যাস বের করি। ব্যাসকে দুই দ্বারা ভাগ করে ব্যাসার্ধ নির্ণয় করি। পরিশেষে কক্ষ তাপমাত্রায় পানির ঘনত্ব জেনে নিই।

হিসাব ও গণনা :

ধরি,

সূচকের দৈর্ঘ্য	=	l m
অণুবীক্ষণ যন্ত্রের দুই পাঠের পার্থক্য	=	x m
নলের ব্যাসার্ধ	=	r m
কক্ষ তাপমাত্রায় পানির ঘনত্ব	=	ρ kg m^{-3}
অভিকর্ষজ ত্বরণ	=	g ms^{-2}
পানিস্তম্ভের উচ্চতা	h =	$(l + x)$ m

নির্ণেয় পৃষ্ঠ টান,

$$T = \frac{\rho r g}{2}\left(h + \frac{1}{3}r\right) = \frac{\rho r g}{2}\left(h + \frac{1}{3}r\right) \text{ N m}^{-1}$$

১০·১১ তরলের পৃষ্ঠ টানের উপর প্রভাবকারী বিষয়
Factors affecting surface tension of a liquid

তরলের পৃষ্ঠ টান মোটামুটিভাবে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো দ্বারা প্রভাবিত হয়।

(i) **দূষিতকরণ (Contamination) :** তরল যদি চর্বি, তেল প্রভৃতি দ্বারা দূষিত হয়, তবে তরলের পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায়।

(ii) **দ্রবীভূত বস্তুর উপস্থিতি (Presence of dissolved substances) :** তরলে কোন বস্তু দ্রবীভূত থাকলে তরলের পৃষ্ঠ টান পরিবর্তিত হয়। তরলে **অজৈব** পদার্থ দ্রবীভূত থাকলে পৃষ্ঠ টান বৃদ্ধি পায়, কিন্তু **জৈব** পদার্থ দ্রবীভূত থাকলে পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায়।

(iii) **তাপমাত্রা (Temperature) :** তরলের পৃষ্ঠ টান প্রভূতভাবে তাপমাত্রার উপর নির্ভরশীল। সাধারণভাবে তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে তরলের পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায় এবং তাপমাত্রা হ্রাস পেলে তরলের পৃষ্ঠ টান বৃদ্ধি পায়। শুধু গলিত তামা ও ক্যাডমিয়ামের ক্ষেত্রে ব্যতিক্রম পরিলক্ষিত হয়। তাপমাত্রা পরিবর্তনের পাল্লা কম হলে পৃষ্ঠ টান এবং তাপমাত্রার মধ্যকার সম্পর্ক নিম্নলিখিত সমীকরণে ব্যক্ত করা যায়।

$$\boxed{T_t = T_0(1 - \alpha t)} \qquad (13)$$

এখানে T_t = t°C তাপমাত্রায় তরলের পৃষ্ঠ টান, T_0 = 0°C তাপমাত্রায় তরলের পৃষ্ঠ টান এবং α = তরলের পৃষ্ঠ টানের তাপমাত্রা গুণাঙ্ক।

উল্লেখ্য, যে তাপমাত্রায় কোন একটি তরলের পৃষ্ঠ টান শূন্য হয়, তাকে সঙ্কট তাপমাত্রা (Critical temperature) **বলে।**

(iv) **তরলের উপর অবস্থিত মাধ্যম (Medium above the liquid) :** তরলের উপর অবস্থিত মাধ্যমের প্রকৃতির উপর তরলের পৃষ্ঠ টান নির্ভর করে। পানির সাথে জলীয় বাষ্পের সংস্পর্শ থাকলে পানির পৃষ্ঠ টান প্রায় 70×10^{-3} Nm^{-1} হয়, আর পানির সাথে বায়ুর সংস্পর্শ থাকলে, পানির পৃষ্ঠ টান প্রায় 72×10^{-3} Nm^{-1} হয়।

(v) **তরলের মুক্ত তলের সাথে অন্য কোন বস্তুর উপস্থিতি (Presence of other bodies in contact with the free surface of the liquid) ঃ** তরলের মুক্ত তলের সাথে অন্য কোন বস্তুর সংযুক্তি হলে পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায়।

(vi) **তড়িতাহিতকরণ (Electrification) ঃ** তরল তড়িতাহিত হলে পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায়। কেননা তড়িতাহিত হবার ফলে তরল পৃষ্ঠে বহির্মুখী চাপ ক্রিয়া করে। এর ফলে তরল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় যা পৃষ্ঠ টান জনিত সঙ্কোচন প্রবণতার বিপরীতে ক্রিয়া করে। কাজেই পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায়।

১০·১২ পৃষ্ঠ টান সম্পর্কিত কয়েকটি ঘটনা
Some phenomena regarding surface tension

দৈনন্দিন জীবনের কতকগুলো বাস্তব ঘটনা তরলের পৃষ্ঠ টানের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায়।

(ক) সূঁচ পানিতে ভাসা (Floating of needle on water) ঃ পানির উপরিতলে একটি পাতলা কাগজ রেখে তার উপর গ্রীজ মাখানো একটি সূঁচ স্থাপন করলে দেখা যাবে কাগজ পানিতে ডুবে গেছে, কিন্তু সূঁচ পানিতে ভাসছে, তবে পানির তল নিচের দিকে কিছু বেঁকে গেছে। মনে হয় তরল তলের যেন একটি স্থিতিস্থাপক চামড়া আছে। তরলের T-এর দরুন সূঁচের উপর মোট উর্ধ্বমুখী বল F সূচের ওজন W-এর সমান অর্থাৎ, $F = W$

(খ) তেল ঢেলে সমুদ্রের পানিকে শান্ত করা (Calming of sea water by oil) ঃ অনেক সময় সমুদ্রের উত্তাল তরঙ্গকে শান্ত করার জন্য সমুদ্রের পানিতে তেল ঢেলে দেয়া হয়। বাতাস দ্রুত প্রবাহিত হওয়ায় তেল সামনের দিকে অগ্রসর হতে থাকে আর পরিষ্কার পানি পিছনের দিকে থেকে যায়। সামনের দিকে পানি দূষিত হওয়ায় পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায়, পক্ষান্তরে পিছনের দিকের বিশুদ্ধ পানির পৃষ্ঠ টান অধিক হেতু ঢেউ অধিক উঁচুতে উঠতে পারে না।

(গ) কর্পূরের পানিতে নাচা (Dancing of camphor on water) ঃ এক টুকরা কর্পূরকে পানির উপরে রাখলে একে ইতঃস্তত বিক্ষিপ্তভাবে নড়াচড়া করতে দেখা যায়। কারণস্বরূপ বলা যেতে পারে কর্পূরের টুকরা সর্বত্র সমানভাবে দ্রবীভূত হয় না, কোথাও বেশি আবার কোথাও কম। কর্পূর পানিকে দূষিত করে। যে স্থানে কর্পূর বেশি পরিমাণে দ্রবীভূত হয়, সেই স্থানের পানি বেশি দূষিত হয় ; ফলে পৃষ্ঠ টান অধিক কমে। আর যে স্থানে কর্পূর কম পরিমাণে দ্রবীভূত হয়, সে স্থানে পানি অপেক্ষাকৃত কম দূষিত। ফলে পৃষ্ঠ টান কম হ্রাস পায়। পৃষ্ঠ টানের এই তারতম্য ভেদে কর্পূরের উপর অসম বল ক্রিয়া করায় তা লব্ধি বলের দিকে নড়াচড়া করতে থাকে।

(ঘ) পানির উপর তেল ছড়িয়ে পড়া (Spreading of oil on water surface) ঃ পানির উপর অল্প পরিমাণ তেল ঢাললে তা পানির উপরিতলে ছড়িয়ে পড়ে। কারণস্বরূপ বলা যায় বিশুদ্ধ পানির পৃষ্ঠ টান তেলের পৃষ্ঠ টান অপেক্ষা বেশি। ফলে তেলের উপরে একটি টান পড়ে। ফলে তেল পানির উপর ছড়িয়ে পড়ে।

(ঙ) কলমের নিবে কালি প্রবাহ (Flow of ink through the nib of a pen) ঃ আমরা জানি প্রত্যেক কলমের নিবে একটি গর্ত থাকে এবং এই গর্ত হতে নিবের মুখ পর্যন্ত একটি চেরা দাগ আছে। চেরা দাগের মাঝখানটা কৈশিক নলের মত আচরণ করে। নিবের মধ্যে কালি জমা হলে সেই কালি ঐ চেরা দাগ বেয়ে নিচের মুখ ও ডগা পর্যন্ত প্রবাহিত হয়।

(চ) ছাতার কাপড় (Cloth of umbrella) ঃ ছাতা বা তাঁবুর কাপড় বিশেষ প্রক্রিয়ায় প্রস্তুত। এতে ছিদ্র আছে। এই ছিদ্রগুলো খুবই ছোট। এদের মধ্যে দিয়ে বায়ু চলাচল করতে পারে কিন্তু পানি ঢুকতে পারে না। পানির পৃষ্ঠ টানই এর কারণ। পৃষ্ঠ টানের দরুন পানি গোলাকার বিন্দুতে পরিণত হয় এবং কাপড়ের উপর দিয়ে গড়িয়ে চলে। উল্লেখ্য বৃষ্টিতে ভিজা ছাতার ভিতরের পৃষ্ঠ স্পর্শ করলে ঐ স্থানের পৃষ্ঠ টান হ্রাস পাবে এবং পানি ছাতার ভিতরে ঢুকবে।

১০·১৩ প্রবাহী ও প্রবাহীর প্রবাহ
Fluid and fluid motion

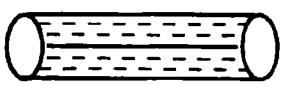
তরল এবং গ্যাসকে মিলিতভাবে প্রবাহী বলে। প্রবাহীর প্রবাহ মূলত দুভাগে বিভক্ত, যথা—

(ক) শান্ত প্রবাহ বা **অব্যাহত প্রবাহ** বা **ধারারেখ** বা **সমরেখ প্রবাহ** (Stream line motion) এবং

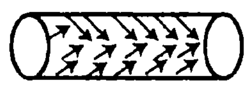
(খ) অশান্ত প্রবাহ বা **ব্যাহত প্রবাহ** বা **বিক্ষিপ্ত প্রবাহ** (Turbulent motion)।

প্রবাহীর বিভিন্ন অণুগুলো যদি তার গতিপথের সাথে সমান্তরালভাবে চলে, তবে সেই প্রবাহকে শান্ত প্রবাহ বলে [চিত্র ১০.১২ ক]।

প্রবাহীর বিভিন্ন অণুগুলো যদি তার গতিপথের সাথে সমান্তরালভাবে না চলে, তবে সেই প্রবাহকে অশান্ত প্রবাহ বলে [চিত্র ১০.১২ খ]। অশান্ত প্রবাহের ক্ষেত্রে প্রবাহীর গতিপথে ঘূর্ণী (eddies) এবং আবর্তের (vortices) সৃষ্টি হয়।



শান্ত প্রবাহ
(ক)



অশান্ত প্রবাহ
(খ)

চিত্র ১০.১২

প্রবাহীর বেগ একটি নির্দিষ্ট সীমা অতিক্রম না করলে তার শান্ত বা ধারারেখ প্রবাহ বজায় থাকে। গতিবেগ ঐ নির্দিষ্ট সীমা অতিক্রম করলে প্রবাহ আর ধারারেখ থাকবে না। গতিবেগের এই নির্দিষ্ট সীমাকে সঙ্কট বেগ বলে।

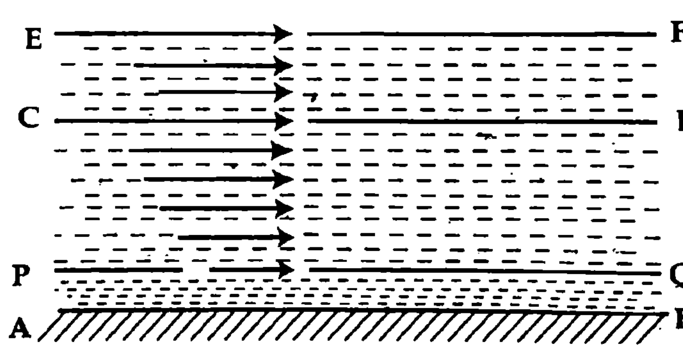
প্রবাহীর সেই সর্বাধিক বেগ যা অতিক্রম করলে ধারারেখ প্রবাহ বিক্ষিপ্ত প্রবাহে পরিণত হয়, তাকে সঙ্কট বেগ বা প্রান্তিক বেগ বা সন্ধি বেগ (critical velocity) **বলে।**

একে সাধারণত 'v_c' দ্বারা সূচিত করা হয়।

১০·১৪ সান্দ্রতা
Viscosity

সান্দ্রতা পদার্থের একটি বিশেষ ধর্ম। কেবল তরল ও বায়বীয় পদার্থেরই এই ধর্ম আছে। অতএব এটি তরল ও বায়বীয় পদার্থের সাধারণ ধর্ম। তবে এটি কি রকমের ধর্ম তাই আলোচ্য বিষয়।

কোন একটি স্থির অনুভূমিক তলের উপর দিয়ে কোন একটি প্রবাহী ধারারেখ প্রবাহে চলতে থাকলে প্রবাহীর যে স্তর স্থির তল হতে অধিক দূরে অবস্থিত এর বেগ বেশি, যে স্তর স্থির তলের সাথে সংলগ্ন এর বেগ শূন্য। মনে করি AB একটি স্থির তল। এর উপর দিয়ে একটি প্রবাহী ধারারেখ প্রবাহে চলছে। PQ, CD এবং EF প্রবাহীর তিনটি স্তর [চিত্র ১০.১৩]। PQ স্থির তল সংলগ্ন, CD একটু দূরে এবং EF অধিক দূরে অবস্থিত। তাদের মধ্যে EF স্তরের বেগ বেশি, CD স্তরের বেগ এটি অপেক্ষা কম এবং PQ স্তরের বেগ শূন্য। এর কারণ উপরের স্তর নিচের স্তরগুলোকে তাদের সাথে সমবেগে টেনে নিয়ে যাবার চেষ্টা করে। অর্থাৎ গতিশীল প্রবাহীর পাশাপাশি দুটি স্তরের মধ্যে এক ধরনের অভ্যন্তরীণ বল সৃষ্টি হয়। এই বল পাশাপাশি দুটি স্তরের মধ্যে বেশি বেগসম্পন্ন স্তরের বেগ কমিয়ে এবং কম বেগসম্পন্ন স্তরের বেগ বাড়িয়ে স্তর দুটির মধ্যে আপেক্ষিক বেগ কমাতে চেষ্টা করে। স্তর দুটির পৃষ্ঠদেশের সমান্তরালে ক্রিয়াশীল এই বলকে **সান্দ্রতা বল** (Viscous force) বলা হয় এবং প্রবাহীর এই ধর্মকে **সান্দ্রতা** (Viscosity) বলে।



চিত্র ১০.১৩

সংজ্ঞা : যে ধর্মের দরুন প্রবাহী তার অভ্যন্তরস্থ বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক বেগ রোধ করার চেষ্টা করে তাকে ঐ প্রবাহীর সান্দ্রতা বলে।

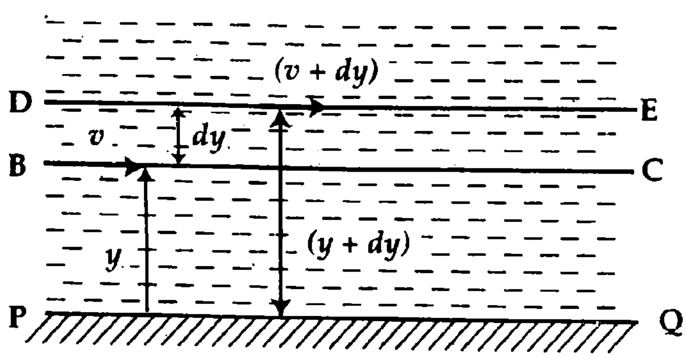
অথবা, **যে ধর্মের ফলে তরল তার বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতির বিরোধিতা করে তাকে তরলের সান্দ্রতা বলে।**

বিভিন্ন প্রবাহীর সান্দ্রতা বিভিন্ন। যেমন দুধ, তেল এবং আলকাতরার সান্দ্রতা এক নয়। এদের মধ্যে আলকাতরার সান্দ্রতা সর্বাপেক্ষা বেশি, তারপর তেল এবং সর্বাপেক্ষা কম দুধের।

সান্দ্রতাকে কখনও কখনও প্রবাহীর আঠাত্বতা বলা হয়। আবার কেউ কেউ সান্দ্রতাকে প্রবাহীর অন্তরীণ ঘর্ষণ বলে। কারণ সান্দ্রতা বলের স্বরূপ অনেকটা ঘর্ষণের ন্যায়। ঘর্ষণ দুটি কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক গতিকে বাধা দেয় আর সান্দ্রতা প্রবাহীর বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতিকে বাধা দেয়। স্থির প্রবাহীর ক্ষেত্রে এটি ক্রিয়া করে না। ঘর্ষণ স্পর্শ-তলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে না, তবে সান্দ্রতা প্রবাহীর তলদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে। অধিকন্তু সান্দ্রতা প্রবাহীর স্তরের বেগ এবং স্থির তল হতে তার দূরত্বের উপর নির্ভর করে।

১০·১৫ সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতাঙ্ক বা সান্দ্রতা সহগ
Co-efficient of viscosity

মনে করি, PQ একটি স্থির তল। এর উপর দিয়ে একটি প্রবাহী ধারারেখ প্রবাহে চলছে। এই প্রবাহীর দুটি স্তর বিবেচনা করি। একটি BC এবং অপরটি DE। মনে করি স্থির তল হতে BC স্তর y এবং DE স্তর $(y + dy)$ দূরে অবস্থিত। ধরি BC স্তরের বেগ v এবং DE স্তরের বেগ $(v + dv)$ [চিত্র ১০·১৪]।



চিত্র ১০·১৪

দুই স্তরের বেগের পার্থক্য $= v + dv - v = dv$ এবং দূরত্বের পার্থক্য $= y + dy - y = dy$। তা হলে দেখা যাচ্ছে যে, dy দূরত্ব পার্থক্যের জন্য বেগের পার্থক্য dv।

দূরত্ব সাপেক্ষে বেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{dv}{dy}$। একে বেগ **অবক্রম বা গতিবেগের নতিমাত্রা** (velocity gradient) বলে। বিজ্ঞানী নিউটনের অভিমত অনুসারে ধারারেখ প্রবাহের ক্ষেত্রে,

(i) সান্দ্রতা বল ক্ষেত্রফলের সমানুপাতিক।

অর্থাৎ $F \propto A$

(ii) সান্দ্রতা বল বেগ অবক্রমের সমানুপাতিক।

অর্থাৎ $F \propto \frac{dv}{dy}$

আমরা পাই,

$F \propto A \times \frac{dv}{dy}$

বা, $F = \text{ধ্রুবক} \times A \frac{dv}{dy}$

বা, $\boxed{F = \eta . A . \frac{dv}{dy}}$ (14)

এখানে η (eta) একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। একে **সান্দ্রতা গুণাঙ্ক** বলে। এখন, ভাষায় এর সংজ্ঞা দিতে,

ধরি, $A = 1$ (একক) এবং বেগ অবক্রম, $\frac{dv}{dy} = 1$

সমীকরণ (14) হতে পাই, $F = \eta$

সংজ্ঞা ঃ একক বেগ অবক্রমে কোন একটি প্রবাহীর একক ক্ষেত্রফলের উপর যে পরিমাণ সান্দ্রতা বল ক্রিয়া করে, তাকে ঐ প্রবাহীর সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বলে। এই বল প্রবাহীর স্তরের স্পর্শক বরাবর ক্রিয়া করে।

অথবা, তরলে গতিবেগের একক নতিমাত্রা বজায় রাখতে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে যে স্পর্শিনী বল প্রয়োজন তাকে ঐ তরলের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা সান্দ্রতাঙ্ক বা সান্দ্রতা সহগ বলে।

সান্দ্রতা গুণাঙ্কের মাত্রা সমীকরণ (Dimension of co-efficient of viscosity)

$$F = \eta . A . \frac{dv}{dy}$$

$$\text{বা, } \eta = \frac{F}{A}\frac{dy}{dv}$$

মাত্রা সমীকরণ

$$[\eta] = \left[\frac{\text{বল} \times \text{দূরত্ব}}{\text{ক্ষেত্রফল} \times \text{বেগ}}\right] = \left[\frac{MLT^{-2} \times L}{L^2 \times L/T}\right] = \left[\frac{MLT^{-2} \times L \times T}{L^3}\right] = \boxed{[ML^{-1}T^{-1}]}$$

সান্দ্রতা গুণাঙ্কের একক (Unit of co-efficient of viscosity)

এম. কে. এস. এবং এস. আই. (S.I.) পদ্ধতিতে সান্দ্রতা গুণাঙ্কের একক নিউটন-সে./মিটার^2 (Nsm^{-2})। অনেক ক্ষেত্রে সান্দ্রতার একক হিসেবে পয়েজ (Poise) ব্যবহার করা হয়। 10 poise = 1 নিউটন-সে./মিটার^2।

সান্দ্রতা গুণাঙ্ক 1 Nsm^{-2} বলতে বুঝা যায় যে, 1 m^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুটি প্রবাহী স্তর পরস্পর হতে 1 m দূরে অবস্থিত হলে তাদের মধ্যে 1 ms^{-1} আপেক্ষিক বেগ বজায় রাখতে 1 N বল প্রযুক্ত হয়।

সান্দ্রতাঙ্ককে অনেক সময় **গতীয় সান্দ্রতাঙ্ক** (dynamic viscosity) বলা হয়।

গতীয় সান্দ্রতাঙ্ককে তরলের ঘনত্ব ρ দিয়ে ভাগ করলে **কাইনেমেটিক সান্দ্রতার** (kinematic viscosity) সংজ্ঞা পাওয়া যায়। অর্থাৎ, কাইনেমেটিক সান্দ্রতা $= \frac{\eta}{\rho}$। **এস. আই** (S. I.) একক হবে **মিটার^2/সে.** ($m^2 s^{-1}$)।

15°C তাপমাত্রায় নিম্নলিখিত কয়েকটি নিউটনীয় তরলের সান্দ্রতা গুণাঙ্কের মান দেয়া হল—

তরল	সান্দ্রতা গুণাঙ্ক (Nsm^{-2})
পানি	1.1×10^{-3}
ইথার	0.2×10^{-3}
গ্লিসারিন	1.5×10^{-3}
বেন্‌জিন	0.7×10^{-3}
পারদ	1.5×10^{-3}

ক্ষণস্থায়ী স্থিতিস্থাপকতা (Fugitive Elasticity) (কৃন্তন গুণাঙ্ক এবং সান্দ্রতাঙ্কের সাদৃশ্য) ঃ

আমরা জানি,

$$\text{সান্দ্রতা গুণাঙ্ক, } \eta = \frac{F/A}{dv/dy} = \frac{\text{স্পর্শীয় পীড়ন}}{\text{বেগ অবক্রম}}$$

$$\text{পুনঃ, দৃঢ়তা গুণাঙ্ক, } n = \frac{F/A}{d/D} = \frac{\text{স্পর্শীয় পীড়ন}}{\text{সরণ অবক্রম}}$$

উক্ত দুটি রাশিমালার মধ্যে একটি সাদৃশ্য পরিলক্ষিত হয়। এই সাদৃশ্য লক্ষ করে বিজ্ঞানী **ম্যাক্সওয়েল (Maxwell)** বলেন কঠিন বস্তুর ন্যায় প্রবাহীও কিছুটা দৃঢ়তার অধিকারী। কিন্তু কৃন্তন পীড়নের অভাবে প্রবাহীর এই দৃঢ়তা পর পর ভেঙ্গে যায়। খুব অল্প সময়ের জন্য এই দৃঢ়তা দেখা যায় ; এর পরই অদৃশ্য হয়।

প্রবাহীর এই ক্ষণস্থায়ী দৃঢ়তাকে ক্ষণস্থায়ী স্থিতিস্থাপকতা বলে।

১০·১৬ ঘর্ষণের সাথে সান্দ্রতার সাদৃশ্য

Similarity of viscosity with friction

আমরা জানি একটি বস্তু যখন অন্য একটি বস্তুর উপর দিয়ে গতিশীল হয় বা গতিশীল হতে চেষ্টা করে তখন বস্তু দুটির মিলন তলে বস্তুর গতির বিপরীত দিকে একটি বাধাদানকারী বল ক্রিয়া করে। এই বলের নাম ঘর্ষণ বা ঘর্ষণ বল। তেমনি কোন একটি প্রবাহী তার বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক গতির বিরোধিতা করে যে বল প্রয়োগ করে তাকে ঐ প্রবাহীর সান্দ্রতা বলে। ঘর্ষণের ক্ষেত্রে একটি গুণাঙ্ক রয়েছে তার নাম ঘর্ষণ গুণাঙ্ক যা ঘর্ষণ এবং অভিলম্ব প্রতিক্রিয়ার অনুপাত অর্থাৎ,

$\mu = \frac{F}{R}$, এখানে F = ঘর্ষণ বল এবং R = অভিলম্ব প্রতিক্রিয়া। তেমনি সান্দ্রতার ক্ষেত্রে একটি গুণাঙ্ক রয়েছে। তার নাম সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বা প্রবাহীর একক ক্ষেত্রের উপর সান্দ্রতা বল এবং বেগ অবক্রমের অনুপাত অর্থাৎ,

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dy}$$

১০·১৭ পতনশীল বস্তুর উপর তরল বা গ্যাসের সান্দ্রতার প্রভাব স্টোক্‌স-এর সূত্র এবং সমীকরণ

Effect of viscosity of liquid or gas on falling bodies : Stokes' law and Stokes' equation

সূচনা ঃ আমরা জানি পড়ন্ত বস্তু অভিকর্ষ বলের প্রভাবে নিচের দিকে পড়ে। সুতরাং যখন কোন বস্তু তরল বা গ্যাসের মধ্য দিয়ে নিচে পড়তে থাকে, তখন তরল বা গ্যাসের যে স্তরগুলো বস্তুর সংস্পর্শে আসে, তাদেরকেও তা নিজের সাথে টেনে নিয়ে চলে। ফলে তরল বা গ্যাসের বিভিন্ন স্তরের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ সৃষ্টি হয়। কিন্তু তরল বা গ্যাসের সান্দ্রতা ঐ আপেক্ষিক গতিকে মন্দীভূত করার চেষ্টা করে। পড়ন্ত বস্তুর আকার যদি ছোট হয় তাহলে পড়ার স্বল্প সময়ের মধ্যে অভিকর্ষ বল এবং সান্দ্রতাজনিত বিপরীতমুখী বলের মান সমান হবে। তখন আর বস্তুর কোন ত্বরণ থাকবে না। কিন্তু গতি জড়তার দরুন বস্তু স্থির বেগে পড়তে থাকবে। এই বেগকে **প্রান্তিক বেগ** (Terminal velocity) বলে।

স্টোক্‌স এর সূত্র (Stokes' Law) ঃ বিজ্ঞানী স্টোক্‌স প্রমাণ করেন যে, r ব্যাসার্ধের ক্ষুদ্রাকার গোলক η সান্দ্রতা গুণাঙ্কের কোন তরল বা গ্যাসের মধ্য দিয়ে v প্রান্তিক বেগে পড়তে থাকলে বস্তুর উপর সান্দ্রতাজনিত ঊর্ধ্বমুখী বল ক্রিয়া করে। ধরি এই বল F। এই বল

$F \propto$ সান্দ্রতা গুণাঙ্ক, η

$F \propto$ বস্তুর ব্যাসার্ধ r,

এবং $F \propto$ প্রান্তিক বেগ, v

$F \propto \eta r v$

বা, $F = K\eta r v$ (15)

এখানে K একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। তরল গতিবিজ্ঞানের সাহায্যে স্টোক্‌স প্রমাণ করেন যে $K = 6\pi$

$\therefore$ সমীকরণ (15) হতে পাই

$$\boxed{F = 6\pi\eta r v} \quad (16)$$

এই সমীকরণটি স্টোক্‌স-এর সূত্র নামে খ্যাত।

স্টোক্‌সের প্রান্তিক বেগের সমীকরণ ঃ মনে করি, গোলকটির উপাদানের ঘনত্ব ρ এবং মাধ্যমের ঘনত্ব σ তাহলে গোলকের উপর অভিকর্ষ বল,

F = বস্তুর ওজন = ভর $\times$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

= আয়তন $\times$ ঘনত্ব $\times$ অভিকর্ষজ ত্বরণ

$= V \times \rho \times g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$; (এখানে V = গোলকের আয়তন)

আর্কিমিডিস-এর সূত্রানুসারে গোলক কর্তৃক হারানো ওজন

= মাধ্যম কর্তৃক প্রযুক্ত উর্ধ্বমুখী বল $= \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma g$

গোলকের উপর কার্যকরী নিম্নমুখী বল অর্থাৎ কার্যকরী ওজন,

$$F = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^2 \sigma g = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \sigma) g \qquad (17)$$

যখন সান্দ্রতাজনিত উর্ধ্বমুখী বল এবং গোলকের কার্যকরী ওজন সমান হবে তখনই বস্তু প্রান্তিক বেগে পড়তে থাকবে।

আমরা পাই, $6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \sigma) g$

বা, $$\boxed{v = \frac{2r^2}{9}\frac{(\rho - \sigma) \times g}{\eta}} \qquad (18)$$

একেই স্টোক্সের প্রান্তিক বেগের সমীকরণ বলা হয়।

১০·১৮ মাত্রিক পদ্ধতিতে স্টোক্স-এর সূত্র প্রতিপাদন
Derivation of Stokes' law by dimensional analysis

ধরি r ব্যাসার্ধের একটি ক্ষুদ্র গোলাকার বস্তু η সান্দ্রতা গুণাঙ্কবিশিষ্ট একটি সান্দ্র মাধ্যমের মধ্যে ছেড়ে দেয়ায় বস্তুটি কোন এক মুহূর্তে v প্রান্তিক বেগ লাভ করলে সান্দ্রতার জন্য পশ্চাৎমুখী বল বা ঘর্ষণ বল F হবে

$$F = K\eta^x r^y v^z \qquad (19)$$

এখানে K = একটি মাত্রিক ধ্রুব। x, y ও z-এর মান বের করতে হবে।

সমীকরণ (19)-এ F, η, r ও v-এর মাত্রিক মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$[MLT^{-2}] = K[ML^{-1}T^{-1}]^x, [L]^y \quad [LT^{-1}]^z$$

বা, $[M^1][L^1][T^{-2}] = K[M]^x \; [L]^{y+z-x} \; [T]^{-(x+z)}$

উভয় পক্ষের [M], [L] ও [T]-এর ঘাত সমান হবে হেতু তুলনা করে লেখা যায়,

$x = 1, y + z - x = 1$ ও $x + z = 2$

সমীকরণ তিনটি সমাধান করে পাওয়া যায়, $x = 1, y = 1$ ও $z = 1$.

সমীকরণ (19)-এ x, y ও z-এর মান বসিয়ে লেখা যায়, $F = K\eta r v$

স্টোকস গাণিতিকভাবে প্রমাণ করেন যে, $K = 6\pi$

$$F = 6\pi\eta r v \qquad (20)$$

এটিই হল মাত্রিক পদ্ধতিতে স্টোক্স সূত্রের প্রতিপাদন।

১০·১৯ স্টোক্স-এর পদ্ধতিতে তরলের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক নির্ণয়
Determination of co-efficient of viscosity of a liquid by Stokes' method

গ্লিসারিন, সরিষার তেল, রেড়ির তেল প্রভৃতি সান্দ্র তরলের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য স্টোকস পদ্ধতি শ্রেয়। পদ্ধতিটির তত্ত্ব ও কার্যপদ্ধতি নিম্নে বর্ণিত হল।

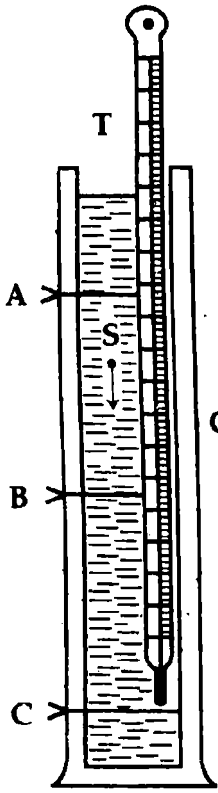
তত্ত্ব (Theory) : 'r' ব্যাসার্ধ এবং ρ ঘনত্বের একটি ক্ষুদ্র গোলক η সান্দ্রতাঙ্ক ও σ ঘনত্বের একটি মাধ্যমের মধ্য দিয়ে v প্রান্তিক বেগে পড়তে থাকলে স্টোক্স-এর সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho - \sigma)g}{\eta}$$

বা, $\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho - \sigma)g}{v}$ (21)

উক্ত সমীকরণ হতে r, ρ, σ, g এবং v-এর মান জেনে η-এর মান বের করা যায়।

পরীক্ষা : এই পরীক্ষায় G কাচের তৈরি একটি লম্বা পাত্র [চিত্র ১০.১৫]। এর দৈর্ঘ্য প্রায় 70 cm এবং ব্যাস 10 cm। পাত্রটিকে পরীক্ষাধীন তরলে ভর্তি করি। এখন পাত্রের উপর মুখ হতে 10 cm নিচে এবং নিচের মুখ হতে 10 cm উপরে পাত্রের গায়ে যথাক্রমে A ও C দুটি দাগ দেই এবং AC-এর মধ্যবর্তী দূরত্বকে B দাগ কেটে সমান দুভাগে ভাগ করি যাতে AB = BC হয়। 2 cm-এর কম ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ইস্পাতের গোলক নিয়ে পরীক্ষাধীন তরলে ভিজাই এবং পাত্রের অক্ষ বরাবর তরলের মধ্যে ছেড়ে দেই। একটি স্টপ্ ঘড়ির সাহায্যে AB এবং BC দূরত্ব অতিক্রম করতে গোলকটির প্রয়োজনীয় সময় বের করি। পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গেছে যে, গোলকটি উভয় দূরত্ব সমান সময়ে অতিক্রম করবে।



চিত্র ১০.১৫

অর্থাৎ গোলকটি প্রান্তিক বা সীমান্ত বেগ প্রাপ্ত হয়েছে। যদি AC = l হয় এবং ঐ দূরত্ব অতিক্রম করতে t সময় লাগে তবে প্রান্তিক বেগ,

$$v = \frac{l}{t} \tag{22}$$

এখন v-এর মান সমীকরণ (21)-এ স্থাপন করে পাই,

$$\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho - \sigma)\times g}{l/t}$$

বা, $\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2 g t(\rho - \sigma)}{l}$ (23)

এখন r, g, t, l, ρ এবং σ-এর মান জেনে η-এর মান পাওয়া যায়।

১০.২০ সান্দ্রতার উপর তাপমাত্রার প্রভাব
Effect of temperature on co-efficient of viscosity

(১) তরল পদার্থ :

সান্দ্রতার উপর তাপমাত্রার প্রভাব রয়েছে। তরল পদার্থের ক্ষেত্রে পরীক্ষালব্ধ ফলাফলে দেখা যায় যে **তাপমাত্রা বাড়ালে সান্দ্রতা হ্রাস পায়।** উদাহরণস্বরূপ বলা যায় 80°C তাপমাত্রায় পানির সান্দ্রতা গুণাঙ্ক 0°C তাপমাত্রার পানির সান্দ্রতার গুণাঙ্কের এক-তৃতীয়াংশ মাত্র।

আণবিক তত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা : আমরা জানি যে তরলে বিভিন্ন বেগে প্রবহমান পাশাপাশি দুটি স্তরের মধ্যে এক ধরনের বিপরীতমুখী বা পশ্চাদ্বর্তী (dragging) স্পর্শক (tangential) বল ক্রিয়া করে। এ বলকে **সান্দ্র বল** বলা হয়। দুটি স্তরের অণুর মধ্যে আন্তঃআণবিক বলের কারণে এই সান্দ্র বলের সৃষ্টি হয়। সান্দ্র বল আন্তঃআণবিক দূরত্বের উপর নির্ভরশীল। তরলের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে আন্তঃআণবিক দূরত্ব বাড়ে, ফলে আন্তঃআণবিক বলের মান কমে [চিত্র ৯.১ দ্রষ্টব্য]। এর ফলে সান্দ্র বল কমে। সান্দ্র বল কম হলে সমীকরণ (14) অনুসারে সান্দ্রতার গুণাঙ্কও কম হবে। তাপমাত্রার এবং সান্দ্রতার গুণাঙ্কের মধ্যে নিম্নরূপ সম্পর্ক রয়েছে :

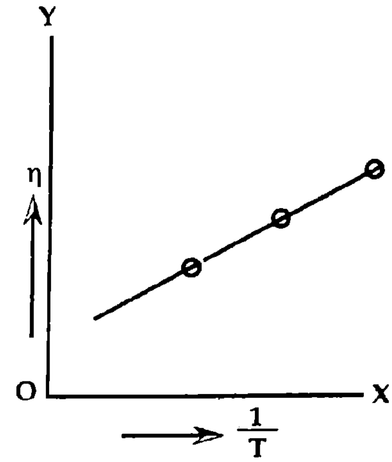
$$\log \eta = A + \frac{B}{T} \tag{24}$$

এখানে A ও B ধ্রুবক এবং T কেলভিন তাপমাত্রা। এখন $\log \eta$ বনাম $\frac{1}{T}$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করলে একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ১০.১৬]।

BG & JEWEL

(২) **গ্যাস ঃ** তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে তরলের সান্দ্রতার উপর যে প্রভাব পরিলক্ষিত হয়, গ্যাসের ক্ষেত্রে তার বিপরীত প্রভাব দেখা যায়। গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গেছে যে **গ্যাসের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক তার পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক।** অর্থাৎ $\eta \propto \sqrt{T}$

গতিতত্ত্বের সাহায্যে ব্যাখ্যা ঃ গ্যাসের গতিতত্ত্ব (Kinetic theory of gases) থেকে এর ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। আমরা জানি যে, গ্যাসের অণুগুলো সবদিকেই এলোমেলোভাবে চলাচল করতে পারে এবং এদের মধ্যে সংঘর্ষ ঘটে। গ্যাস অণুগুলোর মধ্যে দূরত্ব তরলের তুলনায় অনেক বেশি হওয়ায় আন্তঃআণবিক বল নেই বললেই চলে। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে অণুসমূহের গড় বেগ বৃদ্ধি পায়, ফলে সংঘর্ষও বাড়ে। সংঘর্ষ বাড়ার কারণে বিভিন্ন স্তরের প্রবাহে বাধার পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। গড়বেগ ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক নিম্নরূপ ঃ



চিত্র ১০.১৬

$$\boxed{c \propto \sqrt{T}} \quad (25)$$

গ্যাসের গতিতত্ত্ব অনুসারে গ্যাসের সান্দ্রতা গ্যাস অণুগুলোর গড় বেগের সমানুপাতিক। অর্থাৎ

$$\boxed{\eta \propto c} \quad (26)$$

সমীকরণ (25) ও সমীকরণ (26) থেকে আমরা পাই,

$$\boxed{\eta \propto c \propto \sqrt{T}}$$

সুতরাং, $\boxed{\eta \propto \sqrt{T}}$

$$\text{বা, } \eta = K\sqrt{T} \quad (27)$$

এখানে T, কেলভিন তাপমাত্রা এবং K ধ্রুবক।

১০.২১ সান্দ্রতার উপর চাপের প্রভাব
Effect of pressure on viscosity

তরলের সান্দ্রতার উপর চাপের প্রভাব দেখা যায়। চাপ বৃদ্ধি পেলে সান্দ্রতা বাড়ে।

ব্যাখ্যা ঃ চাপ বৃদ্ধি পেলে আন্তঃআণবিক দূরত্ব কমে ফলে আন্তঃআণবিক বল বৃদ্ধি পায়। এর ফলে তরলের পাশাপাশি দুটি স্তরের আপেক্ষিক বেগ কমে যায়। অর্থাৎ সান্দ্রতা বেড়ে যায়।

কিন্তু গ্যাসের সান্দ্রতার উপর চাপের কোন প্রভাব নেই।

১০.২২ সান্দ্রতার প্রয়োজনীয়তা
Necessity of viscosity

(১) গতিশীল নৌকা, স্টীমার, লঞ্চ, জাহাজের উপর পানির এবং গতিশীল মোটর গাড়ি ও বিমানের উপর বায়ুর সান্দ্রতাজনিত বাধা লক্ষ করেই এ সমস্ত যন্ত্রের নক্সা তৈরি হয়।

(২) ফাউনটেন পেন কালির সান্দ্রতা ধর্মের উপর ভিত্তি করেই প্রস্তুত করা হয়।

(৩) শিরা-উপশিরা দিয়ে রক্তের চলাচল এই ধর্মের উপর হয়ে থাকে।

স্মরণিকা

পৃষ্ঠ টান ঃ তরলের পৃষ্ঠে একটি সরলরেখা কল্পনা করলে উক্ত রেখার প্রতি একক দৈর্ঘ্যে ঐ রেখার দুই পার্শ্বে তরলের পৃষ্ঠতলে এক অংশ অন্য অংশের উপরে যে স্পর্শক বল প্রয়োগ করে তাকেই পৃষ্ঠটান বলে।

পৃষ্ঠ শক্তি ঃ কোন একটি তরল তলের ক্ষেত্রফল এক একক বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ কাজ সাধিত হয় তাকে ঐ তরলের পৃষ্ঠ শক্তি বলে।

সংসক্তি বল ঃ একই পদার্থের বিভিন্ন অণুর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে সংসক্তি বা সংযুক্তি বল বলে।

আসঞ্জন বল ঃ বিভিন্ন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যে পারস্পরিক আকর্ষণ বলকে আসঞ্জন বল বলে।

আণবিক পাল্লা ঃ দুই অণুর ভিতর সংসক্তি বল সর্বাপেক্ষা বেশি যতদূর পর্যন্ত অনুভূত হয়, তাকে আণবিক পাল্লা বলে।

স্পর্শ কোণ ঃ কঠিন ও তরলের স্পর্শ বিন্দু হতে বক্র তরল তলে অঙ্কিত স্পর্শক কঠিন বস্তুর সাথে তরলের মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে স্পর্শ কোণ বলে।

কৈশিকতা ঃ কৈশিক নলের মধ্যে তরলের উত্থান বা পতনকে কৈশিকতা বলে।

পৃষ্ঠ টানের উপর তাপমাত্রার প্রভাব ঃ তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে তরলের পৃষ্ঠ টান হ্রাস পায়। শুধু গলিত তামা ও ক্যাডমিয়ামের ক্ষেত্রে ব্যতিক্রম পরিলক্ষিত হয়।

শান্ত প্রবাহ ঃ প্রবাহীর বিভিন্ন অণুগুলো যদি তার গতিপথের সাথে সমান্তরালভাবে চলে তবে সে প্রবাহকে শান্ত বা ধারারেখ প্রবাহ বলে।

অশান্ত প্রবাহ ঃ প্রবাহীর বিভিন্ন অণুগুলো যদি তার গতিপথের সাথে সমান্তরালভাবে না চলে, তবে সে প্রবাহকে অশান্ত প্রবাহ বলে।

সঙ্কট বেগঃ প্রবাহীর যে সর্বাধিক বেগ যা অতিক্রম করলে শান্ত প্রবাহ অশান্ত প্রবাহে পরিণত হয়,তাকে সংকট বেগ বলে।

সান্দ্রতা ঃ যে ধর্মের দরুন প্রবাহী তার অভ্যন্তরস্থ বিভিন্ন স্তরের আপেক্ষিক বেগ রোধ করার চেষ্টা করে তাকে ঐ প্রবাহীর সান্দ্রতা বলে।

সান্দ্রতাঙ্ক ঃ একক বেগ অবক্রমে কোন প্রবাহীর একক ক্ষেত্রফলের উপর যে পরিমাণ সান্দ্রতা বল ক্রিয়া করে তাকে ঐ প্রবাহীর সান্দ্রতাঙ্ক বা সান্দ্রতা গুণাঙ্ক বলে।

প্রান্তিক বেগ ঃ তরলের মধ্য দিয়ে পড়ন্ত বস্তুর ক্ষেত্রে অভিকর্ষ বল ও সান্দ্রতাজনিত বলের মান সমান হলে পড়ন্ত বস্তু স্থির বেগে পড়তে থাকে। এই বেগকে প্রান্তিক বেগ বলে।

সান্দ্রতার উপর তাপমাত্রার প্রভাব ঃ তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে তরলের সান্দ্রতা হ্রাস পায়। পক্ষান্তরে তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে গ্যাসের সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। গ্যাসের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক তার পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক অর্থাৎ $\eta \propto \sqrt{T}$

সান্দ্রতার উপর চাপের প্রভাব ঃ চাপ বৃদ্ধি পেলে তরলের সান্দ্রতা বৃদ্ধি পায়। তবে গ্যাসের সান্দ্রতার উপর চাপের কোন প্রভাব নেই।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

পৃষ্ঠটান, $T = \frac{F}{L}$ (1)

পৃষ্ঠশক্তি, $E = T$ (2)

পৃষ্ঠ টান, $T = \frac{\rho r g}{2\cos\theta}\left(h + \frac{1}{3}r\right)$ (3)

পৃষ্ঠ টান, $T = \frac{\rho r g}{2}\left(h + \frac{1}{3}r\right)$, এখানে $\theta = 0°$ (কাঁচ ও পানির ক্ষেত্রে) (4)

পৃষ্ঠ টান, $T = \frac{hr\rho g}{2}$, এখানে $\theta = 0°$ এবং r খুবই ক্ষুদ্র (5)

সান্দ্রতা বল, $F = \eta A \frac{dv}{dy}$ (6)

স্টোকস্ এর সূত্র, $F = 6\pi\eta r v$ (7)

প্রান্তিক বেগ, $v = \frac{2}{9}\frac{r^2(\rho - \sigma)g}{\eta}$ (8)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। পানির উপরিতল হতে 0·05 m লম্বা একটি অনুভূমিক তারকে টেনে তুলতে তারের ওজনসহ সর্বাধিক 7.28×10^{-3} N বলের প্রয়োজন হয়। পানির পৃষ্ঠ টান নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৬, ২০০৪; রা. বো..২০০১]

মনে করি পৃষ্ঠ টান = T

আমরা পাই, $T = \frac{F}{L}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে মানগুলোর সাপেক্ষে পাই,

$$T = \frac{7.28 \times 10^{-3} N}{2 \times 0.05 m} = 7.28 \times 10^{-2} N m^{-1}$$

এখানে, $F = 7.28 \times 10^{-3}$ N
$L = 2 \times 0.05$ m
যেহেতু তারের উভয় দিকে পানি আছে।

২। একটি কৈশিক নলের ব্যাস 0·2 mm। একে 72×10^{-3} Nm^{-1} পৃষ্ঠটান এবং 10^3 kgm^{-3} ঘনত্বের পানিতে ডুবালে নলের কত উচ্চতায় পানি উঠবে ? [ঢা. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০০ ; কু. বো. ২০০৪; য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

পৃষ্ঠ টান, $T = \frac{rh\rho g}{2}$

$$h = \frac{2T}{r\rho g} = \frac{2 \times 72 \times 10^{-3}}{10^{-4} \times 10^3 \times 9.8} = 0.1469 \text{ m}$$

এখানে,

$r = \frac{0.2}{2} = 0.1$ mm $= 10^{-4}$ m
$T = 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}
$\rho = 10^3$ kgm^{-3}
$g = 9.8$ ms^{-2}

৩। একটি কৈশিক নলের ব্যাস 0.04×10^{-4} m। এর এক প্রান্ত পানিতে ডুবালে পানি নলের ভিতর 0.082m উপরে ওঠে। পানির তল টান কত ? [স্পর্শ কোণ $= 0°$, পানির ঘনত্ব $= 1.0 \times 10^3$ kgm^{-3}] [কু. বো. ২০০৬]

আমরা জানি,

$$T = \frac{rh\rho g}{2}$$

$$T = \frac{0.02 \times 10^{-4} \times 0.082 \times 1000 \times 9.8}{2}$$

$$= \frac{0.02 \times 10^{-4} \times 82 \times 9.8}{2}$$

$$= 80.36 \times 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$$

এখানে,

কৈশিক নলের ব্যাসার্ধ $= \frac{0.04 \times 10^{-4}}{2}$ m $= 0.02 \times 10^{-4}$ m

কৈশিক নলে পানির উচ্চতা, $h = 0.082$ m

পানির ঘনত্ব, $\rho = 1000$ kgm^{-3}

পানির তলটান, $T = ?$

৪। 10^{-4}m ব্যাসবিশিষ্ট 1000টি পানির ক্ষুদ্র ফোঁটা মিলে একটি বড় ফোঁটা তৈরি করল। এতে নির্গত শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [পানির পৃষ্ঠ টান $= 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}] [চ. বো. ২০০৫]

আমরা জানি, ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন ΔA হলে,

$$W = \Delta A \times T = (\Delta A_1 - \Delta A_2) \times T$$

$$= 4\pi\,(Nr^2 - R^2)\,T$$

এখান, $1000 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$

বা, $R^3 = 10^3 r^3$

বা, $R = 10r$

$= 10 \times 0.5 \times 10^{-4}$ m

$= 5 \times 10^{-4}$ m

এখানে,

ক্ষুদ্র ফোটার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1 \times 10^{-4}}{2}$ m $= 0.5 \times 10^{-4}$ m

পৃষ্ঠটান, $T = 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}

ফোটার সংখ্যা, $N = 1000$

N সংখ্যকে ফোঁটার ক্ষেত্রফল $= \Delta A_1 = N \times 4\pi r^2$

বৃহৎ ফোটার ব্যাসার্ধ, $R = ?$

বৃহৎ ফোঁটার ক্ষেত্রফল, $\Delta A_2 = 4\pi R^2$

নির্গত শক্তি, $W = ?$

$$W = 4 \times 3.14\,[10^3 \times (0.5 \times 10^{-4}\ \text{m})^2 - (5 \times 10^{-4}\ \text{m})^2] \times 72 \times 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$$

$$= 2.035 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

$$W = 2.035 \times 10^{-6}\ \text{J}$$

৫। 2×10^{-4} m ব্যাসার্ধের একটি কাঁচের নলে কোন তরলের স্পর্শ কোণ 135° এবং তরলের পৃষ্ঠ টান 0.547 N m^{-1} হলে নলে তরলের অবনমন নির্ণয় কর। [তরলের ঘনত্ব $= 13.6 \times 10^3$ kg m^{-3} ও অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 9.81$ ms^{-2}।

মনে করি তরলের অবনমন $= h$

আমরা পাই, $T = \frac{r\rho g}{2\cos\theta}\left(h + \frac{1}{3}r\right)$ (1)

সমীকরণ (1) অনুসারে,

$$h + \frac{1}{3}r = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$$

বা, $h + \frac{1}{3} \times 2 \times 10^{-4}$m

$$= \frac{2 \times 0.547\ \text{Nm}^{-1} \times -0.7071}{2 \times 10^{-4}\ \text{m} \times 13.6 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 9.8\ \text{ms}^{-2}}$$

বা, $h + 0.666 \times 10^{-4} = 0.029$

বা, $h = 0.029 - 0.666 \times 10^{-4} \simeq 0.029$ m

অবনমন, $h \approx 0.029$ m

এখানে
$T = 0.547$ Nm^{-1}
$\rho = 13.6 \times 10^3$ kg m^{-3}
$g = 9.81$ ms^{-2}
$r = 2 \times 10^{-4}$m
$\theta = 135°$
$\cos 135° = \cos(90° + 45°)$
$= -\cos 45° = -0.7071$

৬। পারদের পৃষ্ঠটান 4.7×10^{-1} Nm^{-1} এবং ঘনত্ব 13.6×10^3 kgm^{-3}। 0.8×10^{-3} m ব্যাসার্ধের একটি কৈশিক কাঁচনল পারদে ডুবালে নলের মধ্যে পারদের 6.75×10^{-3} m অবনমন হয়। কাঁচের সাথে পারদের স্পর্শ কোণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৩]

আমরা জানি, নলের ব্যাসার্ধ ক্ষুদ্র হলে,

$$T = \frac{hr\rho g}{2\cos\theta}$$

বা, $\cos\theta = \frac{hr\rho g}{2T}$

$$= \frac{-6.75 \times 10^{-3} \times 0.8 \times 10^{-3} \times 13.6 \times 10^3 \times 9.8}{2 \times 4.7 \times 10^{-1}}$$

$$= \frac{-6.75 \times 0.8 \times 13.6 \times 9.8 \times 10^{-2}}{2 \times 4.7}$$

$$= -0.766$$

$$\theta = \cos^{-1}(-0.766)$$

$$= 140°$$

এখানে,

পারদের পৃষ্ঠটান, $T = 4.7 \times 10^{-1}$ Nm^{-1}

কৈশিক নলের ব্যাসার্ধ, $r = 0.8 \times 10^{-3}$ m

পারদের ঘনত্ব, $\rho = 13.6 \times 10^3$ kgm^{-3}

অবনমন, $h = -6.75 \times 10^{-3}$ m

[h সাম্যাবস্থার নিচের দিকে তাই ঋণ চিহ্ন]

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}

স্পর্শ কোণ, $\theta = ?$

৭। 2 mm ব্যাসের একটি পানির গোলককে 10 লক্ষ ছোট ছোট পানির বিন্দুতে স্প্রে করা হল। ব্যয়িত শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [পানির পৃষ্ঠ টান = 72×10^{-3} Nm^{-1}] [য. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩]

বড় ফোঁটার আয়তন,

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

ছোট ফোঁটার ব্যাসার্ধ r হলে, আয়তন $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$

10^6 টি ছোট ফোঁটার মোট আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3 \times 10^6$

$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 10^6$

বা, $(10^{-3})^3 = r^3 \times 10^6$

বা, $r^3 = \frac{10^{-9}}{10^6}$

বা, $r^3 = 10^{-15}$ $\quad r = 10^{-5}$ m

ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি = সকল ছোট ফোঁটার ক্ষেত্রফল — বড় ফোঁটার ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned}\Delta A &= 10^6 \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2\\ &= 4\pi(10^6 \times r^2 - R^2)\\ &= 4\pi\{10^6 \times (10^{-5})^2 - (10^{-3})^2\}\\ &= 4\pi \times 9{\cdot}9 \times 10^{-5}\\ &= 1{\cdot}24 \times 10^{-3}\ \text{m}^2\end{aligned}$$

প্রয়োজনীয় শক্তি, $W = \Delta A \times T$

$$\begin{aligned}&= 1{\cdot}24 \times 10^{-3} \times 72 \times 10^{-3}\\ &= 8{\cdot}928 \times 10^{-5}\ \text{J}\end{aligned}$$

এখানে,

$R = \frac{2}{2} = 1\ \text{mm} = 10^{-3}\ \text{m}$

$T = 72 \times 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$

৮। 30 mm ব্যাসের একটি গোলাকার সাবান বুদবুদের অভ্যন্তরীণ অতিরিক্ত চাপ নির্ণয় কর। সাবান পানির পৃষ্ঠটান = 25×10^{-3} Nm^{-1}।

আমরা জানি,

$P = \frac{4T}{r}$

$P = \frac{4 \times 25 \times 10^{-3}}{1{\cdot}5 \times 10^{-2}}$

$= 6{\cdot}67\ \text{Nm}^{-2}$

এখানে,

বুদবুদের ব্যাস = 30 mm = 3×10^{-2} m

বুদবুদের ব্যাসার্ধ, $r = 1{\cdot}5 \times 10^{-2}$ m

সাবান পানির পৃষ্ঠটান, $T = 25 \times 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$

অভ্যন্তরীণ অতিরিক্ত চাপ, P = ?

P.V

৯। 2 mm ব্যাসের কোন পানি বিন্দুর ভিতরের ও বাইরের চাপের পার্থক্য কত হবে ? (পানির পৃষ্ঠটান = 72×10^{-3} Nm^{-1})

আমরা জানি,

$P = \frac{4T}{r}$

$P = \frac{4 \times 72 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3}}$

$= 288\ \text{Nm}^{-2}$

এখানে,

পানি বিন্দুর ব্যাস = 2 mm = 2×10^{-3} m

পানি বিন্দুর ব্যাসার্ধ, $r = 1 \times 10^{-3}$ m

পৃষ্ঠটান, $T = 72 \times 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$

চাপের পার্থক্য, P = ?

P.V

১০। একটি সাবানের বুদবুদকে 1 cm ব্যাস হতে ধীরে ধীরে আকৃতি বৃদ্ধি করে 10 cm ব্যাসে পরিণত করা হল। কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় কর। (সাবান পানির পৃষ্ঠটান = 25×10^{-3} Nm^{-1}।)

ধরা যাক, ক্ষেত্রফলের পরিবর্তন ΔA।

আমরা জানি,

সম্পাদিত কাজ, $W = \Delta A T = 4\pi(r_2^2 - r_1^2)$

কিন্তু বুদবুদের ২টি পৃষ্ঠ থাকে, তাই

$$\begin{aligned}\Delta A &= 2 \times 4\pi(r_2^2 - r_1^2)\\ &= 2 \times 4 \times 3{\cdot}14\{(0{\cdot}05)^2 - (0{\cdot}005)^2\}\\ &= 621{\cdot}72 \times 10^{-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W &= \Delta A T = 621{\cdot}7 \times 10^{-4} \times 25 \times 10^{-3}\\ &= 1{\cdot}55 \times 10^{-3}\ \text{J}\end{aligned}$$

এখানে,

আদি ব্যাস, 1 cm = 0·01m

আদি ব্যাসার্ধ, $r_1 = 0{\cdot}005$ m

বর্ধিত ব্যাস = 10 cm = 0·1 m

বর্ধিত ব্যাসার্ধ, $r_2 = 0{\cdot}05$ m

সাবান পানির পৃষ্ঠটান, $T = 25 \times 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$

সম্পাদিত কাজ, W = ?

১১। 1×10^{-3} m² ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি প্লেট 1.55 Nsm⁻² সান্দ্রতাঙ্কের রেড়ীর তেলের 2×10^{-3} m পুরু একটি স্তরের উপর স্থাপিত। প্লেটটিকে 0.05 ms⁻¹ বেগে চালনা করতে অনুভূমিক বরাবর প্রয়োজনীয় বলের মান নির্ণয় কর।

মনে করি সান্দ্রতা বল = F

আমরা পাই, $F = \eta A \frac{dv}{dy}$ ...... (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$F = \frac{1.55\,\text{Nsm}^{-2} \times 10 \times 10^{-3}\text{m}^2 \times 0.05\,\text{ms}^{-1}}{2 \times 10^{-3}}$$

$= 0.3875$ N

প্রয়োজনীয় অনুভূমিক বল = 0.3875 N

এখানে, $A = 10 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$
$\eta = 1.55\,\text{Nsm}^{-2}$
$dv = 0.05\,\text{ms}^{-1}$
$dy = 2 \times 10^{-3}\,\text{m}$

১২। 1×10^{-3} m² ক্ষেত্রফলের একটি চ্যাপ্টা প্লেট অপর একটি বড় প্লেট হতে 0.1 cm পুরু গ্লিসারিন স্তর দ্বারা পৃথক করা আছে। ঐ প্লেটকে 1×10^{-2} ms⁻¹ বেগে চালনা করতে 1.5×10^{-5} N বলের প্রয়োজন হলে গ্লিসারিনের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় কর।

আমরা জানি, $F = \eta A \frac{dv}{dy}$

বা, $\eta = \frac{F dy}{A dv}$

$$\eta = \frac{1.5 \times 10^{-5} \times 1 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-2}}$$

$= 1.5 \times 10^{-3}\,\text{Ns m}^{-2}$

এখানে,
$A = 1 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$
$F = 1.5 \times 10^{-5}\,\text{N}$
$dv = 1 \times 10^{-2}\,\text{ms}^{-1}$
$dy = 0.1\,\text{cm} = 1 \times 10^{-3}\,\text{m}$

১৩। 3×10^{-3} m ব্যাসার্ধের একটি গোলক কোন তরলের ভেতর দিয়ে 3×10^{-2} ms⁻¹ প্রান্ত বেগ নিয়ে পড়ছে। তরলের সান্দ্রতাঙ্ক 1.5×10^{-3} Nsm⁻² হলে সান্দ্র বল নির্ণয় কর।

মনে করি সান্দ্রতা বল = F

আমরা জানি, $F = 6\pi\eta r v$

$= 6 \times 3.14 \times 1.5 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-2}$

$= 2.54 \times 10^{-6}$ N

এখানে, $r = 3 \times 10^{-3}\,\text{m}$
$v = 3 \times 10^{-2}\,\text{ms}^{-1}$
$\eta = 1.5 \times 10^{-3}\,\text{N sm}^{-2}$
$F = ?$

QV

১৪। 2×10^{-4} m ব্যাসার্ধের একটি লোহার বল তার্পিন তেলের ভেতর দিয়ে 4×10^{-2} ms⁻¹ প্রান্ত বেগ নিয়ে পড়ছে। যদি লোহা ও তার্পিন তেলের ঘনত্ব যথাক্রমে 7.8×10^3 এবং 0.87×10^3 kgm⁻³ হয় তবে তার্পিন তেলের সান্দ্রতাঙ্ক বের কর।

মনে করি তার্পিন তেলের সান্দ্রতাঙ্ক = η

আমরা জানি, $\eta = \frac{2r^2(\rho - \sigma)g}{9v}$

$$= \frac{2 \times (2 \times 10^{-4})^2\ (7.8 \times 10^3 - 0.87 \times 10^3) \times 9.8}{9 \times 4 \times 10^{-2}}$$

$$= \frac{2 \times 4 \times 10^{-8} \times 6.93 \times 10^3 \times 9.8}{9 \times 4 \times 10^{-2}}$$

$$= \frac{8 \times 6.93 \times 9.8 \times 10^{-3}}{36}$$

$= 1.5 \times 10^{-2}\,\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$

$= 1.5 \times 10^{-2}\,\text{Nsm}^{-2}$

এখানে, ব্যাসার্ধ $r = 2 \times 10^{-4}\,\text{m}$
প্রান্ত বেগ, $v = 4 \times 10^{-2}\,\text{ms}^{-1}$
লোহার ঘনত্ব, $\rho = 7.8 \times 10^3\,\text{kg}^{-3}$
তার্পিন তেলের ঘনত্ব,
$\sigma = 0.87 \times 10^3\,\text{kgm}^{-3}$
$g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$

$F = 6\pi r\eta v$

$F = \eta A \frac{dv}{dy}$

১৫। 9.5×10^2 kgm⁻³ ঘনত্ব ও 1×10^{-6} m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি তেল বিন্দু বায়ুর মধ্য দিয়ে পড়ছে। বায়ুর ঘনত্ব 1.3 kgm⁻³ এবং সান্দ্রতাঙ্ক 1.81×10^{-5} Ns m⁻² হলে তেল বিন্দুর প্রান্তিক বেগ নির্ণয় কর। [$g = 9.8$ ms⁻²]

মনে করি প্রান্তিক বেগ = v

আমরা পাই, $v = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2(\rho - \sigma)g}{\eta}$ ...... (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

এখানে, $r = 1 \times 10^{-6}\,\text{m}$
ρ = তেলের ঘনত্ব = $9.5 \times 10^2\,\text{kgm}^{-3}$
σ = বায়ুর ঘনত্ব = $1.3\,\text{kg m}^{-3}$
$g = 9.8\,\text{ms}^{-2}$
$\eta = 1.81 \times 10^{-5}\,\text{Ns m}^{-2}$

$$v = \frac{2 \times (1 \times 10^{-6}\text{m})^2 \times (9.5 \times 10^2 - 1.3)\,\text{kg m}^{-3} \times 9.8\,\text{ms}^{-2}}{9 \times 1.81 \times 10^{-5}\,\text{Ns m}^{-2}} = 1.14 \times 10^{-4}\,\text{ms}^{-1}$$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। তরলের পৃষ্ঠ টান কি ? [রা. বো. ২০০৪,২০০২; য. বো., চ. বো. ২০০০; সি. বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০২]

২। স্পর্শ কোণ কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৩]

৩। তরলের পৃষ্ঠ টানের উপর তাপমাত্রার প্রভাব কি ? [য. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৩]

৪। সংজ্ঞা লিখ ঃ

স্পর্শ কোণ [চ. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০২]

পৃষ্ঠ টান [চ. বো. ২০০৩]

সান্দ্রতা [ব. বো. ২০০৫, ২০০৩]

সান্দ্রতা সহগ [ব. বো. ২০০৩]

কৈশিকতা [য. বো. ২০০২]

৫। সান্দ্রতা সহগ বলতে কি বুঝ ? [রা. বো. ২০০৬, ২০০০ ; কু. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০৩ ; চ. বো. ২০০০]

৬। সান্দ্রতার একক ও মাত্রা সমীকরণ দেখাও। [কু. বো. ২০০৩]

৭। তরলের পৃষ্ঠ টান বলতে কি বুঝ ? [য. বো. ২০০৩]

৮। আসঞ্জন বল কাকে বলে ? [সি. বো. ২০০৩]

৯। তরলের সান্দ্রতা বলতে কি বুঝ ? [সি. বো. ২০০২ ; রা. বো. ২০০১ ; কু. বো. ২০০১]

১০। তরলের কৈশিকতা কি ? [সি. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০১]

১১। সান্দ্রতা কি ? [য. বো. ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০০ ; চ. বো. ২০০০]

১২। সান্দ্রতার উপর চাপের প্রভাব দেখাও। [ঢা. বো. ২০০০]

১৩। গ্যাসের সান্দ্রতার উপর তাপমাত্রার প্রভাব দেখাও। [কু. বো. ২০০২]

১৪। সান্দ্রতার গুণাঙ্কের সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; কু. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৬]

১৫। পারদ ও কাঁচের মধ্যকার স্পর্শ কোণ $140°$-এর অর্থ কি ?

১৬। পানির পৃষ্ঠ টান $0.072\ Nm^{-1}$ বলতে কি বুঝায় ?

১৭। পৃষ্ঠ টান ও পৃষ্ঠ শক্তির মধ্যে পার্থক্য লিখ।

১৮। সূচ পানিতে ভাসে কেন ?

১৯। ছাতার কাপড়ে ছোট ছোট ছিদ্র থাকে কেন ?

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। পৃষ্ঠ টানের আণবিক তত্ত্ব ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০০ ; চ. বো. ২০০০ ; সি. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০২]

২। মাত্রা সমীকরণের সাহায্যে স্টোক্‌সের সূত্র প্রতিপাদন কর। [কু. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৩]

৩। পৃষ্ঠ টান ও পৃষ্ঠ শক্তির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। [ব. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৪, ২০০২]

৪। কৈশিক নলের সাহায্যে পানির পৃষ্ঠ টান নির্ণয়ের পরীক্ষা পদ্ধতি বর্ণনা কর। [য. বো.২০০৪ ; ব. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২ ; চ. বো. ২০০১,২০০৪ ; কু. বো. ২০০০ ; সি. বো. ২০০২]

৫। কৈশিক নলে তরল উত্থানের গাণিতিক রাশি নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৫]

৬। তরল পদার্থের পৃষ্ঠ টান নির্ণয়ের তত্ত্ব প্রতিপাদন কর। [রা. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০২]

৭। অন্ত বেগ নির্ণয়ের রাশিমালা বের কর। [কু. বো. ২০০৩]

৮। কৈশিক নল পদ্ধতিতে তরল পদার্থের পৃষ্ঠ টান নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র প্রতিপাদন কর। [ব. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০২]

৯। স্টোক্‌সের সূত্রটি বর্ণনা কর। এই সূত্র হতে প্রমাণ কর r ব্যাসার্ধের এবং σ ঘনত্বের একটি গোলক η সান্দ্রতাঙ্কের এবং ρ ঘনত্বের একটি প্রবাহীর মধ্য দিয়ে v প্রান্তবেগে পড়তে থাকলে, $\eta = \frac{2r^2(\sigma - \rho)g}{9v}$ [চ. বো. ২০০২]

১০। স্টোক্‌সের সূত্রটি প্রতিপাদন কর। [রা. বো. ২০০৫]

১১। স্টোক্‌স-এর সূত্র বর্ণনা কর। মাত্রা সমীকরণের সাহায্যে এ সূত্রটি প্রতিপাদন কর। [কু. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৫]

১২। সান্দ্র তরলের মধ্য দিয়ে পড়ন্ত বস্তুর প্রান্তিক বেগের স্টোক্‌সের সমীকরণ বের কর। [ঢা. বো. ২০০১]

১৩। দেখাও যে, তরল বুদ্‌বুদের অভ্যন্তরস্থ অতিরিক্ত চাপ এর ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতিক। [কু. বো. ২০০২]

১৪। দেখাও যে, কোন তরলের পৃষ্ঠ শক্তি সংখ্যাগতভাবে তরলের পৃষ্ঠ টানের সমান।

১৫। স্পর্শ কোণ কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর নির্ভর করে ?

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। পানির উপরিতল হতে 7.5×10^{-2} m লম্বা একটি ফ্রেমকে টেনে তুলতে ফ্রেমের ওজনসহ সর্বোচ্চ যে বলের প্রয়োজন হবে তা নির্ণয় কর। [পানির পৃষ্ঠ টান $= 72.5 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}] [উঃ 10.875×10^{-3} N]

২। 1×10^{-4} m ব্যাসবিশিষ্ট কাচ নলের পানির আরোহণ নির্ণয় কর। [পানির পৃষ্ঠ টান $= 0.07$ Nm^{-1}] [উঃ 0.2857 m]

৩। 2×10^{-3} m ব্যাসের একটি পানি বিন্দুকে ভেঙ্গে সমান আকারের 10^9 টি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুতে পরিণত করতে কি পরিমাণ শক্তি প্রয়োজন হবে ? [পানির পৃষ্ঠ টান $= 73 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}]। [উঃ 9.1×10^{-4} J]

৪। 2×10^{-7}m ব্যাসার্ধের দুটি পানি বিন্দুকে একত্রিত করে একটি পানি বিন্দুতে পরিণত করলে তাপমাত্রা কত বৃদ্ধি পাবে ? [পানির পৃষ্ঠ টান $= 0.074$ Nm^{-1}] [উঃ 0.054 K]

৫। 200 mm ব্যাসার্ধের একটি ধাতব গোলক একটি তরলের মধ্য দিয়ে 2.1×10^{-2} ms^{-1} প্রান্ত বেগে পড়েছে। তরলের সান্দ্রতাঙ্ক 0.003 kgm^{-1} s^{-1} একক। তরলের সান্দ্র বল নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০২] [উঃ 23.74×10^{-5} N]

৬। 10^{-2} kg ভরের একটি আয়তাকার পাতের দৈর্ঘ্য 0.1 m, প্রস্থ 2×10^{-2} m ও পুরুত্ব 1.5×10^{-3} m। একে উল্লম্ব তলে অর্ধাংশ পানিতে এমনভাবে নিমজ্জিত করা হল যাতে বড় বাহুটি অনুভূমিকভাবে অবস্থান করে। এর আপাত ওজন কত হবে? [পানির পৃষ্ঠ টান = 0.07 Nm^{-1}] [উঃ 6.63×10^{-2} N]

৭। বায়ুতে সৃষ্ট একটি সাবান বুদবুদের ব্যাসার্ধ 1×10^{-2} m হতে 4×10^{-2} m-এ পরিণত করতে ব্যয়িত শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [সাবান পানির পৃষ্ঠ টান = 0.05 Nm^{-1}] [উঃ 0.188×10^{-2} J]

৮। 6×10^{-4} m ব্যসযুক্ত একটি কৈশিক নলে তার্পিন তেলের আরোহণ নির্ণয় কর। [তার্পিন তেলের পৃষ্ঠ টান = 0.027 Nm^{-1}, স্পর্শ কোণ 17° এবং তার্পিন তেলের ঘনত্ব $= 8.7 \times 10^2$ kg m^{-3}] [উঃ 0.0201 m]

৯। 4 cm ব্যাসের একটি গোলাকার সাবান বুদবুদের অভ্যন্তরীণ অতিরিক্ত চাপ নির্ণয় কর। (সাবান পানির পৃষ্ঠটান 25×10^{-3} Nm^{-1}) [উত্তর ঃ 5 Nm^{-2}]

১০। একটি সাবান বুদবুদের ব্যাসার্ধ 2 cm হতে বৃদ্ধি করে 4 cm করতে কৃতকাজ কত হবে ? (সাবান পানির পৃষ্ঠটান 25×10^{-3} Nm^{-1}) [উত্তর ঃ 75×10^{-3} J]

১১। 4mm ব্যাসের কোন পানি বিন্দুর ভিতরের ও বাইরের চাপের পার্থক্য কত হবে ? (পানির পৃষ্ঠটান $= 72 \times 10^{-3}$ Nm^{-1}) [উত্তর ঃ 144 Nm^{-2}]

১২। 1.5mm গভীরতার স্থির তরল পৃষ্ঠের উপর 2×10^{-2} m^2 ক্ষেত্রেফলের একটি ধাতব প্লেট রক্ষিত আছে। ঐ ধাতব প্লেটকে তরলের উপর 4.5 cms^{-1} বেগে সরাতে অনুভূমিকভাবে কত বল প্রয়োগ করতে হবে ? তরলের সান্দ্রতাঙ্ক 2Nsm^{-2}।

[উত্তর ঃ 1.2 N]

১৩। 5×10^{-3} m^2 ক্ষেত্রফলের একটি চ্যাপ্টা প্লেট অপর একটি বড় প্লেট হতে 0.2cm পুরু গ্লিসারিনের স্তর দ্বারা পৃথক করা আছে। এ প্লেটকে 0.02ms^{-1} বেগে চালনা করতে কত বলের প্রয়োজন হবে ? (গ্লিসারিনের সান্দ্রতাঙ্ক 1.5×10^{-3} Nsm^{-2})

[উত্তর ঃ 7.5×10^{-5} N]

১৪। পারদের পৃষ্ঠটান 4.7×10^{-1} Nm^{-1} এবং ঘনত্ব 13.6×10^3 kgm^{-3}, কাঁচের সাথে পারদের স্পর্শ কোণ 140°। 1.8×10^{-3} m ব্যাসের একটি কৈশিক কাঁচনল পারদে ডুবালে নলের মধ্যের পারদের অবনমন নির্ণয় কর।

[উত্তর ঃ -6×10^{-3} m]

১৫। 10^{-2} m^2 প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি পাত 2×10^{-3} m পুরু একটি তরলের উপর স্থাপিত। ঐ প্লেটকে 0.03 ms^{-1} বেগে চালনা করতে 0.235 N অনুভূমিক বলের প্রয়োজন হলে তরলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় কর।[উঃ 1.57 kg s^{-1}m^{-1}]

১৬। 1×10^{-2} m ব্যাসবিশিষ্ট একটি গ্যাসের বুদবুদ 1.5×10^3 kg m^{-3} ঘনত্ববিশিষ্ট কোন তরলের মধ্য দিয়ে 4.5×10^{-3} ms^{-1} স্থির বেগে উপরে উঠছে। তরলের সান্দ্রতাঙ্ক নির্ণয় কর। গ্যাসের ঘনত্ব উপেক্ষা কর। [উঃ 18.15 kg m^{-1}s^{-1}]

১৭। একটি গোলাকার তেলের ফোঁটার ঘনত্ব 800 kg m^{-3} ও বাসার্ধ 1×10^{-4} m। তেলের ফোঁটাটি 1.72×10^{-5} kg m^{-1}s^{-1} সান্দ্রতা গুণাঙ্কবিশিষ্ট বায়ুর ভিতর দিয়ে পড়তে থাকলে চূড়ান্ত গতিবেগ কত হবে ? [বায়ুর ঘনত্ব 1.3 kg m^{-3}]

[উঃ 1.01127 ms^{-1}]

১৮। সয়াবিন তেলের সান্দ্রতা গুণাঙ্ক 5.2×10^{-2} Nsm^{-2}। সয়াবিন তেলের মধ্য দিয়ে 0.2 mm ব্যাসের একটি ধাতব গোলক 1 ms^{-1} প্রান্তিক বেগে পড়ছে। সয়াবিনের সান্দ্রতাজনিত বল নির্ণয় কর। [উঃ 0.98×10^{-5}N]

১১

তাপ ও গ্যাস

HEAT AND GAS

১১.১ সূচনা
Introduction

দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকে আমরা জানি যে, তাপ প্রয়োগ করলে সাধারণত পদার্থের প্রসারণ ঘটে এবং তাপ অপসারণে বা শীতলীকরণে পদার্থের সংকোচন ঘটে। চাপ, আয়তন এবং উষ্ণতা দ্বারা কোন পদার্থের অবস্থা নির্দিষ্ট করা যায়। কঠিন এবং তরল পদার্থের ক্ষেত্রে চাপের প্রভাব খুবই নগণ্য। কিন্তু গ্যাসের ক্ষেত্রে চাপের প্রভাব খুবই প্রবল। তাই গ্যাসের প্রসারণ আলোচনায় চাপের উল্লেখ করা হয়। তাপমাত্রা স্থির রেখে কোন গ্যাসের চাপ পরিবর্তন করলে এর আয়তনের পরিবর্তন ঘটে। আবার চাপ স্থির রেখে কোন গ্যাসের তাপমাত্রা পরিবর্তন করলে এর আয়তনের পরিবর্তন ঘটে। এ কারণে গ্যাসের দু'ধরনের প্রসারণ গুণাঙ্ক রয়েছে।

এ অধ্যায়ে তাপ কি,তাপের আধুনিক মতবাদ, তাপ প্রয়োগে গ্যাসের প্রসারণ জনিত বিভিন্ন সূত্র, প্রসারাঙ্ক, গ্যাসের গতিতত্ত্ব, গতিতত্ত্বের প্রয়োগ, সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্পীয় চাপ, আর্দ্রতামিতি, আর্দ্র ও শুষ্ক বায়ুর বিভিন্ন ঘটনা আলোচনা করা হবে।

১১.২ তাপ
Heat

আমরা দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন প্রকার শক্তির সঙ্গে পরিচিত। যেমন যান্ত্রিক শক্তি, তড়িৎ শক্তি, রাসায়নিক শক্তি ইত্যাদি। বিভিন্ন প্রকার শক্তির ন্যায় **তাপও এক প্রকার শক্তি**। শক্তির নিত্যতা সূত্র তাপের বেলায়ও প্রযোজ্য। যেমন অন্য রকম শক্তি থেকে সমতুল্য তাপ পাওয়া যায়, আবার তাপকেও অন্য প্রকার শক্তিতে রূপান্তরিত করা যায়।

তাপ হল এক প্রকার শক্তি যা কোন বস্তুতে প্রয়োগ বা গমন করলে বস্তুটির তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায় এবং বর্জন করলে তাপমাত্রা হ্রাস পায়। অবশ্য মনে রাখতে হবে যে বস্তুর অবস্থার পরিবর্তনের সময় তাপ দিলেও তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায় না। দুটি ভিন্ন তাপমাত্রার বস্তুর মধ্যে পরিবাহক দ্বারা সংযোগ দিলে দেখা যায় তাপ উচ্চ তাপমাত্রার বস্তু হতে নিম্ন তাপমাত্রার বস্তুতে গমন করছে। এটাই তাপের স্বাভাবিক ধর্ম। উপরের আলোচনা থেকে আমরা তাদের নিম্নরূপ সংজ্ঞা দিতে পারি।

সংজ্ঞা ঃ তাপ এক প্রকার শক্তি যা উচ্চ তাপমাত্রার বস্তু হতে নিম্ন তাপমাত্রার বস্তুতে তাপমাত্রার পার্থক্যের কারণে পরিবহণ, পরিচলন এবং বিকিরণ পদ্ধতিতে গমন করে।

১১.৩ তাপের বিভিন্ন মতবাদ
Different theories of heat

গোড়া হতে উনবিংশ শতাব্দী পর্যন্ত বিজ্ঞানের ইতিহাস আলোচনা করলে দেখা যায় যে, তাপের প্রকৃতি ব্যাখ্যা করার জন্য দুটি প্রতিদ্বন্দ্বী মতবাদ প্রচলিত আছে, যথা—

১। **ক্যালরিক মতবাদ** (Caloric theory) এবং

২। **যান্ত্রিক বা গতি মতবাদ বা আধুনিক মতবাদ** (Mechanical or Dynamical or Modern theory)।

ক্যালরিক মতবাদের বিভিন্ন ত্রুটি থাকায় এই মতবাদ প্রত্যাখ্যাত হয়েছে। এখানে তাপের আধুনিক মতবাদ আলোচিত হল।

যান্ত্রিক বা গতি মতবাদ বা আধুনিক মতবাদ ঃ

1849 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী **ড. জুল** (Joule) তাপের এই মতবাদ প্রতিষ্ঠা করেন। তিনি পরীক্ষার সাহায্যে প্রমাণ করেন যে, **তাপ এক প্রকার শক্তি এবং তাপ ও যান্ত্রিক শক্তির মধ্যে একটি ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক আছে।** তাপের গতি

মতবাদ অনুসারে প্রত্যেক বস্তুর কণাগুলো কম-বেশি গতিশীল। অতএব কণাগুলো গতিশক্তির অধিকারী। কণাসমূহের এই গতিশক্তি তাপ শক্তিতে পরিণত হয় অর্থাৎ তাপ গতিরই রূপান্তর মাত্র। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, দুটি বস্তুকে একত্রে ঘষলে এদের অণুগুলো সজোরে কম্পিত হয়। কম্পমান অণুগুলোর গতিশক্তি তাপ শক্তিতে পরিণত হয়। অতএব উৎপন্ন তাপের মূল উৎস কাজ বা যান্ত্রিক শক্তি। সুতরাং সিদ্ধান্ত করা যায় যে, তাপ প্রবাহী নয়, এটি বস্তুর গতিশীল কণাসমূহ কর্তৃক প্রাপ্ত এক প্রকার শক্তি। যেহেতু তাপের উৎসই হল কাজ, অতএব কাজ, W ও তাপ, H পরস্পরের সমানুপাতিক অর্থাৎ $W \propto H$।

১১'৪ গ্যাসীয় সূত্র

Gas laws

গ্যাসের আয়তন, তাপমাত্রা এবং চাপ এই তিনটিকে গ্যাসের চল রাশি (Variable) বলে। তাদের যে কোন দুটির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হলে, অপর একটিকে অপরিবর্তিত রাখতে হবে। এ অনুযায়ী হিসাব করলে আমরা তিনটি সম্পর্ক পাই। তিনটি সূত্র দ্বারা এই তিনটি সম্পর্ক নিয়ন্ত্রিত হয়। এই তিনটি সূত্রকে **গ্যাসীয় সূত্র** (Gas Laws) বলা হয়। গ্যাসীয় সূত্র আলোচনার পূর্বে গ্যাস কি জানা দরকার। গ্যাসের নিম্নলিখিত যে কোন একটি সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে ঃ

সংজ্ঞা (i) সাধারণ তাপমাত্রা ও চাপে যে সব পদার্থ বায়বীয় অবস্থায় থাকে, তাদেরকে গ্যাস বলে। যেমন হাইড্রোজেন, অক্সিজেন, নাইট্রোজেন ইত্যাদি গ্যাস।

(ii) বর্তমান প্রচলিত মত অনুসারে সংকট তাপমাত্রার উপরে কোন পদার্থের বায়বীয় অবস্থার নাম গ্যাস।

নিম্নে গ্যাসের তিনটি সূত্র বর্ণনা করা হল —

১। **বয়েল-এর সূত্র ঃ** 1662 খ্রিস্টাব্দে রবার্ট বয়েল নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের চাপ ও আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে একটি সূত্র আবিষ্কার করেন। এর নাম **বয়েল-এর সূত্র**। সূত্রটি নিম্নে বিবৃত হল ঃ

'তাপমাত্রা স্থির থাকলে, কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন তার চাপের ব্যস্তানুপাতিক।'

মনে করি স্থির তাপমাত্রায় কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ এবং আয়তন যথাক্রমে P এবং V।

অতএব আমরা পাই, $V \propto \frac{1}{P}$

বা, $V = \text{ধ্রুবক} \times \frac{1}{P}$

বা, $PV = \text{ধ্রুবক} = K$

বা, $PV = K$ (1)

এই সমীকরণকে **সমোষ্ণ সমীকরণ** (Isothermal equation) বলে।

যদি স্থির তাপমাত্রায় কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের $P_1, P_2, P_3,$ ও P_n চাপে আয়তন যথাক্রমে $V_1, V_2, V_3,$ ও V_n হয়, তবে আমরা পাই, $P_1V_1 = P_2V_2 = P_3V_3 = \ldots\ldots\ldots = P_nV_n =$ ধ্রুবক।

২। **চার্লস-এর সূত্র ঃ** 1787 খ্রিস্টাব্দে ফরাসি বিজ্ঞানী চার্লস এই সূত্র আবিষ্কার করেন। তাঁর নামানুসারে এই সূত্রকে চার্লস-এর সূত্র বলে। এটি নির্দিষ্ট চাপে তাপমাত্রা এবং আয়তনের সম্পর্ক নির্দেশ করে। এই সূত্র অনুসারে **স্থির চাপে কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন 0°C হতে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য 0°C-এর আয়তনের নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ বা 0'00366 অংশ পরিবর্তিত হয়।**

মনে করি 0°C তাপমাত্রায় কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন $= V_0$

চার্লস-এর সূত্রানুযায়ী স্থির চাপে,

1°C তাপমাত্রায় ঐ গ্যাসের আয়তন $= V_0 + \frac{V_0}{273}$

θ°C " " " " $= V_0 + \frac{V_0 \times \theta}{273}$

মনে করি স্থির চাপে ঐ গ্যাসের $\theta°C$ তাপমাত্রায় আয়তন = V

আমরা পাই, $V = V_0 + \frac{V_0\theta}{273} = V_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right)$ (2)

পরম স্কেলে চার্লস-এর সূত্র ঃ

সমীকরণ (2) অনুসারে,

$$V = V_0\left(\frac{273+\theta}{273}\right) = \frac{V_0 T}{273}$$

এখানে T হচ্ছে পরম স্কেলে তাপমাত্রা। $T = \theta + 273$

ধরা যাক, $\frac{V_0}{273} = K =$ ধ্রুবক

অতএব, $V = KT$

বা, $V \propto T$ (2a)

অর্থাৎ, **নির্দিষ্ট চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের আয়তন তার পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই পরম স্কেলে চার্লসের সূত্র।**

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি নির্দিষ্ট চাপ ও ভরের কোন গ্যাসের প্রাথমিক আয়তন V_1 ও প্রাথমিক তাপমাত্রা T_1। এর চূড়ান্ত আয়তন V_2 ও চূড়ান্ত তাপমাত্রা T_2 হলে চার্লসের সূত্রানুসারে,

$V_1 = KT_1$ এবং $V_2 = KT_2$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

বা, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ (3)

৩। **চাপীয় সূত্র ঃ** 1842 খ্রিস্টাব্দে বিখ্যাত বিজ্ঞানী রেনো (Regnault) এই সূত্র আবিষ্কার করেন। এজন্য এই সূত্রকে **রেনোর চাপীয় সূত্র** বলা হয়। এটি স্থির আয়তনে চাপ এবং তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে। এই সূত্র অনুসারে, **স্থির আয়তনে কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ 0°C হতে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য তার 0°C-এর চাপের একটি নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ বা, 0·00366 অংশ পরিবর্তিত হয়।**

মনে করি 0°C তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ $= P_0$

রেনোর চাপীয় সূত্রানুযায়ী স্থির আয়তনে,

1°C তাপমাত্রায় ঐ গ্যাসের চাপ $= P_0 + \frac{P_0}{273}$

$\theta°C$ " " " " $= P_0 + \frac{P_0 \times \theta}{273}$

মনে করি স্থির আয়তনে $t_1°C$ তাপমাত্রায় ঐ গ্যাসের চাপ $= P_1$

আমরা পাই, $P = P_0 + \frac{P_0 \times \theta}{273} = P_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right) = P_0\left(\frac{273+\theta}{273}\right)\ldots$ (4)

পরম স্কেলে চাপের সূত্র ঃ

সমীকরণ (4) অনুসারে,

$$P = P_0\left(\frac{273+\theta}{273}\right) = \frac{P_0 T}{273}$$

এখানে T হচ্ছে পরম স্কেলে তাপমাত্রা। $T = \theta + 273$

ধরা যাক, $\frac{P_0}{273} = K =$ ধ্রুবক

অতএব, $P = KT$

বা, $P \propto T$ (4a)

অর্থাৎ, **নির্দিষ্ট আয়তনে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের চাপ তার পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই পরম স্কেলে চাপের সূত্র।**

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি, একটি গ্যাসের প্রাথমিক চাপ P_1, প্রাথমিক তাপমাত্রা T_1, চূড়ান্ত চাপ P_2 ও চূড়ান্ত তাপমাত্রা T_2।

চাপীয় সূত্রানুসারে,

$P_1 = KT_1$ এবং $P_2 = KT_2$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

বা, $$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (5)$$

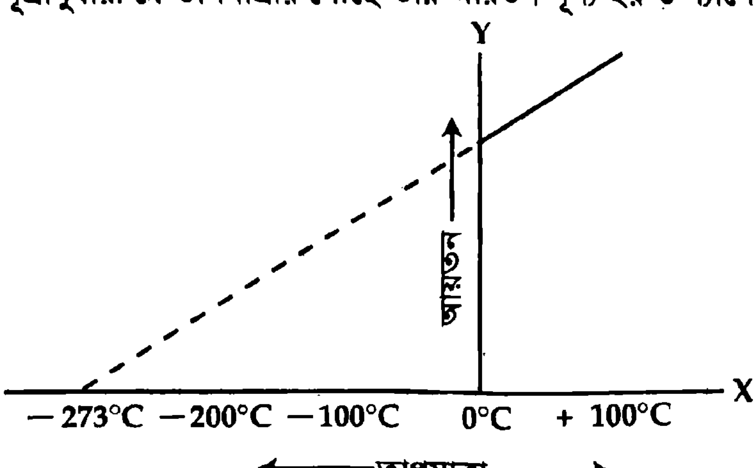
১১.৫ পরম শূন্য তাপমাত্রা বা পরম শীতলতা
Absolute zero temperature

চার্লসের সূত্র হতে আমরা দেখতে পাই যে, স্থির চাপে যদি $0°C$ তাপমাত্রায় কোন নির্দিষ্ট ভরের একটি গ্যাসের আয়তন V_0 হয় এবং $\theta°C$ তাপমাত্রায় তার আয়তন V হয়, তবে

$$V = V_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right)$$

$-273°C$ তাপমাত্রায় উক্ত গ্যাসের আয়তন, $V_{-273} = V_0\left(1 - \frac{273}{273}\right) = 0$

অর্থাৎ স্থির চাপে গ্যাসকে ঠান্ডা করে তার তাপমাত্রা $-273°C$ করলে আয়তন শূন্য হবে। তাপমাত্রা আরও কমালে গ্যাসের আয়তন ঋণাত্মক হবে। কিন্তু ঋণাত্মক আয়তন অর্থহীন। অতএব **সর্বনিম্ন তাপমাত্রা** $-273°C$। প্রকৃতপক্ষে এই তাপমাত্রা $-273.16°C$। কোন কিছুরই তাপমাত্রা এর অপেক্ষা কম হতে পারে না। শুধু পৃথিবীতে নয়, সৌরজগৎ তথা মহাবিশ্বে এর কম তাপমাত্রা কোথাও থাকতে পারে না। এজন্য $-273°C$ তাপমাত্রাকে **সর্বনিম্ন তাপমাত্রা বা পরম বা চরম শূন্য তাপমাত্রা বা চরম শীতলতা** (Absolute zero temperature) বলা হয়। কাজেই, **স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের তাপমাত্রা ক্রমশ কমাতে থাকলে, চার্লসের সূত্রানুযায়ী যে তাপমাত্রায় পৌঁছে তার আয়তন শূন্য হয় ও গ্যাসের গতিশক্তি সম্পূর্ণরূপে লোপ পায় তাকে পরম শূন্য তাপমাত্রা বলে।**



চিত্র ঃ ১১.১

যদি স্থির চাপে কোন গ্যাসের বিভিন্ন তাপমাত্রার আয়তন জেনে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়, তা হলে লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ১১.১]। ঐ সরলরেখাকে বর্ধিত করলে তা তাপমাত্রা অক্ষকে $-273°C$-এ ছেদ করবে অর্থাৎ $-273°C$ তাপমাত্রায় কোন গ্যাসেরই কোন আয়তন থাকে না।

গ্যাসের চাপীয় সূত্র হতেও আমরা পাই যে, $-273°C$ তাপমাত্রায় যে কোন গ্যাসের চাপ শূন্য হবে।

কারণ $P_{-273} = P_0\left(1 - \frac{273}{273}\right) = 0$

পরম শূন্য তাপমাত্রা একটি গাণিতিক হিসাব মাত্র। মূলত এই তাপমাত্রা কোন গ্যাস থার্মোমিটারে পাওয়া যায়নি।। কারণ প্রত্যেক গ্যাস এই তাপমাত্রায় পৌঁছার পূর্বে তরল বা কঠিনে পরিণত হয়। যেমন বায়ু $-184°C$ এবং হাইড্রোজেন $-269°C$ তাপমাত্রায় তরল হয়।

১১.৬ তাপমাত্রার পরম স্কেল
Absolute scale of temperature

পরম শূন্য তাপমাত্রাকে শূন্য ধরে তাপমাত্রার একটি স্কেল তৈরি হয়েছে, এর নাম তাপমাত্রার পরম বা চরম স্কেল। এই স্কেলে প্রতি ডিগ্রী তাপমাত্রার ব্যবধান সেলসিয়াস বা ফারেনহাইট যে কোন একটিতে হতে পারে।

পরম শূন্য তাপমাত্রাকে শূন্য ধরে তাপমাত্রার যে স্কেলে প্রতি ডিগ্রী তাপমাত্রার ব্যবধান এক ডিগ্রী সেন্টিগ্রেডের সমান করা হয়, তার নাম **পরম সেলসিয়াস স্কেল।** লর্ড কেলভিনের নামানুসারে এই স্কেলের তাপমাত্রাকে K (কেলভিন) দ্বার সূচিত করা হয়।

এ ক্ষেত্রে $0°C = 273K$; $1°C = (273 + 1)K$; $100°C = (273 + 100)K$

$\theta°C = (273 + \theta)K$

$(273 + \theta)$ K কে TK দ্বারা নির্দেশ করে পাওয়া যায়, $T = (273 + \theta)$

কেলভিনের স্কেল অনুযায়ী বরফের গলনাঙ্ক 273K এবং পানির স্ফুটনাঙ্ক 373K। আরও সোজাভাবে বলা যায়,

পরম সেলসিয়াস স্কেলের পাঠ = সেলসিয়াস পাঠ + 273

১১.৭ স্থির চাপে গ্যাসের আয়তন প্রসারাঙ্ক
Co-efficient of volume expansion of a gas at constant pressure

সংজ্ঞা : স্থির চাপে 0°C তাপমাত্রার নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের তাপমাত্রা 0°C থেকে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস বৃদ্ধির ফলে ঐ গ্যাসের প্রতি একক আয়তনে যে প্রসারণ ঘটে তাকে স্থির চাপে গ্যাসের আয়তন প্রসারাঙ্ক বা আয়তন প্রসারণ সহগ (γ_p) বলে।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক, 0°C তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের আয়তন V_0 এবং $\theta°$ C তাপমাত্রায় ঐ গ্যাসের আয়তন V। অতএব সংজ্ঞানুসারে গ্যাসের আয়তন প্রসারাঙ্ক (γ_p),

$$\gamma_p = \frac{V - V_0}{V_0 (\theta - 0)} = \frac{V - V_0}{V_0\theta} \tag{6}$$

বায়ুর জন্য γ_p-এর মান $0.00366°C^{-1}$ বলতে বুঝায় যে চাপ স্থির রেখে 0°C তাপমাত্রার 1 m^3 বায়ুর তাপমাত্রা 1°C বাড়ালে এর আয়তন 0.00366 m^3 বাড়ে।

১১.৮ স্থির আয়তনে গ্যাসের চাপ প্রসারাঙ্ক
Co-efficient of pressure expansion of a gas at constant volume

সংজ্ঞা : স্থির আয়তনে 0°C তাপমাত্রার নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের তাপমাত্রা 0°C থেকে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস বৃদ্ধির ফলে ঐ গ্যাসের প্রতি একক চাপের যে বৃদ্ধি ঘটে তাকে স্থির আয়তনে গ্যাসের চাপ প্রসারাঙ্ক বা গ্যাসের চাপ প্রসারণ সহগ (γ_v) বলে,

ব্যাখ্যা : ধরা যাক 0°C তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের চাপ P_0 এবং $\theta°C$ তাপমাত্রায় ঐ গ্যাসের চাপ P। অতএব সংজ্ঞানুসারে গ্যাসের চাপ প্রসারাঙ্ক γ_v,

$$\gamma_v = \frac{P - P_0}{P_0 (\theta - 0)} = \frac{P - P_0}{P_0\theta} \tag{7}$$

স্থির আয়তনে বায়ুর চাপ প্রসারাঙ্ক $0.003666\ °C^{-1}$ বলতে বুঝায় যে আয়তন স্থির রেখে 0°C তাপমাত্রায় একক চাপের (1 Pa) বায়ুর তাপমাত্রা 1°C বাড়ালে এর চাপ 0.003666 Pa বাড়ে।

১১.৯ গ্যাস সূত্রের সমন্বয় এবং আদর্শ গ্যাস সমীকরণ প্রতিপাদন
Combination of the laws of gases and deduction of ideal gas equation

সূচনা : আদর্শ গ্যাসের **চাপ, আয়তন** এবং **পরম তাপমাত্রার** মধ্যে একটি সম্পর্ক আছে যা একটি সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। এই সমীকরণটির নাম **আদর্শ গ্যাস সমীকরণ** (Ideal Gas Equation)। সমীকরণটি নিম্নে প্রতিপাদন করা হল।

মনে করি কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের চাপ, আয়তন এবং পরম তাপমাত্রা যথাক্রমে P, V এবং T। তাপমাত্রা স্থির থাকলে **বয়েল**-এর সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$$V \propto \frac{1}{P} \qquad (A)$$

আবার চাপ স্থির থাকলে **চার্লস**-এর সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$$V \propto T \qquad (B)$$

সুতরাং সমীকরণ (A) এবং সমীকরণ (B) হতে P এবং T উভয়েই এক সঙ্গে পরিবর্তিত হলে যুগ্মভেদের উপপাদ্য হতে আমরা পাই,

$$V \propto \frac{T}{P}$$

বা, $V = \text{ধ্রুবক} \times \frac{T}{P}$

বা, $V = K.\frac{T}{P}$

বা, $PV = KT$

বা, $\frac{PV}{T} = K$ (ধ্রুবক) (8)

এখন, T_1, T_2 T_n তাপমাত্রায় ঐ একই ভর গ্যাসের আয়তন এবং চাপ যথাক্রমে V_1, P_1, V_2, P_2.... এবং V_n, T_n হলে সমীকরণ (8) অনুসারে আমরা পাই,

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} = \;........ = \frac{P_nV_n}{T_n} = K \text{ (ধ্রুবক)} \qquad (9)$$

অর্থাৎ সমীকরণ (8) হতে পাই,

$$PV = KT \qquad (10)$$

উক্ত সমীকরণে **K-কে গ্যাস ধ্রুবক** এবং **PV ও T-কে গ্যাসের অবস্থার উপাদান বলে।** K-এর মান গ্যাসের পরিমাণের উপর নির্ভর করে। একই চাপ এবং তাপমাত্রায় **এক মোল** (1 mole) অর্থাৎ এক গ্রাম অণু ভরের সকল গ্যাসের আয়তন সমান এবং এর মান $22.4 \times 10^{-3}\ m^3$। ফলে K-এর মান এক মোল ভরের সকল গ্যাসের ক্ষেত্রে সমান হয়। এই কারণে এক গ্রাম অণু গ্যাসের জন্য তার অবস্থার সমীকরণে K-এর পরিবর্তে R লেখা হয়। R এর মান সকল গ্যাসের ক্ষেত্রে সমান, গ্যাসের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না। এজন্য **R-এর নাম সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক** (Universal gas constant) বা **মোলার গ্যাস ধ্রুবক** (Molar gas constant)। অতএব এক গ্রাম অণু গ্যাসের ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$PV = RT \qquad (11)$$

এখানে R একটি ধ্রুবক। এখন P, V এবং T এর মধ্যে দুটি রাশি জানা থাকলে তৃতীয়টির মান বের করে গ্যাসের অবস্থা সম্পূর্ণ জানা যায়।

এক মোল গ্যাসের পরিবর্তে n মোল গ্যাসের কথা বিবেচনা করা হলে R-এর পরিবর্তে nR লিখতে হবে।

আমরা পাই

$$PV = nRT \qquad (12)$$

এটিই হল আদর্শ গ্যাসের সাধারণ সমীকরণ। একে বয়েল এবং চার্লস্ এর সূত্রের সমন্বয় সমীকরণও বলা হয়।

পুনঃ, কোন গ্যাসের ভর = m এবং আণবিক ভর = M হলে,

$$n = \text{মোল সংখ্যা} = \frac{\text{গ্রামে গ্যাসের ভর}}{\text{গ্রামে তার আণবিক ভর}}$$

সমীকরণ (9) হতে পাই

$$\boxed{PV = \frac{m}{M} \times RT} \tag{13}$$

যে সকল গ্যাস সমীকরণ (12) মেনে চলে তাদেরকে আদর্শ গ্যাস বলে। সুতরাং, আদর্শ গ্যাসের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ যে সকল গ্যাস সকল তাপমাত্রা এবং চাপে বয়েল ও চার্লস-এর সূত্র মেনে চলে তাদেরকে আদর্শ গ্যাস বলে। তবে বাস্তবে নিম্নচাপ ও উচ্চ তাপমাত্রা ছাড়া কোন প্রকৃত গ্যাসই আদর্শ গ্যাস সমীকরণ মেনে চলে না। তবে কিছু গ্যাস যেমন হাইড্রোজেন, অক্সিজেন ইত্যাদি বিশেষ অবস্থায় আদর্শ গ্যাসের ন্যায় আচরণ করে।

১১.১০ প্রমাণ বা স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপ
Standard or normal temperature and pressure (STP or NTP)

প্রমাণ বা স্বাভাবিক তাপমাত্রা ঃ প্রমাণ বা স্বাভাবিক চাপে (760 mm পারদ স্তম্ভ চাপ) যে তাপমাত্রায় বরফ গলে পানিতে পরিণত হয় বা পানি জমে বরফে পরিণত হয় সেই তাপমাত্রাকে প্রমাণ বা স্বাভাবিক তাপমাত্রা বলে। সেলসিয়াস স্কেলে এটি 0°C এবং পরম বা এস. আই. এককে 273.16 K।

প্রমাণ বা স্বাভাবিক চাপ ঃ সমুদ্র পৃষ্ঠে 45° অক্ষাংশে 0°C বা 273.16 K তাপমাত্রায় উল্লম্বভাবে অবস্থিত 760 mm উচ্চতাবিশিষ্ট শুষ্ক ও বিশুদ্ধ পারদ স্তম্ভ যে চাপ দেয় তাকে প্রমাণ বা স্বাভাবিক চাপ বলে।

$$\begin{aligned}\therefore \text{ প্রমাণ চাপ } &= 760 \text{ mm পারদ স্তম্ভ চাপ}\\ &= 0.76 \text{ m} \times 13596 \text{ kgm}^{-3} \times 9.806 \text{ ms}^{-2}\\ &= 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2} \qquad [\quad P = h\rho g]\\ &= 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Pa = Nm^{-2}

১১.১১ R-এর অর্থ, একক এবং মান
Meaning, unit and value of R

যে কোন গ্যাসের ভর এক গ্রাম মোল হলে, সকল গ্যাসের ক্ষেত্রে K-এর মান সমান হয় এবং ধ্রুবক K-কে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সে জন্য R-কে **সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক** বলা হয়।

(ক) R-এর অর্থ ঃ n মোল গ্যাসের ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$PV = nRT$$

$$R = \frac{PV}{nT} = \frac{\text{কাজ বা শক্তি}}{\text{মোল সংখ্যা} \times \text{ডিগ্রী তাপমাত্রা}} \tag{14}$$

উক্ত সমীকরণ হতে R-এর নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেয়া যায়—

সংজ্ঞা ঃ এক মোল আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা এক ডিগ্রী বাড়ালে তা যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাকে সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক বলে। এটিই হল R-এর অর্থ বা তাৎপর্য।

(খ) R-এর একক ঃ আমরা জানি,

এস. আই. পদ্ধতিতে কাজ বা শক্তির একক = **জুল**, n-এর একক মোলসংখ্যা এবং তাপমাত্রার একক = **কেলভিন** (K)।

এস. আই. পদ্ধতিতে R-এর একক **হল জুল কেলভিন$^{-1}$ মোল$^{-1}$ (JK^{-1} $mole^{-1}$)**। এককের বিভিন্ন পদ্ধতিতে R-এর একক বিভিন্ন হবে।

(গ) R- এর মান : এস. আই. পদ্ধতিতে স্বাভাবিক তাপমাত্রা এবং চাপে (N. T. P)

P = 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ $= 1.013 \times 10^5$ নিউটন/বর্গমিটার (Nm^{-2}),

1 মোল গ্যাসের আয়তন $V = 22.4 \times 10^{-3}$ ঘনমিটার (m^3) এবং তাপমাত্রা $T = 273.16K$

$$R = \frac{PV}{nT} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 22.4 \times 10^{-3}}{1 \times 273.16} = \boxed{8.314\ JK^{-1}\ mole^{-1}\ (\text{জুল কেলভিন}^{-1}\ \text{মোল}^{-1})}$$

১১.১২ গ্যাসের ঘনত্বের সমীকরণ
Equation of density of a gas

ধরা যাক T_1K পরম তাপমাত্রায় m ভরের কোন গ্যাসের আয়তন V_1, চাপ P_1 ও ঘনত্ব ρ_1 এবং T_2K পরম তাপমাত্রায় তার আয়তন V_2, চাপ P_2 ও ঘনত্ব ρ_2। গ্যাসটি তার অবস্থার সমীকরণ মেনে চললে,

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

অর্থাৎ, $\frac{P_1}{T_1} \cdot \frac{m}{\rho_1} = \frac{P_2}{T_2} \cdot \frac{m}{\rho_2}$ $\left[\rho_1 = \frac{m}{V_1} \text{ এবং } \rho_2 = \frac{m}{V_2}\right]$

$$\therefore \boxed{\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}} = \text{একটি ধ্রুবক} \quad (15)$$

এটিও (আদর্শ) গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ নির্দেশ করে। এ সমীকরণ অনুসারে,

(ক) $P_1 = P_2$ হলে, $\rho_1 T_1 = \rho_2 T_2$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1} \quad \ldots (16)$$

সুতরাং **স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের ঘনত্ব তার পরম তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক**।

(খ) $T_1 = T_2$ হলে, $\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2}$

$$\therefore \boxed{\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}} \quad (17)$$

কাজেই, **স্থির তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের চাপ তার ঘনত্বের সমানুপাতিক**।

১১.১৩ গ্যাসের গতিতত্ত্ব
Kinetic theory of gases

সকল গ্যাসই মোটামুটি **বয়েল, চার্লস** এবং **চাপের সূত্র** মেনে চলে। এজন্য সকল গ্যাসের একটি সাধারণ গঠন আছে বলে ধরে নেয়া যায়। সকল গ্যাসই তথা সকল বস্তুই অসংখ্য অণুর সমষ্টি। এ অণুগুলো অবিরাম গতিশীল অবস্থায় থাকে। তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে তাদের গতিশক্তি বৃদ্ধি পায়। কঠিন পদার্থের অণুগুলো খুবই ঘন সন্নিবিষ্ট থাকায় সংসক্তি বল অধিক। এর ফলে কঠিন পদার্থের নির্দিষ্ট আকার ও আয়তন থাকে। তরল পদার্থের অণুগুলোর পারস্পরিক সংসক্তি বল অপেক্ষাকৃত কম। ফলে এদের নির্দিষ্ট আকার থাকে না, কিন্তু আয়তন থাকে। গ্যাসের অণুগুলোর মধ্যে সংসক্তি বল একেবারে নেই বললেই চলে। ফলে গ্যাসের অণুগুলো স্বাধীনভাবে চলাচল করতে পারে। তাই গ্যাসীয় পদার্থের নির্দিষ্ট কোন আকার বা আয়তন নেই।

ডেভী, জুল, রামফোর্ড প্রমুখ বিজ্ঞানী বিভিন্ন পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করেছেন যে, তাপ এক প্রকার শক্তি এবং পদার্থ কণার গতির ফলেই তাপ সৃষ্টি হয়। তা হলে দেখা যাচ্ছে, **তাপ হল গতির একটি বিশেষ রূপ**। অতএব **গ্যাসের গতিশীলতার জন্য তাপ উৎপন্ন হয়। এটি হল গ্যাসের গতিতত্ত্ব**। গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে গ্যাসের গতির প্রকৃতি এবং উদ্ভূত তাপের মধ্যে সম্পর্ক জানা যায়।

1730 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী **বার্ণোলি** (Bernoulli) সর্বপ্রথম গ্যাসের গতিতত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসের সূত্রাবলি ব্যাখ্যা করেন। এ কারণে বিজ্ঞানী বার্ণোলিকে গ্যাসের গতিতত্ত্বের জনক বলা হয়। কিন্তু 1860 খ্রিস্টাব্দে **ক্লসিয়াস, ম্যাক্সওয়েল, বোল্‌জম্যান, জিন, ভ্যান-ডার ওয়াল্‌স** প্রমুখ বিজ্ঞানী গ্যাসের গতিতত্ত্বের প্রভূত উন্নতি সাধন করেন এবং এই তত্ত্বের সাহায্যে গ্যাসের নানারূপ আচরণের সন্তোষজনক ব্যাখ্যা প্রদান করেন।

১১.১৩.১ গ্যাসের গতিতত্ত্বের মৌলিক স্বীকার্যসমূহ

Fundamental Postulates of Kinetic theory of gases

গ্যাসের গতিতত্ত্ব সুপ্রতিষ্ঠিত করার জন্য কতগুলো পূর্বশর্ত গ্রহণ করা হয়েছিল। এগুলোকে মৌলিক স্বীকার্য বলা হয়। ক্লসিয়াস সর্বপ্রথম এই স্বীকার্যগুলো লিপিবন্ধ করেন। স্বীকার্যসমূহ নিম্নে উল্লেখ করা হল :

১। সকল গ্যাসই ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অণু দ্বারা গঠিত। একটি গ্যাসের সকল অণু সমান ভরের এবং সদৃশ, কিন্তু বিভিন্ন গ্যাসের অণুগুলো ভিন্ন ভিন্ন। অণুগুলো নিউটনের গতিসূত্র মেনে চলে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, হাইড্রোজেন গ্যাসের সকল অণু সদৃশ, অক্সিজেন গ্যাসের সকল অণু সদৃশ। কিন্তু হাইড্রোজেন গ্যাসের অণু এবং অক্সিজেন গ্যাসের অণু সদৃশ নয়।

২। গ্যাসের অণুগুলো বিন্দু ভর (point mass) আদর্শ স্থিতিস্থাপক গোলক। অণুগুলোর মধ্যবর্তী দূরত্বের তুলনায় এদের আয়তন উপেক্ষণীয়।

৩। অণুগুলো সতত সঞ্চরণশীল, এদের মধ্যে কোন আকর্ষণ বা বিকর্ষণ বল নেই। অণুগুলোর গতিবেগ সব দিকে প্রসারিত এবং ঐ বেগ শূন্য হতে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে।

৪। অণুগুলো পরস্পরের সাথে ও আধারের দেওয়ালের সাথে ধাক্কা খাচ্ছে। দুটি ধাক্কার মধ্যবর্তী সময়ে অণুগুলো সমবেগে সরলরেখা বরাবর চলে। পরপর দুটি ধাক্কার মধ্যবর্তী দূরত্বকে মুক্ত পথ (free path) বলে।

৫। একটি ধাক্কা সংঘটিত হতে যে সময় লাগে তা মুক্ত পথ অতিক্রম করার সময়ের তুলনায় অতি নগণ্য, তাই ধাক্কাগুলো তাৎক্ষণিক। যেহেতু অণুগুলো সম্পূর্ণ স্থিতিস্থাপক গোলক, তাই ধাক্কার পূর্বে ও পরে এদের ভরবেগ ও গতিশক্তি সংরক্ষিত থাকে।

৬। গ্যাসের অণুগুলো আধারের সমগ্র আয়তনে মুক্তভাবে বিচরণক্ষম। গ্যাসের অণুগুলো অনবরত ধাক্কা খেলেও স্থিতাবস্থায় (steady state) এক ঘন আয়তনে অণুর সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকে। অর্থাৎ আদর্শ গ্যাসের আণবিক ঘনত্ব সর্বদা স্থির থাকে।

এখানে উল্লেখ থাকে যে, গ্যাসের মৌলিক স্বীকার্যগুলো যেসব গ্যাস সর্বতোভাবে মেনে চলে তাদেরকে **আদর্শ গ্যাস** বলে। কিন্তু বাস্তব গ্যাস (Real gas) সকল স্বীকার্য মেনে চলে না।

১১.১৪ গড় বেগ, গড় বর্গবেগ এবং গড় বর্গবেগের বর্গমূল

Mean velocity, mean square velocity and root mean square velocity

কোন একটি বস্তু অসম বেগে গমন করলে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব এবং মোট সময়ের ভাগফলকে গড় বেগ বলে। আবার, দুই বা ততোধিক বেগের গড় মানকে গড় বেগ বলে।

কিন্তু দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানকে গড় বর্গবেগ বলে। মনে করি গ্যাসের n সংখ্যক অণুর বেগ যথাক্রমে $c_1, c_2, \ldots \ldots c_3, \ldots \ldots c_n$। অতএব তাদের

গড় বেগ, $$\bar{c}_a = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots \ldots + c_n}{n} \qquad (18)$$

গড় বর্গবেগ $$c_a^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots \ldots + c_n^2}{n} \qquad (19)$$

পুনঃ দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানের বর্গমূলকে গড় বর্গবেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ বলে। অতএব গড় বর্গবেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ

$$c = \sqrt{\overline{c_n^2}} = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots \ldots + c_n^2}{n}} \quad (20)$$

সাধারণত মূল গড় বর্গবেগ গড় বেগ অপেক্ষা বেশি মানের হয়। নিচের উদাহরণ থেকে বিষয়টি স্পষ্ট হবে।

ধরা যাক চারটি অণুর বেগ যথাক্রমে 3, 4, 5 এবং 6 একক।

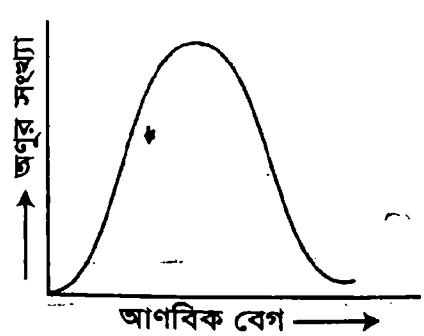
সুতরাং, এদের গড় বেগ, $\bar{c} = \frac{3+4+5+6}{4} = 4{\cdot}5$

এবং মূল গড় বর্গবেগ $\sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{3^2+4^2+5^2+6^2}{4}} = 4{\cdot}64$

১১.১৫ আণবিক বেগের বণ্টন
Distribution of Molecular Velocities

যে কোন পরিমাণ গ্যাসে অসংখ্য অণু থাকে। অবিরাম সংঘর্ষের ফলে অণুগুলোর গতিবেগের তারতম্য হয় এবং অণুগুলো বিভিন্ন বেগে বিভিন্ন দিকে গতিশীল। সংঘর্ষের কারণে প্রতিনিয়ত প্রতিটি অণুর শক্তি ও বেগের পরিবর্তন ঘটে। ফলে অণুগুলোর শক্তি ও বেগের অবিরাম পুনর্বণ্টন ঘটে। গ্যাসের গতিতত্ত্বে হিসেবের সুবিধার্থে একটি স্থির তাপমাত্রায় অণুগুলো মূল গড় বর্গ বেগে ছুটছে ধরা হয়।

ম্যাক্সওয়েল 1860 সালে তাত্ত্বিক যুক্তির সাহায্যে গাণিতিক নিয়মে প্রমাণ করেন যে স্থিতাবস্থায় (steady state) একটি গ্যাসের শূন্য হতে অসীম বেগের কতগুলো অণু থাকবে তার সংখ্যা নির্ধারণ সম্ভব। অণুগুলোর সংখ্যা ও এদের বেগের লেখচিত্র অঙ্কন করলে চিত্র ১১.২-এর অনুরূপ হবে। লেখচিত্র পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে স্থির অণুর ($c = 0$) সংখ্যা যে কোন মুহূর্তে অত্যন্ত কম। আবার অধিক গতিসম্পন্ন অণুর সংখ্যাও খুবই কম।



চিত্র ঃ ১১.২

অত্যন্ত কম বেগ হতে শুরু করে বেগ ক্রমশ বাড়তে থাকলে ঐ বেগে গতিশীল কণার সংখ্যাও বাড়তে থাকে। নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট বেগের অণুর সংখ্যা সর্বাধিক হয় এবং এরপর অণুর সংখ্যা বেগ বৃদ্ধির সাথে কমতে থাকে। বৃহত্তম অংশের এই গতিবেগকে ঐ তাপমাত্রায় **সর্বাধিক সম্ভাব্য বেগ** (most probable velocity) c_m বলা হয়। c_m-এর মান তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে বৃদ্ধি পায়।

সুতরাং, অণুর তিন ধরনের বেগের সংগে আমরা পরিচিত। এগুলো হচ্ছে গড় বেগ (c_{av}), মূল গড় বর্গবেগ (c_{rms}) এবং সর্বাধিক সম্ভাব্য বেগ (c_m), এদের অনুপাত নিম্নরূপ ঃ

$$c_{rms} : c_{av} : c_m = 1{\cdot}22 : 1{\cdot}12 : 1{\cdot}0$$

উদাহরণ ঃ ধরা যাক একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় 16টি অণুর বেগ বণ্টন ms^{-1}-এ যথাক্রমে 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8। এদের গড়বেগ

$$c_{av} = \frac{0+1+2+3+3+4+4+4+4+5+5+5+6+6+7+8}{16}$$

$$= 4{\cdot}19 \text{ ms}^{-1}$$

মূল গড় বর্গ বেগ

$$c_{rms} = c = \sqrt{\overline{c^2}} = \sqrt{\frac{0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2}{16}}$$

$$= 4{\cdot}64 \text{ ms}^{-1}$$

অণুগুলোর মধ্যে 4 ms^{-1} বেগের অণুর সংখ্যা সর্বাধিক। সুতরাং সর্বাধিক সম্ভাব্য বেগ $C_m = 4\text{ms}^{-1}$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে $\boxed{c_{rms} > c_{av} > c_m}$

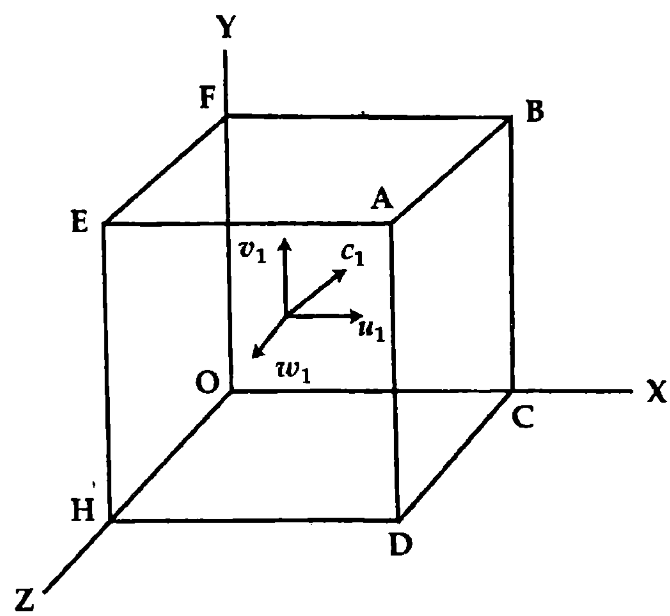
১১·১৬ গতিতত্ত্ব অনুসারে গ্যাসের চাপের সমীকরণ

Expression for pressure exerted by a gas on the basis of kinetic theory of gases

ছয় তলবিশিষ্ট আদর্শ স্থিতিস্থাপক পদার্থের একটি ঘনাকৃতি ফাঁপা পাত্র নিই। মনে করি এটি ABCDEFOH [চিত্র ১১·৩]। পাত্রটির প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য l । অতএব এর আয়তন $V = l^3$।

ধরি পাত্রটি M ভরের একটি আদর্শ গ্যাস দ্বারা পূর্ণ এবং গ্যাসের ঘনত্ব ρ। মনে করি গ্যাসের অণুর সংখ্যা n এবং প্রত্যেকটি অণুর ভর m। উক্ত অণুগুলোর মধ্য হতে একটি অণু বিবেচনা করি যার বেগ c_1 [চিত্র ১১·৩]। এই বেগকে OX, OY এবং OZ অক্ষ বরাবর যথাক্রমে u_1, v_1 এবং w_1 উপাংশে বিভাজন করি। অতএব আমরা লিখতে পারি,

$$c_1{}^2 = u_1{}^2 + v_1{}^2 + w_1{}^2$$



চিত্র ঃ ১১·৩

মনে করি অণুটি OX বরাবর u_1 বেগে গিয়ে ABCD তলকে আঘাত করল। অণুর ভর m হলে OX অক্ষ বরাবর তার ভরবেগ $= mu_1$। দেয়ালটির সাথে অণুর স্থিতিস্থাপক সংঘর্ষ ঘটে। ফলে অণুটি একই বেগে পশ্চাৎদিকে প্রতিক্ষিপ্ত (rebound) বা ফেরত আসে। অতএব সংঘর্ষের পর এর ভরবেগ $= -mu_1$

অণুটির বেগের u_1 উপাংশের দরুন ভরবেগের পরিবর্তন $= mu_1 - (-mu_1)$

$$= mu_1 + mu_1 = 2mu_1$$

আবার ABCD তলে একবার ধাক্কা খাবার পর EFOH তলে আর একবার ধাক্কা খাবে। OX অক্ষ বরাবর অণুটির বেগ u_1 হওয়ায় ABCD তল হতে EFOH তলে আসতে এর সময় লাগে $\frac{l}{u_1}$ অর্থাৎ $\frac{l}{u_1}$ সময় পর অণুটির বেগের u_1 উপাংশের দরুন ভরবেগের পরিবর্তন $= 2mu_1$

$$\text{অণুটির বেগের } u_1 \text{ উপাংশের জন্য ভরবেগের পরিবর্তনের হার} = \frac{\text{ভরবেগের পরিবর্তন}}{\text{সময়}}$$

$$= \frac{2mu_1}{l/u_1} = \frac{2mu_1{}^2}{l}$$

অনুরূপভাবে গ্যাস অণুটির বেগের v_1 উপাংশের জন্য ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{2mv_1{}^2}{l}$ এবং বেগের w_1 উপাংশের জন্য ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \frac{2mw_1{}^2}{l}$

ঐ অণুর মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার

$$= \frac{2mu_1^2}{l} + \frac{2mv_1^2}{l} + \frac{2mw_1^2}{l}$$

$$= \frac{2m}{l}(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) = \frac{2mc_1^2}{l}$$

দ্বিতীয় অণুর বেগ c_2 হলে একইভাবে দেখান যায় যে, তার মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার

$$= \frac{2mc_2^2}{l}$$

n-তম অণুর বেগ C_n হলে, এর মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার $= \dfrac{2mc_n^2}{l}$

পাত্রস্থিত n সংখ্যক অণুর মোট ভরবেগের পরিবর্তনের হার

$$= \frac{2m}{l}(c_1^2 + c_2^2 + \qquad + c_n^2)$$

$$= \frac{2mn}{l}\left(\frac{c_1^2 + c_2^2 + \dots \dots + c_n^2}{n}\right)$$

$$= \frac{2mn}{l}c^2 \qquad (21)$$

$\left[\text{এখানে } c = \text{গড় বর্গবেগের বর্গমূল} = \sqrt{\dfrac{c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2}{n}}\right]$

কিন্তু নিউটনের দ্বিতীয় সূত্রানুযায়ী এই ভরবেগের পরিবর্তনের হার অণুগুলোর উপর বিভিন্ন দেয়াল কর্তৃক প্রযুক্ত বলের সমান। ঘনকটির দেয়ালের উপর ধাক্কাজনিত চাপ P হলে ঘনকের ছয়টি দেয়ালের উপর মোট বল

$$= \text{ক্ষেত্রফল} \times \text{চাপ} = 6l^2 \times P \qquad (22)$$

সমীকরণ (21) এবং সমীকরণ (22) হতে পাই,

$$6l^2 \times P = \frac{2mnc^2}{l}$$

বা, $= \dfrac{2mnc^2}{6l^2 \times l} = \dfrac{mnc^2}{3l^3} = \dfrac{1}{3}\dfrac{mnc^2}{l^3}$ (23)

বা, $\boxed{P = \dfrac{1}{3}\dfrac{mnc^2}{V}}$ (24) $[\because l^3 = V]$

এখানে $mn = M =$ মোট ভর

অতএব $\boxed{P = \dfrac{1}{3}\dfrac{M}{V}\overline{c^2}}$

আবার $\dfrac{M}{V} = \rho =$ ঘনত্ব

$$\boxed{\therefore\ P = \frac{1}{3}\rho\overline{c^2}} \qquad (25)$$

একক আয়তনে অণুগুলোর গড় গতিশক্তি,

$$E = \frac{1}{2}\rho\overline{c^2}$$

সমীকরণ (25)-কে লেখা যায়,

$$\boxed{P = \frac{1}{3}\rho\overline{c^2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\rho\overline{c^2} = \frac{2}{3}E} \qquad (26)$$

অর্থাৎ, গ্যাসের চাপ এর একক আয়তনের অণুগুলোর গতিশক্তির দুই-তৃতীয়াংশ।

অতএব সমীকরণ (24) হতে সমীকরণ (26) পর্যন্ত প্রতিটি সমীকরণই গ্যাসের চাপের সমীকরণ বা রাশিমালা প্রকাশ করে।

১১.১৭ গ্যাসের গতিতত্ত্বের প্রয়োগ
Application of kinetic theory of gases

পদার্থবিজ্ঞানে গ্যাসের গতিতত্ত্বের বহুল প্রয়োগ পরিলক্ষিত হয়। প্রয়োগসমূহ নিম্নে আলোচনা করা হল—.

১। বয়েল-এর সূত্র (Boyle's law) : গ্যাসের গতিতত্ত্বের সাহায্যে বয়েল-এর সূত্র প্রতিপাদন করা যায়। বয়েল-এর সূত্র অনুযায়ী **সুষম তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন এর চাপের ব্যস্তানুপাতিক।**

মনে করি T পরম তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন V এবং চাপ P.

বয়েল-এর সূত্র হতে পাই,

$P \propto \frac{1}{V}$, যখন T স্থির থাকে

বা, $P =$ ধ্রুব সংখ্যা $\times \frac{1}{V}$

বা, $PV =$ ধ্রুব সংখ্যা

পুনরায় গতিতত্ত্ব অনুসারে গ্যাসের চাপ,

$$P = \frac{1}{3}\frac{mnc^2}{V}$$

$$\text{বা,} \quad PV = \frac{1}{3}mnc^2 = \frac{1}{3}\,M.c^2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}Mc^2 = \frac{2}{3}E \qquad (27)$$

এখানে, E = গ্যাস অণুসমূহের মোট গতিশক্তি

অণুসমূহের গতিশীলতার দরুন কোন বস্তু তাপ প্রাপ্ত হয় অর্থাৎ তাপ গতিরই একটি ভিন্ন রূপ। তাপমাত্রা স্থির থাকলে নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের তাপের পরিমাণ স্থির থাকে। ফলে মোট গতিশক্তিও স্থির থাকে। অতএব স্থির তাপমাত্রায় মোট গতিশক্তি K. E. $= \frac{1}{2}mnc^2 =$ ধ্রুব সংখ্যা।

পুনঃ, তাপমাত্রা স্থির থাকলে $PV =$ ধ্রুব সংখ্যা। **এটিই হল বয়েল-এর সূত্র।** গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে এটি প্রমাণিত হল।

২। আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ (Perfect gas equation) : গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে আদর্শ গ্যাস সমীকরণ প্রতিপাদন করা যায়।

গ্যাসের গতিতত্ত্ব অনুযায়ী, কোন গ্যাসের তাপশক্তি তার অণুগুলোর গতিশক্তির ফলশ্রুতি। পরম শূন্য তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের অণুগুলোর তাপশক্তি শূন্য হয়। ফলে গ্যাসের অণুগুলোর গতিশক্তি এবং গড় বর্গবেগের বর্গমূল-এর মানও শূন্য হয়। কোন গ্যাসে তাপ প্রয়োগ করলে, এটি গ্যাসের অণুসমূহের গতিশক্তি হিসেবে প্রকাশ পায়।

$$K.E. = \frac{1}{2}\,mnc^2 = \frac{1}{2}\,Mc^2 \qquad (28)$$

এখানে, $m =$ প্রতিটি অণুর ভর, $n =$ অণুর সংখ্যা, $c =$ গড় বর্গবেগের বর্গমূল এবং $M = mn =$ গ্যাসের ভর।

আমরা পূর্বেই দেখেছি যে, কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে অণুর গড় গতিশক্তি পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

আমরা পাই,

$\frac{1}{2}mnc^2 \propto T$; বা, $\frac{1}{2}Mc^2 \propto T$; বা, $\frac{1}{2}Mc^2 = KT$

এখানে $K =$ সমানুপাতিক ধ্রুবক।

কিন্তু গ্যাসের চাপের রাশিমালা হতে আমরা পাই,

$$P = \frac{1}{3}\frac{mnc^2}{V} = \frac{1}{3}\frac{Mc^2}{V}$$

বা, $PV = \frac{1}{3}Mc^2 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}Mc^2 = \frac{2}{3}\ KT$

বা, $PV = RT$ (29)

এখানে, $R = \frac{2}{3}K =$ একটি ধ্রুব সংখ্যা।

PV = RT সমীকরণকে আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ বলে।

এখানে উল্লেখ থাকে যে, V = এক গ্রাম অণু গ্যাসের আয়তন। যদি n গ্রাম অণু গ্যাস বিবেচনা করা হয়, তবে আদর্শ গ্যাস সমীকরণ হয় $PV = nRT$। **গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে এটি প্রমাণিত হল।**

বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাসের অবস্থার সমীকরণ PV = RT সর্বদা মেনে চলে না। শুধুমাত্র উচ্চ তাপমাত্রা এবং নিম্ন চাপে বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাস সমীকরণ অনুসরণ করে।

স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে বাস্তব গ্যাস আদর্শ গ্যাস সমীকরণ অনুসরণ না করার মূল কারণ নিম্নরূপ ঃ

গতিতত্ত্ব থেকে আদর্শ গ্যাস সমীকরণ প্রতিপাদন করার সময় গ্যাস অণুগুলিকে শুধুমাত্র ভর বিন্দু (mass point) ধরা হয়। অর্থাৎ অণুগুলোর আয়তন বিবেচনা করা হয়নি। এছাড়া গ্যাস অণুগুলোর মধ্যকার আকর্ষণ বল বিবেচনা করা হয়নি। বিখ্যাত ওলন্দাজ পদার্থবিদ ভ্যানডার ওয়ালস (Van der Waals) গ্যাস অণুগুলোর সীমিত আকার এবং এদের মধ্যকার মধ্যে আন্তঃআণবিক বল বিবেচনা করে আদর্শ গ্যাস সমীকরণটি নিম্নরূপ সংশোধন করেন ঃ

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \qquad (30)$$

এখানে a ও b রাশিদ্বয় যে কোন নির্দিষ্ট গ্যাসের জন্য ধ্রুব, তবে সব গ্যাসের জন্য একই মানের নয়।

৩। **চার্লস-এর সূত্র (Charles's law)** ঃ P = চাপ, V = আয়তন, R = গ্যাস ধ্রুবক এবং T = গ্যাসের পরম তাপমাত্রা হলে আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ হতে পাই,

$PV = RT.$

এখন চাপ স্থির থাকলে,

$\frac{V}{T} = \frac{R}{P} =$ ধ্রুব সংখ্যা বা, V = ধ্রুব সংখ্যা × T

$V \propto T$

অর্থাৎ চাপ স্থির থাকলে নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের আয়তন এর পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই চার্লস-এর সূত্র। অতএব গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে চার্লস-এর সূত্র প্রমাণিত হল।

৪। **চাপের সূত্র (Law of pressure)** ঃ আদর্শ গ্যাসের সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$PV = RT$

আমরা আরও জানি,

$PV = \frac{1}{3}Nmc^2$, এখানে N = এক গ্রাম-অণু গ্যাসের অণুর সংখ্যা যাকে অ্যাভোগ্যাড্রো সংখ্যা বলে।

$N = 6.0222 \times 10^{26}$ অণু/কিলোমোল। $m =$ একটি অণুর ভর $= \frac{M}{N}$।

$\frac{1}{3}Nmc^2 = RT$

বা, $mc^2 = 3\frac{R}{N}T = 3KT$, এখানে K = বোল্‌জম্যান ধ্রুবক $= 1.381 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$।

বর্ণনা অনুযায়ী 2 kg হাইড্রোজেনে, 32 kg অক্সিজেনে, 28 kg নাইট্রোজেন, 12 kg কার্বনে প্রত্যেক ক্ষেত্রে 6.0222×10^{26} অণু থাকবে।

$PV = \frac{1}{3} Nmc^2$ সমীকরণ হতে পাই

$$PV = \frac{1}{3} N \times 3KT = NKT \tag{31}$$

উপরের সমীকরণে N ও K ধ্রুব সংখ্যা। অতএব স্থির আয়তনে, $\boxed{P \propto T.}$

আয়তন স্থির থাকলে নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের চাপ পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক। এটিই হল চাপের সূত্র। অতএব গতিতত্ত্ব হতে চাপের সূত্র প্রমাণিত হল।

৫। অ্যাভোগ্যাড্রোর সূত্র (Avogadro's law) : 'একই তাপমাত্রা ও চাপে সম আয়তনের সকল গ্যাসে সমান সংখ্যক অণু থাকে।' এটিই অ্যাভোগ্যাড্রোর সূত্র।

একই পরম তাপমাত্রা T, আয়তন V ও চাপ P-এ দুটি গ্যাস বিবেচনা করি। প্রথম গ্যাসের অণুর সংখ্যা n_1 এবং প্রতিটি অণুর ভর m_1। যদি এর গড় বর্গবেগের বর্গমূল c_1 হয়, তবে এর গতিশক্তি,

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2$$

ধরি দ্বিতীয় গ্যাসের অণুর সংখ্যা n_2 এবং প্রতিটি অণুর ভর m_2। c_2 এর গড় বর্গবেগের বর্গমূল হলে গতিশক্তি,

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 c_2^2$$

কিন্তু গ্যাস দুটি একই তাপমাত্রায় থাকায় এদের গতিশক্তি সমান।

আমরা পাই,

$$E_1 = E_2$$

বা, $$\frac{1}{2} m_1 c_1^2 = \frac{1}{2} m_2 c_2^2 \tag{32}$$

গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে প্রথম গ্যাসের জন্য পাই,

$$PV = \frac{1}{3} m_1 n_1 c_1^2$$

এবং

দ্বিতীয় গ্যাসের জন্য পাই,

$$PV = \frac{1}{3} m_2 n_2 c_2^2$$

$$\frac{1}{3} m_1 n_1 c_1^2 = \frac{1}{3} m_2 n_2 c_2^2 \tag{33}$$

উপরের দুটি সমীকরণ হতে পাই,

$$\frac{\frac{1}{3} m_1 n_1 c_1^2}{\frac{1}{2} m_1 c_1^2} = \frac{\frac{1}{3} m_2 n_2 c_2^2}{\frac{1}{2} m_2 c_2^2}$$

বা, $$n_1 = n_2 \tag{34}$$

অতএব প্রমাণিত হল যে, **একই তাপমাত্রায় এবং চাপে সমান আয়তনের সকল গ্যাসে সমান সংখ্যক অণু থাকে। এটিই হল অ্যাভোগ্যাড্রোর সূত্র।**

১১.১৮ এক গ্রাম অণু গ্যাসের গতিশক্তি

Kinetic energy per gram-molecule of a gas

আণবিক ওজন গ্রামে প্রকাশিত হলে একে গ্রাম-অণু বলে। এখন আমরা এক গ্রাম-অণু গ্যাসের গতিশক্তির সমীকরণ বের করব।

আমরা জানি,

$$PV = \frac{1}{3} Mc^2 \tag{35}$$

BG & JEWEL

এখানে M = এক গ্রাম-অণু গ্যাসের ভর।
আদর্শ গ্যাসের বেলায় আমরা জানি,

$$PV = RT \tag{36}$$

এখানে V = এক গ্রাম-অণু গ্যাসের আয়তন এবং R = সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক।

সমীকরণ (29) হতে পাই,

$$\frac{1}{3}Mc^2 = RT \tag{37}$$

$$\therefore \boxed{c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}} \tag{38}$$

এখানে c হচ্ছে গড় বর্গবেগের বর্গমূল।

যেহেতু R ও M ধ্রুবক, অতএব গ্যাস অণুর গড় বর্গবেগ গ্যাসের পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

আবার, সমীকরণ (37)-এর উভয় পার্শ্বকে $\frac{3}{2}$ দ্বারা গুণ করলে পাই,

$$\frac{1}{2}Mc^2 = \frac{3}{2}RT = K.E. \tag{39}$$

T-পরম তাপমাত্রায় এক গ্রাম-অণু গ্যাসের রৈখিক গতিশক্তি $\boxed{\frac{3}{2}RT}$-এর সমান।

১১.১৯ গতিতত্ত্ব হতে তাপমাত্রার ব্যাখ্যা

Interpretation of temperature from kinetic theory of gases

আমরা জানি,

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$ এখানে, $\frac{3R}{M}$ = ধ্রুব সংখ্যা।

$$\therefore \quad c \propto \sqrt{T} \tag{40}$$

এবং

$$\boxed{c^2 \propto T} \tag{41}$$

সমীকরণ (40) এবং (41) হতে বলা যায়— গড় বর্গবেগের বর্গমূল পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক এবং গড় বর্গবেগ পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

যখন $T = 0$, তখন $c^2 = 0$ এবং $c = 0$

সুতরাং পরম তাপমাত্রা হল এমন এক তাপমাত্রা যে তাপমাত্রায় গ্যাস অণুগুলোর রৈখিক বেগ শূন্য হবে অর্থাৎ অণুগুলো স্থির হয়ে যাবে।

এখন সমীকরণ (39) হতে পাই,

$$\frac{1}{2}Mc^2 = \frac{3}{2}RT$$

উভয় পার্শ্বকে N দ্বারা ভাগ করে পাই, $$\frac{1}{2}\frac{M}{N}c^2 = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T \tag{42}$$

এখানে N হল অ্যাভোগ্যাড্রো সংখ্যা (Avogadro's number)। অ্যাভোগ্যাড্রো সংখ্যা বলতে এক গ্রাম-অণু গ্যাসে অণুর সংখ্যাকে বুঝায়।

কিন্তু $\frac{M}{N} = m$ এবং $\frac{R}{N} = K$

এখানে K হচ্ছে বোল্‌জম্যান ধ্রুবক (Boltzmann's constant)। এর মান = $\boxed{1.38 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}}$

$\therefore$ সমীকরণ (42) হতে আমরা পাই,

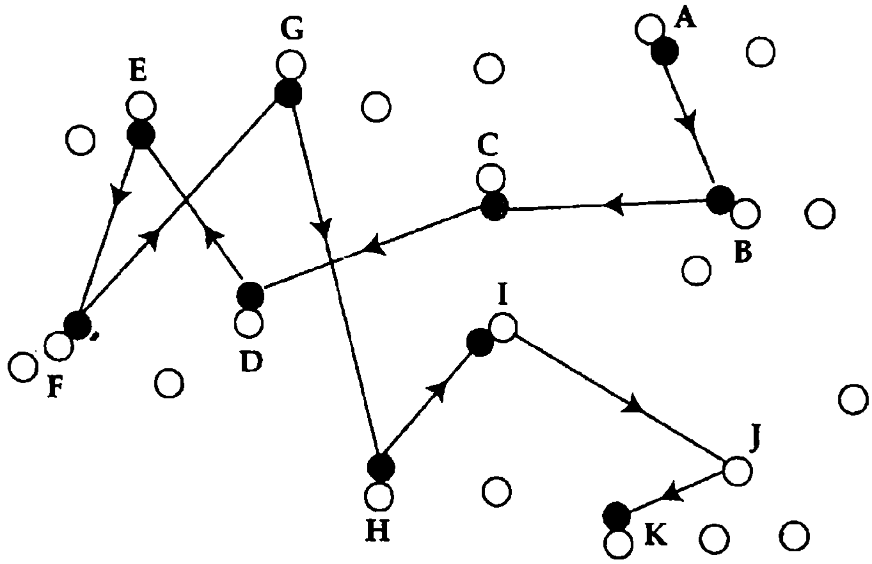
$$\boxed{\frac{1}{2}mc^2 = \frac{3}{2}KT} \tag{43}$$

অর্থাৎ একটি অণুর গতিশক্তি = $\frac{3}{2}$ × বোল্‌জম্যান ধ্রুবক × পরম তাপমাত্রা।

সুতরাং কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের ক্ষেত্রে একটি অণুর গতিশক্তি পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক অর্থাৎ গ্যাসের সুষম তাপমাত্রার মূল কারণ এর অণুগুলোর মধ্যে গতিশক্তির সুষম বণ্টন। গড় গতিশক্তি বৃদ্ধি পেলে তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাবে। আবার গড় গতিশক্তি হ্রাস পেলে তাপমাত্রা হ্রাস পাবে। অতএব পরম শূন্য তাপমাত্রায় অণুর গতিশক্তি শূন্য হবে। **এটিই হল গতিতত্ত্ব অনুযায়ী তাপমাত্রার ব্যাখ্যা।**

১১.২০ গড় মুক্ত পথ
Mean free path

গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে আমরা জানি যে, গ্যাসের অণুগুলো অবিরত বিক্ষিপ্ত গতিতে চারদিকে ছুটাছুটি করছে এবং পরস্পরের সাথে ও আধারে দেয়ালের সাথে ধাক্কা খাচ্ছে। অণুগুলোর পরস্পরের মধ্যে কোন আকর্ষণ বল নেই।



চিত্র ১১.৪

তাই তাদের বেগ অপরিবর্তিত থাকে। **পর পর দুটি ধাক্কার ভিতর অণুগুলো সরলরেখায় যতটুকু পথ গমন করে তাকে মুক্ত পথ (free path) বলে।** চিত্রে A একটি অণু। এটি অপর একটি অণু B-কে ধাক্কা দিয়ে BC পথে চলে গেল এবং C স্থানে গিয়ে অপর একটি অণুর সাথে ধাক্কা খেল। অণুটি যদি D স্থানে গিয়ে অপর একটি অণুর সাথে, E স্থানে গিয়ে আর একটি অণুর সাথে ধাক্কা খায় ইত্যাদি [চিত্র ১১.৪] তাহলে BC, CD, DE হল এক একটি মুক্ত পথ। এই মুক্ত পথের দৈর্ঘ্য সকল সময় সমান হয় না।. সেজন্য গড় মুক্ত পথ নেয়া হয়। **পর পর ধাক্কাগুলোর ভিতর একটি অণু যে গড় দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে গড় মুক্ত পথ বলে।**

ধরি, A হতে B-এর দূরত্ব $= S_1$

B হতে C-এর দূরত্ব $= S_2$

C হতে D-এর দূরত্ব $= S_3$,

যদি মোট S দূরত্ব অতিক্রান্তে N সংখ্যক ধাক্কা সংঘটিত হয়, তবে ঐ গ্যাস অণুর গড় মুক্ত পথ,

$$\lambda = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots \dots + S_n}{N} = \frac{S}{N} \qquad (44)$$

$$= \frac{\text{মোট অতিক্রান্ত পথ}}{\text{ধাক্কার সংখ্যা}}$$

বিজ্ঞানী **ক্লসিয়াস** (Clausius) গড় মুক্ত পথের গাণিতিক রাশিমালা বের করেন। উক্ত রাশিমালা নির্ণয় করতে গিয়ে তিনি এই স্বীকার্য গ্রহণ করেন যে, একটি মাত্র অণু ছুটছে এবং বাকি অণুসমূহ স্থিরাবস্থায় আছে।

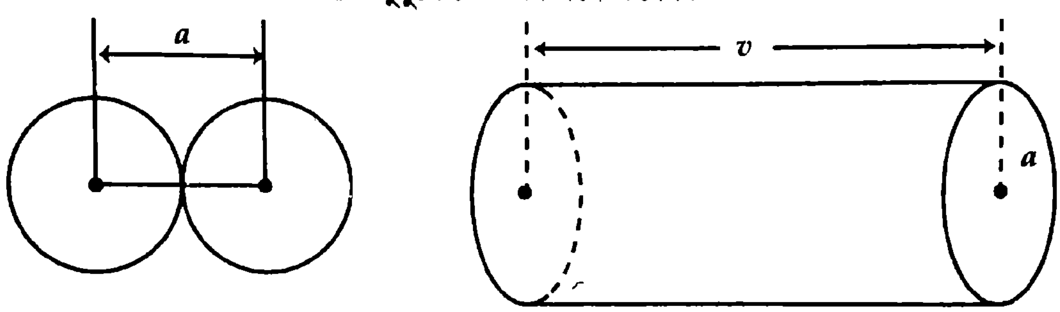
১১·২১ অণুর ব্যাস এবং গড় মুক্ত পথের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between the diameter of a molecule and mean free path

গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে আমরা জানি যে, গ্যাসের অণুগুলো সর্বদা পরস্পরের সাথে এবং আধারের দেয়ালের সাথে ধাক্কা খায়। অণুগুলোর পরস্পরের মধ্যে আকর্ষণ বল না থাকায়, তাদের বেগের কোন পরিবর্তন ঘটে না। সংঘর্ষের ফলে অণুগুলো সমবেগে সরলরেখায় গমন করে। পর পর ধাক্কাগুলোর ভিতর অণু যে গড় দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে গড় মুক্ত পথ বলে। যদি কোন গ্যাস অণু N সংখ্যক ধাক্কার পর S দূরত্ব অতিক্রম করে, তবে তার গড় মুক্ত পথ

$$\boxed{\lambda = \frac{\text{মোট দূরত্ব}}{\text{মোট ধাক্কার সংখ্যা}} = \frac{S}{N}}$$

গ্যাস অণুর সংখ্যা এবং অণুগুলোর ব্যাসের সাপেক্ষে গড় মুক্ত পথের রাশিমালা বের করা যায়। বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস গড় মুক্ত পথের গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন করেন। এই রাশিমালা প্রতিপাদন করতে গিয়ে তিনি একটি মাত্র অণুর গতি বিবেচনা করেন এবং অন্য অণুগুলোকে স্থির মনে করেন।



চিত্র ১১·৫

মনে করি প্রতি একক আয়তনে n সংখ্যক অণু আছে এবং প্রতিটি অণুর ব্যাস a। আরও মনে করি একটি অণু v বেগে ছুটছে। আলোচ্য অণুটির কেন্দ্রবিন্দুকে কেন্দ্র করে 'a' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অংকন করি। এই বৃত্তের উপর v দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি চোঙ বিবেচনা করি [চিত্র ১১·৫]। চোঙটির আয়তন $= \pi a^2 v$। এই চোঙের মধ্যে যে সব অণুর কেন্দ্র থাকবে আলোচ্য অণুটি এক সেকেন্ডে তাদের সাথে ধাক্কা খাবে।

প্রতি একক আয়তনে অণুর সংখ্যা n হলে চোঙটির মধ্যে অণুর সংখ্যা $= \pi a^2 vn$। আলোচ্য অণুটি যদি প্রতি সেকেন্ডে N সংখ্যক অণুর সাথে ধাক্কা খায়, তবে আমরা বলতে পারি অণুর ধাক্কার সংখ্যা = N

$N = \pi a^2 vn$। অণুর বেগ v হওয়ায়, অণু কর্তৃক 1 সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব

$S = v \times 1 = v$

গড় মুক্ত পথ, $\lambda = \dfrac{S}{N} = \dfrac{v}{\pi a^2 vn}$

$$\boxed{\text{বা,}\quad \lambda = \frac{1}{\pi a^2 n}} \qquad (45)$$

বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস এই রাশিমালাটি প্রতিষ্ঠা করেন। উক্ত রাশিমালা হতে জানা যায় যে, **গড় মুক্ত পথ একক আয়তনে অণুর সংখ্যার এবং আণবিক ব্যাসের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।**

সমীকরণ (45)-এর ডানপক্ষের হর ও লবকে m দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\lambda = \frac{m}{\pi a^2 mn} = \frac{m}{\pi a^2 \rho} \quad [\because mn = \text{একক আয়তনের গ্যাস অণুগুলোর ভর} = \text{গ্যাসের ঘনত্ব} = \rho]$$

m, π ও a ধ্রুব,

$$\lambda \propto \frac{1}{\rho}$$

অর্থাৎ, **গড় মুক্ত পথ গ্যাসের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক।**

পুনঃ গ্যাসের ঘনত্ব 'ρ' গ্যাসের চাপের সমানুপাতিক এবং তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক। যেহেতু $\lambda \propto \frac{1}{\rho}$, অতএব গড় মুক্ত পথ গ্যাসের চাপের ব্যস্তানুপাতিক এবং তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস গড় মুক্ত পথের রাশিমালা প্রতিষ্ঠা করতে স্বীকার্য গ্রহণ করেন যে একটি মাত্র অণু গতিশীল এবং অন্য অণুগুলো স্থির। কিন্তু প্রকৃতপক্ষে সকল অণুই গতিশীল। পরে ম্যাক্সওয়েল তার বেগ বণ্টন সূত্রের অবলম্বনে গড় মুক্ত পথের নিম্নোক্ত রাশিমালা নির্ণয় করেন,

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi a^2 n}} \qquad (46)$$

গড় মুক্ত পথ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সাধারণত সমীকরণ (46) ব্যবহার করা হয়।

গড় মুক্ত পথের নির্ভরশীলতা (Dependence of mean free path)

গড় মুক্ত পথের সমীকরণ, $\lambda = \frac{1}{\pi a^2 n}$ হতে দেখা যাচ্ছে–

(i) $\boxed{\lambda \propto \frac{1}{n}}$ অর্থাৎ **গড় মুক্ত পথ একক আয়তনে অণুর সংখ্যার ব্যস্তানুপাতিক।**

(ii) $\boxed{\lambda \propto \frac{1}{a^2}}$ অর্থাৎ **গড় মুক্ত পথ অণুর ব্যাসের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক।** আবার, গ্যাসের ঘনত্ব ρ একক আয়তনে অণুর সংখ্যা n-এর সমানুপাতিক। কিন্তু গ্যাসের ঘনত্ব গ্যাসের চাপের সমানুপাতিক এবং তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক। যেহেতু মুক্ত গড় পথ, $\lambda \propto \frac{1}{n}$, অতএব **মুক্ত গড় পথ গ্যাসের চাপের ব্যস্তানুপাতিক এবং তাপমাত্রার সমানুপাতিক।**

১১·২২ সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্পীয় চাপ
Saturated and unsaturated vapour pressure

কোন তরলকে একটি আবদ্ধ পাত্রে রেখে দিলে তরল পদার্থের মুক্ত তল থেকে অনবরত তরলের অণু বাষ্পীভূত হয়ে তরল তলের উপরে পাত্রের মধ্যে ইতস্তত ছুটাছুটি করতে থাকে। এই ছুটাছুটি করার সময় অণুগুলো পরস্পরের সঙ্গে এবং পাত্রের গায়ে ধাক্কা খায়। এতে পাত্রের দেওয়ালের উপরে একটি চাপের সৃষ্টি হয়। এই চাপকেই বাষ্প চাপ বলে। বাষ্পীভূত অণুগুলো ইতস্তত ছুটাছুটির সময় তরল পৃষ্ঠেও আঘাত হানে এবং তরলের মধ্যে আটকে যায়। তরলের মুক্ত তল হতে নির্গত বাষ্পীভূত অণুর সংখ্যা যত বাড়ে তরলে ফিরে আসা অণুর সংখ্যাও বাড়তে থাকে। ক্রমে এমন একটা অবস্থার সৃষ্টি হয় যখন বাষ্পে রূপান্তরিত অণুর সংখ্যা এবং তরলে ফিরে আসা অণুর সংখ্যা সমান হয়। অর্থাৎ ঐ আবদ্ধ স্থানে যতটুকু বাষ্প কণা থাকা সম্ভব তা পূর্ণ হয়েছে এবং অতিরিক্ত বাষ্প কণা ঐ স্থানে থাকতে পারে না। এ অবস্থায় ঐ স্থান বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয়েছে বলা হয়। তাপমাত্রার কমবেশি হলে ঐ স্থানের বাষ্পকণার ধারণ ক্ষমতাও কমবেশি হবে। তবে নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি আবদ্ধ স্থানের বাষ্পধারণ ক্ষমতা নির্দিষ্ট থাকে; অতিরিক্ত বাষ্প ধারণ করতে পারে না। এ অবস্থায় বাষ্প যে চাপ দেয় তাকে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে। নিম্নে বাষ্প চাপ সম্পর্কিত কয়েকটি সংজ্ঞা দেয়া হল।

সম্পৃক্ত বাষ্প : **কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন আবদ্ধ স্থান যখন সর্বাধিক পরিমাণ বাষ্প ধারণ করে তখন ঐ বাষ্পকে সম্পৃক্ত বাষ্প বলে।**

সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ : **কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন আবদ্ধ স্থানের বাষ্প যে সর্বাধিক চাপ প্রয়োগ করে তাকে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।** সংক্ষেপে বলা যায় **সম্পৃক্ত বাষ্প যে চাপ প্রয়োগ করে তাকে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।**

তাৎপর্য : "কোন স্থানের সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ 1·336 mm পারদ" এই উক্তি দ্বারা বুঝি সংশ্লিষ্ট স্থানে বাষ্পে সর্বাধিক 1·336 mm পারদ চাপ প্রয়োগ করবে।

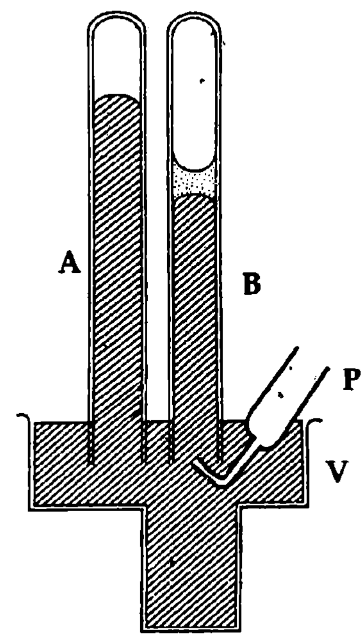
অসম্পৃক্ত বাষ্প : **একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন স্থানে বাষ্পের পরিমাণ যদি এমন হয় যে তা আরও অতিরিক্ত বাষ্প ধারণ করতে পারে, তবে ঐ বাষ্পকে অসম্পৃক্ত বাষ্প বলে।**

অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ : **কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন আবদ্ধ স্থানের বাষ্প যদি সর্বাধিক বাষ্প চাপ অপেক্ষা কম চাপ প্রয়োগ করে, তবে তাকে অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।** সংক্ষেপে বলা যায়–**অসম্পৃক্ত বাষ্প যে চাপ প্রয়োগ করে তাকে অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।**

তাৎপর্য ঃ "কোন স্থানের অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ 1.033 mm পারদ" এই উক্তি দ্বারা বুঝি সংশ্লিষ্ট স্থানের বাষ্প 1.033 mm পারদ চাপ অপেক্ষা অধিক চাপ প্রয়োগ করার ক্ষমতা রাখে।

নিম্নের পরীক্ষা থেকে সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপের স্পষ্ট ধারণা পাওয়া যেতে পারে।

পরীক্ষা ঃ 1 m লম্বা এবং 3 mm ব্যাসবিশিষ্ট দুটি ব্যারোমিটার নল (A, B) পারদপূর্ণ করে একটি পারদ পাত্রে খাড়াভাবে উপুড় করে রাখা হল [চিত্র ১১.৬]। এ অবস্থায় উভয় নলের পারদ স্তম্ভের উচ্চতা সমান হবে, কেননা উভয় নলই পরীক্ষাগারে বায়ুমণ্ডলের চাপ নির্দেশ করবে। পারদ স্তম্ভের উপরের ফাঁকা স্থানকে **টরিসেলীর শূন্য স্থান** বলে। এখন একটি বাঁকা পিপেটের সাহায্যে B নলে ফোঁটা ফোঁটা করে পানি প্রবেশ করানো হল। পারদের চেয়ে হাল্কা বলে পানি পারদ স্তম্ভের উপরে টরেসেলীর শূন্যস্থানে উঠে আসবে। ঐ স্থানে চাপ খুব কম হওয়ায় পানি বাষ্পে পরিণত হবে; ফলে বাষ্পচাপে পারদস্তম্ভ নিচে নেমে যাবে। এ থেকে বোঝা যায় যে বাষ্প পারদ স্তম্ভের উপরে কিছুটা চাপ প্রয়োগ করেছে। এভাবে পিপেটের সাহায্যে ফোঁটা ফোঁটা করে পানি B নলে প্রবেশ করতে থাকলে দেখা যাবে যে পারদ স্তম্ভ ধীরে ধীরে নিচে নামছে। কিন্তু একসময় দেখা যাবে যে পানি আর বাষ্পীভূত না হয়ে পারদের উপরে জমা হচ্ছে এবং পারদস্তম্ভ একটি নির্দিষ্ট অবস্থানে স্থির থাকছে। এ অবস্থায় বোঝা যায় যে টরেসেলীর শূন্যস্থান বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয়েছে। এতে প্রমাণিত হয় যে, একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি আবদ্ধ স্থানের বাষ্প ধারণা ক্ষমতা সীমিত। এ অবস্থায় বাষ্প তরলের সংস্পর্শে সাম্য অবস্থায় থাকতে পারে এবং বাষ্প চাপ সর্বোচ্চ হয়। এই চাপই হল সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ। এই পরীক্ষায় নল দুটির পারদ স্তম্ভের পার্থক্য থেকে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ নির্ণয় করা যায়। সম্পৃক্ত অবস্থায় আসার পূর্ব পর্যন্ত নলের মধ্যে যে বাষ্প থাকে, তাকে অসম্পৃক্ত বাষ্প এবং সংশ্লিষ্ট চাপকে অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলা হয়। অসম্পৃক্ত বাষ্প কখনও তরলের সংস্পর্শে সাম্য অবস্থায় থাকতে পারে না।



চিত্র ১১.৬

সম্পৃক্ত চাপের উপরে তাপমাত্রা, আয়তন এবং তরলের প্রকৃতির প্রভাব ঃ

(ক) তাপমাত্রার প্রভাব ঃ বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হওয়ার পর যদি টরেসেলীর শূন্যস্থানের তাপমাত্রা বৃদ্ধি করা হয়, তবে দেখা যাবে পারদস্তম্ভ আরও নিচে নেমে গেছে। এর অর্থ হল, পানি আরও বাষ্পীভূত হচ্ছে অর্থাৎ টরেসেলীর শূন্যস্থানের বাষ্প ধারণ ক্ষমতা বেড়ে গেছে। এ থেকে সিদ্ধান্ত নেয়া যায়, **তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বৃদ্ধি পায়।**

(খ) আয়তনের প্রভাব ঃ পরীক্ষালব্ধ ফলাফলে দেখা যায় যে **সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বাষ্পের আয়তনের উপর নির্ভর করে না।**

(গ) তরলের প্রকৃতির প্রভাব ঃ বিভিন্ন তরলের জন্য সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ ভিন্ন ভিন্ন হয়। উপরের পরীক্ষায় ভিন্ন ভিন্ন তরল নিলে দেখা যাবে যে সম্পৃক্ত অবস্থায় এক একটি তরলের জন্য বায়ুস্তম্ভের উচ্চতা এক এক রকম হবে। এ থেকে বুঝা যায়, **সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ তরলের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে।**

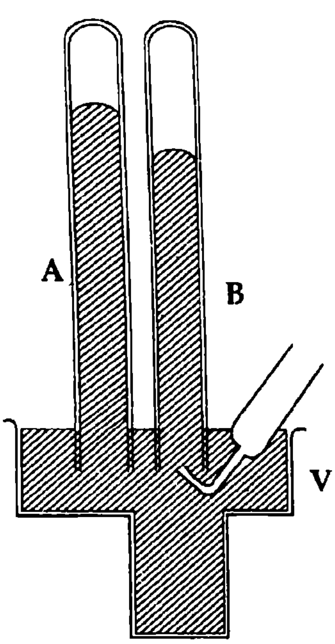
১১.২৩ সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্পের বিশেষত্ব
Characteristics of saturated and unsaturated vapour

১। সম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল-এর সূত্র মানে না ঃ এটা নিম্নলিখিতভাবে প্রমাণ করা যায় ঃ

প্রথমে একই প্রকার দুটি ব্যারোমিটারের নল A ও B [চিত্র ১১.৬] শুষ্ক ও বিশুদ্ধ পারদে পূর্ণ করে পারদপূর্ণ কাচের পাত্র V-এ উপুড় করে পাশাপাশি দণ্ডায়মান অবস্থায় রাখা হয়। অতঃপর একটি পিপেট P-এর সাহায্যে B নলে কিছু পানি ঢুকানো হয় যাতে পারদের উপরিস্থিত স্থান সম্পৃক্ত বাষ্প দ্বারা পূর্ণ থাকে এবং পারদের উপর কিছু পানি জমা থাকে। এ অবস্থায় দুই নলের পারদ স্তম্ভের উচ্চতার পার্থক্যই ঘরের তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ

নির্দেশ করবে। এখন B নলটিকে ক্রমশ পাত্রের পারদের ভিতর ঠেলে দেয়া হয়। এতে দেখা যাবে যে, সম্পৃক্ত বাষ্পের আয়তন কমে যাচ্ছে এবং একটু একটু করে জলীয় বাষ্প পানিতে পরিণত হয়ে পারদের উপর জমা হচ্ছে, কিন্তু পারদ স্তম্ভের উচ্চতা একই আছে। এবার B নলের পারদের উপরিতলের উপর যতক্ষণ কিছু না কিছু পানি থাকে ততক্ষণ নলটিকে আস্তে আস্তে উপরে উঠানো হয়। এতে দেখা যাবে যে, নলের পানি একটু একটু করে বাষ্পে পরিণত হচ্ছে, কিন্তু পারদ স্তম্ভের উচ্চতা একই আছে। সুতরাং প্রমাণিত হল যে, একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রার (ঘরের তাপমাত্রা) সম্পৃক্ত বাষ্পের আয়তনের পরিবর্তনে চাপের কোন পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ সম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল-এর সূত্র মানে না।

২। **অসম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল-এর সূত্র মানে ঃ** এটা নিম্নলিখিত পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করা যায়।



চিত্র ১১·৭

প্রথমে একই প্রকার দুটি পারদপূর্ণ ব্যারোমিটারের নল A ও B [চিত্র ১১·৭] নিয়ে একটি পারদ পূর্ণ লম্বা পাত্র V-এর মধ্যে উপুড় করে পাশাপাশি দণ্ডায়মান অবস্থায় রাখা হয়। অতঃপর একটি পিপেট-এর সাহায্যে নলে কয়েক ফোঁটা পানি ঢুকানো হয় যাতে পারদের উপর সামান্য পানিও না থাকে এবং সম্পূর্ণ পানি বাষ্পীভূত হয়ে যায়। এতে নলের পারদ খানিকটা নিচে নেমে যাবে এবং পারদের উপরিস্থিত স্থান অসম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পে পূর্ণ হবে। এবার নলটিকে খানিকটা উপরে তুলে পারদের উপরিস্থিত স্থান যাতে জলীয় বাষ্পে অসম্পৃক্ত থাকে তা নিশ্চিত করা হয়। এখন B-নলটিকে আস্তে আস্তে V পাত্রের পারদের ভিতর ঢুকিয়ে বাষ্পের আয়তন কমানো হয় এবং B নলের বিভিন্ন অবস্থানে দুই নলের পারদ স্তম্ভের উচ্চতা বিয়োগ করে অসম্পৃক্ত বাষ্পের চাপ ও নলের উপরিস্থিত স্থানের আয়তন (নলের প্রস্থচ্ছেদ × উপরিস্থিত স্থানের দৈর্ঘ্য) হতে অসম্পৃক্ত বাষ্পের আয়তন লক্ষ করা হয়। এর পর B নলটিকে আস্তে আস্তে উপরে উঠিয়ে জলীয় বাষ্পের আয়তন বাড়ানো হয় এবং নলের বিভিন্ন অবস্থানে জলীয় বাষ্পের চাপ ও আয়তন একইভাবে জেনে নেয়া হয়। পরীক্ষায় দেখা যায় যে, জলীয় বাষ্পের আয়তন কমার সাথে সাথে পারদ স্তম্ভদ্বয়ের উচ্চতার পার্থক্য বাড়ছে অর্থাৎ জলীয় বাষ্পের চাপ বাড়ছে এবং জলীয় বাষ্পের আয়তন বাড়ার সাথে সাথে পারদ স্তম্ভদ্বয়ের উচ্চতার পার্থক্য কমছে অর্থাৎ জলীয় বাষ্পের চাপ কমছে। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আয়তন ও চাপের গুণফল প্রায় একই হচ্ছে। সুতরাং প্রমাণিত হল যে, অসম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল-এর সূত্র মেনে চলে।

১১·২৪ সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্পের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between saturated and unsaturated vapour

সম্পৃক্ত বাষ্প	অসম্পৃক্ত বাষ্প
১। কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন আবদ্ধ স্থানে যখন সর্বাধিক পরিমাণ বাষ্প ধারণ করে তখন ঐ বাষ্পকে সম্পৃক্ত বাষ্প বলে। সম্পৃক্ত বাষ্প সর্বাধিক চাপ প্রয়োগ করে।	১। একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন স্থানে বাষ্পের পরিমাণ যদি এমন হয় যে তা আরও অতিরিক্ত বাষ্প ধারণ করতে পারে, তবে ঐ বাষ্পকে অসম্পৃক্ত বাষ্প বলে। এই চাপ সম্পৃক্ত চাপের চেয়ে কম হয়।
২। এটি একটি আবদ্ধ স্থানে তৈরি করা যায়।	২। এটি আবদ্ধ বা খোলা যে কোন স্থানে তৈরি হতে পারে।

সম্পৃক্ত বাষ্প	অসম্পৃক্ত বাষ্প
৩। যদি কোন আবদ্ধ স্থানে তরল পদার্থের সংস্পর্শে কিছু বাষ্প থাকে তবে বুঝতে হবে যে, ঐ বাষ্প সম্পৃক্ত বাষ্প।	৩। কোন আবদ্ধ স্থানে যদি কিছু বাষ্প থাকে কিন্তু কোন তরল পদার্থ না থাকে তবে ঐ বাষ্প অসম্পৃক্ত বা সদ্য সম্পৃক্ত হতে পারে । এই স্থানের আয়তন সামান্য কমালে যদি কিছু বাষ্প তরলে পরিণত হয় তবে ঐ বাষ্প সদ্য সম্পৃক্ত— অন্যথায় অসম্পৃক্ত।
৪। সম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল এবং চার্লস-এর সূত্র মানে না।	৪। অসম্পৃক্ত বাষ্প বয়েল এবং চার্লস-এর সূত্র মেনে চলে।
৫। সম্পৃক্ত বাষ্পের সংস্পর্শে যথেষ্ট তরল পদার্থ না থাকলে স্থির তাপমাত্রায় ঐ বাষ্পের আয়তন বৃদ্ধি করলে, তরল পদার্থ বাষ্পীভূত হবার পর ঐ স্থান বাষ্পে অসম্পৃক্ত হবে।	৫। একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অসম্পৃক্ত বাষ্পের তাপমাত্রা স্থির রেখে তার আয়তন ক্রমাগত কমাতে থাকলে এক সময় ঐ স্থান বাষ্পে সম্পৃক্ত হবে।
৬। তাপমাত্রা বৃদ্ধি করে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ সম্পৃক্ত বাষ্পকে অসম্পৃক্ত বাষ্পে পরিণত করা যায়।	৬। তাপমাত্রা কমিয়ে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ অসম্পৃক্ত বাষ্পকে সম্পৃক্ত বাষ্পে পরিণত করা যায়।

১১.২৫ গ্যাস ও বাষ্পের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between gases and vapours

সাধারণভাবে, পদার্থের গ্যাসীয় অবস্থা বুঝাতে আমরা 'বাষ্প' এবং 'গ্যাস' উভয় শব্দই ব্যবহার করে থাকি। কিন্তু এদের মধ্যে একটি বিশেষ পার্থক্য রয়েছে। পরীক্ষালব্ধ ফলাফলে দেখা গেছে যে প্রত্যেক গ্যাসীয় পদার্থকে একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রার নিচে রেখে উপযুক্ত চাপ প্রয়োগ করলে তরলে পরিণত হয়। কিন্তু গ্যাসীয় পদার্থটি ঐ নির্দিষ্ট তাপমাত্রার উপরে থাকলে যত চাপই প্রয়োগ করা হোক না কেন গ্যাসটি তরলে পরিণত হয় না। এই নির্দিষ্ট তাপমাত্রাকে গ্যাসটির **ক্রান্তি তাপমাত্রা** (critical temperature) বলে। বিভিন্ন গ্যাসীয় পদার্থের জন্য ক্রান্তি তাপমাত্রা ভিন্ন ভিন্ন। যেমন জলীয় বাষ্পের ক্রান্তি তাপমাত্রা 361°C, অক্সিজেনের – 119°C, হাইড্রোজেনের – 240°C ইত্যাদি। উপরের আলোচনা হতে আমরা গ্যাস ও বাষ্পের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দিতে পারি।

বাষ্প : কোন গ্যাসীয় পদার্থের তাপমাত্রা এর ক্রান্তি তাপমাত্রা অপেক্ষা কম হলে তাকে বাষ্প বলে। ঐ অবস্থায় গ্যাসীয় পদার্থকে চাপ প্রয়োগ করে তরলে পরিণত করা যায়।

গ্যাস : কোন পদার্থ এর ক্রান্তি তাপমাত্রা অপেক্ষা অধিক তাপমাত্রায় থাকলে তাকে গ্যাস বলে। গ্যাসকে শুধুমাত্র চাপ প্রয়োগে তরলে পরিণত করা যায় না।

সাধারণ তাপমাত্রায় যে সকল গ্যাসকে কেবল চাপ প্রয়োগে তরলে পরিণত করা যায় না, সেগুলোকে স্থায়ী গ্যাস (permanent gas) বলে। যেমন অক্সিজেন, হাইড্রোজেন, হিলিয়াম ইত্যাদি।

১১.২৬ আর্দ্রতামিতি
Hygrometry

বায়ুমণ্ডলে সর্বদা কিছু না কিছু জলীয় বাষ্প বিদ্যমান থাকে। বাষ্পায়ন প্রক্রিয়ায় খাল-বিল, পুকুর, নদী, সমুদ্র প্রভৃতি হতে প্রতিনিয়ত প্রচুর পরিমাণ পানি বাষ্প হয়ে বায়ুমণ্ডলে মিশে যাচ্ছে। মেঘ, বৃষ্টি, কুয়াশা, শিশির প্রভৃতি নৈসর্গিক ঘটনা হতে প্রমাণিত হয় যে, বায়ুতে প্রচুর পরিমাণ জলীয় বাষ্প আছে।

বিভিন্ন স্থানে বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ বিভিন্ন। আবার কোন কোন দিন বায়ুতে জলীয় বাষ্প বেশি থাকে এবং কোন কোন দিন বায়ুতে জলীয় বাষ্প কম থাকে। কোন কোন স্থানে পানির উৎসের অবস্থিতি, অক্ষাংশ, সমুদ্র পৃষ্ঠ হতে তার উন্নতি প্রভৃতির উপর বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ নির্ভর করে।

কোন স্থানের আবহাওয়ার উপর বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের গুরুত্ব অপরিসীম। কোন কোন দ্রব্যের সুষ্ঠু উৎপাদন ও গুদামজাতকরণে বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ ও তাপমাত্রা একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকা প্রয়োজন। এই কারণে বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্পের পরিমাণ নির্ণয়ের গুরুত্বও অনেক।

পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখায় কোন নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করা হয় তাকে আর্দ্রতামিতি বা হাইগ্রোমিতি বলে। ~~এক কথায় বলা যায়—পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখায়~~ **জলীয় বাষ্পের পরিমাপ করা হয়, তার নাম আর্দ্রতামিতি।**

১১.২৭ শিশিরাঙ্ক
Dew point

একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ু একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ জলীয় বাষ্প ধারণ করতে পারে। বায়ুর জলীয় বাষ্প ধারণের ক্ষমতা তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে বেড়ে যায় এবং তাপমাত্রা হ্রাস পেলে কমে যায়। বায়ু যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প ধরে রাখতে পারে সাধারণ বায়ুতে তার চেয়ে কম জলীয় বাষ্প থাকে বলে সাধারণ বায়ু জলীয় বাষ্পে অসম্পৃক্ত থাকে এবং অসম্পৃক্ত বায়ুর জলীয় বাষ্পের চাপ অপেক্ষা সম্পৃক্ত বায়ুর জলীয় বাষ্পের চাপ বেশি হয়। কিন্তু বায়ুর তাপমাত্রা যদি ক্রমশ কমতে থাকে তবে তার জলীয় বাষ্প ধারণের ক্ষমতা কমে যায় এবং একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় বায়ুর মধ্যে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে তা দ্বারা উক্ত বায়ু সম্পৃক্ত অবস্থা ধারণ করে। এ অবস্থায় তাপমাত্রা আর একটু কমলে কিছু জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুতে পরিণত হয়। এই নির্দিষ্ট তাপমাত্রাকে শিশিরাঙ্ক বলে।

শিশিরাঙ্কের সংজ্ঞা : যে তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ু তার ভিতরের জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয় তাকে ঐ বায়ুর শিশিরাঙ্ক বলে। অথবা, **যে তাপমাত্রায় শিশির জমতে বা অদৃশ্য হতে শুরু করে তাকে শিশিরাঙ্ক বলে।**

"কোন স্থানের বায়ুর শিশিরাঙ্ক 15°C"—এটি দ্বারা বুঝা যায় যে, 15°C তাপমাত্রায় ঐ স্থানের বায়ু তার মধ্যস্থ জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হবে। অথবা 15°C তাপমাত্রায় ঐ স্থানে শিশির গঠিত বা অদৃশ্য হতে শুরু করবে।

বায়ুর তাপমাত্রায় কোন একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প উপস্থিত থাকে শিশিরাঙ্কে ঐ একই পরিমাণ জলীয় বাষ্প সম্পৃক্ত অবস্থা ধারণ করে। ডালটন-এর সূত্র অনুসারে এই সম্পৃক্ত বাষ্পের চাপ বায়ুর উপর নির্ভর করে না। সুতরাং **বায়ুর তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের অসম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের সমান হবে।**

১১.২৮ বায়ুর আর্দ্রতা
Humidity of air

বায়ু কতখানি শুষ্ক বা ভিজা তা নির্দেশ করতে 'আর্দ্রতা' শব্দটি ব্যবহৃত হয়। অনেক সময় শীতকালের বায়ু শুষ্ক ও গ্রীষ্মকালের বায়ু আর্দ্র বলা হয়। এটি দ্বারা শীতকালের তুলনায় গ্রীষ্মকালের বায়ুতে অধিক পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে এটিই বুঝানো হয়। বায়ুর আর্দ্রতা দুভাবে প্রকাশ করা হয়। যথা—

(১) পরম আর্দ্রতা (Absolute humidity) : কোন সময় কোন স্থানের একক আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে তাকে ঐ বায়ুর পরম আর্দ্রতা বলে। সাধারণত এক ঘন মিটার আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে তা বায়ুর পরম আর্দ্রতা নির্দেশ করে।

"বায়ুর পরম আর্দ্রতা 10^{-2} kg. m^{-3}"—এটি দ্বারা বুঝা যায় যে, এক ঘন মিটার আয়তনের বায়ুতে 10^{-2} kg জলীয় বাষ্প বিদ্যমান আছে।

(২) আপেক্ষিক আর্দ্রতা (Relative humidity) : কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে ঐ তাপমাত্রায় ঐ আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন হয় তাদের অনুপাতকে আপেক্ষিক আর্দ্রতা বলে। এই অনুপাত দ্বারা বায়ু কতখানি ভিজা বা শুষ্ক তা নির্দেশ করা হয়। একে সাধারণত R দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$$R = \frac{\text{বায়ুর তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}{\text{ঐ তাপমাত্রায় উক্ত আয়তনের ঐ বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

তাপমাত্রা t°C এবং আয়তন V হলে,

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{t^\circ\text{C তাপমাত্রায় V আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর}}{t^\circ\text{C তাপমাত্রায় V আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের ভর}}$$

কিন্তু স্থির তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের ভর তার বাষ্পচাপের সমানুপাতিক।

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{t^\circ\text{C তাপমাত্রায় V আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চাপ}}{t^\circ\text{C-এ V আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে প্রয়োজনীয় জলীয় বাষ্পের চাপ}}$$

আবার যে কোন তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চাপ = শিশিরাঙ্কে উক্ত বায়ুর সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ।

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{\text{শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}}{\text{বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}}$$

সাধারণত আপেক্ষিক আর্দ্রতা শতকরা হিসেবে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং আপেক্ষিক আর্দ্রতা R দ্বারা, শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ f দ্বারা এবং বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ F দ্বারা নির্দেশ করলে,

$$\boxed{R = \frac{f}{F} \times 100\%} \qquad (47)$$

"বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60%"—এর দ্বারা বুঝা যায় যে, (i) বায়ুর তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের ঐ বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন তার শতকরা 60 ভাগ জলীয় বাষ্প বায়ুতে আছে।

(ii) বায়ুর তাপমাত্রায় ঐ বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের চাপ একই তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের 100 ভাগের 60 ভাগ অর্থাৎ $\frac{3}{5}$ অংশ।

(iii) ঐ বায়ুর শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের 100 ভাগের 60 ভাগ।

১১.২৯ শিশিরাঙ্ক ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়
Determination of dewpoint and relative humidity

বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়ের জন্য যে যন্ত্র ব্যবহৃত হয় তাকে আর্দ্রতামান যন্ত্র বা হাইগ্রোমিটার (hygros—আর্দ্র, metron—পরিমাপ) বলে। আর্দ্রতামান যন্ত্রগুলোকে নিম্নলিখিত শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়।

(১) **শিশিরাঙ্ক হাইগ্রোমিটার** (Dewpoint hygrometer)

(২) **আর্দ্র বা সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটার** (Wet and dry bulb hygrometer)

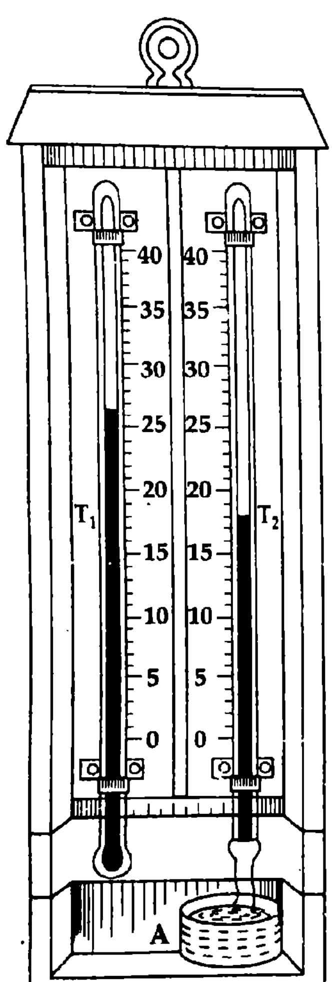
(৩) **রাসায়নিক হাইগ্রোমিটার** (Chemical hygrometer)

(৪) **কেশ হাইগ্রোমিটার** (Hair hygrometer)।

এই অধ্যায়ে আমরা আর্দ্র বা সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটার-এর গঠন ও কার্যপদ্ধতি আলোচনা করব।

আর্দ্র বা সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটার : এটি সরল হাইগ্রোমিটার। সাধারণত আবহাওয়া অফিস ও শিল্প প্রতিষ্ঠানে এই প্রকার যন্ত্র ব্যবহৃত হয়। এর সাহায্যে বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা সম্বন্ধে দ্রুত মোটামুটি ধারণা পাওয়া যায়। এছাড়া এই যন্ত্রে আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ভুলভাবে পরিমাপও করা যায়।

পানির বাষ্পীভবনের হার বায়ুতে উপস্থিত জলীয় বাষ্পের উপর নির্ভরশীল—এই তথ্যের উপর এই হাইগ্রোমিটারের কার্যপ্রণালী প্রতিষ্ঠিত। ১১৮ নং চিত্রে একটি আর্দ্র ও শুষ্ক বাল্ব হাইগ্রোমিটারের প্রয়োজনীয় ব্যবস্থাপনা দেখানো হয়েছে।



চিত্র ১১৮

যন্ত্রের বর্ণনা : এই যন্ত্রে দুটি একই প্রকার সাধারণ থার্মোমিটার T_1 ও T_2 একটি ফ্রেমে পাশাপাশি খাড়াভাবে আবদ্ধ থাকে। T_1 থার্মোমিটারের বাল্ব স্বাভাবিক অবস্থায় এবং T_2 থার্মোমিটারের বাল্ব এক টুকরা পরিষ্কার মসলিন কাপড়ে জড়িয়ে কাপড়ের অপর প্রান্ত সলিতার মত পাকানো অবস্থায় নিচের পাত্র A-এর পানিতে ডুবিয়ে রাখা হয়। কাপড় পাত্রের পানি শোষণ করে T_2 থার্মোমিটারের বালবকে সিক্ত রাখে। এই কারণে T_1 বাল্বকে শুষ্ক বাল্ব এবং T_2 বাল্বকে আর্দ্র বাল্ব বলা যায়।

ক্রিয়া : T_2 থার্মোমিটারের বাল্ব সিক্ত মসলিন কাপড়ে আবৃত থাকায় ঐ বাল্ব হতে প্রয়োজনীয় তাপ সংগ্রহ করে পানি বাষ্পীভূত হবে এবং বাল্বের তাপমাত্রা ক্রমশ হ্রাস পাবে। ফলে বায়ুর তাপমাত্রা নির্দেশক T_1 থার্মোমিটারের পাঠ হতে T_2 থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্য ক্রমশ বৃদ্ধি পাবে। বায়ু যত বেশি শুষ্ক হবে অর্থাৎ বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা যত কম হবে বাষ্পায়ন তত দ্রুত হবে এবং T_1 ও T_2 থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্যও তত বেশি হবে। আবার বায়ুতে যত বেশি জলীয় বাষ্প থাকবে অর্থাৎ বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা যত বেশি হবে, বাষ্পায়নের হার এবং সাথে সাথে দুই থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্যও তত কম হবে।

সুতরাং দুই থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্য হতে বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা সম্বন্ধে একটি মোটামুটি ধারণা পাওয়া যাবে। কোন সময় শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রা t_1°C ও আর্দ্র বাল্বের তাপমাত্রা t_2°C হলে নিম্নলিখিত উপায়ে ঐ সময়ের বায়ুর শিশিরাঙ্ক ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় করা যাবে।

(ক) গ্লেইসার-এর সমীকরণের সাহায্যে : গ্লেইসার-এর সমীকরণ অনুসারে,

$$\boxed{t_1 = t + G(t_1 - t_2)} \quad \ldots \qquad (48)$$

এখানে, G = শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রায় গ্লেইসার-এর রাশি এবং t°C = বায়ুর শিশিরাঙ্ক।

শিশিরাঙ্ক নির্ণয় : শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রায় গ্লেইসার-এর রাশি G-এর মান জেনে উপরের সমীকরণের সাহায্যে বায়ুর শিশিরাঙ্ক t°C জানা যাবে।

আপেক্ষিক আর্দ্রতা : ধরা যাক রেনোর বাষ্প চাপের তালিকায় t°C ও t_1°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে f ও F mm পারদ।

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{f}{F} \times 100\%$$

বিভিন্ন তাপমাত্রায় গ্লেইসার-এর রাশির মান

শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রা (°C)	গ্লেইসারের রাশি G	শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রা (°C)	গ্লেইসারের রাশি G	শুষ্ক বাল্বের তাপমাত্রা (°C)	গ্লেইসারের রাশি G
4	7·82	16	1·87	28	1·67
5	7·28	17	1·85	29	1·66
6	6·62	18	1·83	30	1·65
7	5·77	19	1·81	31	1·64
8	4·92	20	1·79	32	1·63
9	4·04	21	1·77	33	1·62
10	2·06	22	1·75	34	1·61
11	2·02	23	1·74	35	1·60
12	1·99	24	1·72	36	1·59
13	1·95	25	1·70	37	1·58
14	1·92	26	1·69		
15	1·90	27	1·68		

রেনোর সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপের তালিকা

t_1°C	$(t_1 - t_2)$°C									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	4·6	3·7	2·9	2·1	1·3						
1	4·9	4·1	3·2	2·4	1·6	0·8					
2	5·3	4·4	3·6	2·7	1·9	1·1	0·3				
3	5·7	4·8	3·9	3·1	2·2	1·4	0·6				
4	6·1	5·2	4·3	3·4	2·6	1·7	0·9	0·1			
5	6·5	5·6	4·7	3·8	2·9	2·1	1·2	0·4			
6	7·0	6·0	5·1	4·2	3·3	2·4	1·6	0·7			
7	7·5	6·5	5·5	4·6	3·7	2·8	1·9	1·1	0·2		
8	8·1	7·0	6·0	5·0	4·1	3·2	2·3	1·4	0·6		
9	8·6	7·5	6·5	5·5	4·5	3·6	2·7	1·8	0·9	0·1	
10	9·2	8·1	7·0	6·0	5·0	4·0	3·1	2·2	1·3	0·4	
11	9·9	8·7	7·6	6·5	5·5	4·5	3·5	2·6	1·7	0·8	
12	10·5	9·3	8·2	7·1	6·0	5·0	4·0	3·0	2·1	1·2	0·3
13	11·2	10·0	8·8	7·7	6·6	5·5	4·5	3·5	2·5	1·6	0·7
14	12·0	10·7	9·5	8·3	7·2	6·1	5·0	4·0	3·0	2·0	1·1
15	12·8	11·5	10·2	9·0	7·8	6·7	5·6	4·5	3·5	2·5	1·5
16	13·6	12·3	11·0	9·7	8·5	7·3	6·2	5·1	4·0	3·0	2·0
17	14·5	13·1	11·8	10·5	9·2	8·0	6·8	5·7	4·6	3·5	2·5
18	15·5	14·0	12·6	11·3	10·0	8·7	7·5	6·3	5·2	4·1	3·0
19	16·5	15·0	13·5	12·1	10·8	9·4	8·2	7·0	5·8	4·6	3·5
20	17·7	16·0	14·5	13·0	11·6	10·2	8·9	7·7	6·5	5·3	4·1

রেনোর সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপের তালিকাটি শুষ্ক বাল্‌বের তাপমাত্রা t°C এবং শুষ্ক এবং আর্দ্র বাল্‌বের তাপমাত্রার পার্থক্য $(t_1 - t_2)$°C-এর সাপেক্ষে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ নির্দেশ করে প্রস্তুত করা হয়েছে। তালিকার ব্যবহার বিধি নিম্নের উদাহরণ হতে পরিষ্কার বুঝা যাবে।

আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় ঃ আপেক্ষিক আর্দ্রতার সংজ্ঞা ও উপরের তালিকা অনুসারে,

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{t_1\text{°C-এর একই সমতায় } (t_1 - t_2)\text{°C চিহ্নিত সারিতে নির্দেশিত চাপ}}{t\text{°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ}} \times 100\%$$

ধরা যাক কোন এক সময় শুষ্ক ও আর্দ্র বাল্‌বের তাপমাত্রা যথাক্রমে 18°C ও 15°C ; তালিকা অনুসারে 18°C তাপমাত্রায় একই সমতায় দ্বিতীয় সারিতে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 15·5 মিমি. পারদ।

আবার দুই থার্মোমিটারের তাপমাত্রার পার্থক্য = (18 — 15)°C = 3°C

তালিকায় 18°C তাপমাত্রায় একই সমতায় 3°C পার্থক্য চিহ্নিত সারিতে চাপ = 11·3 মিমি. পারদ = শিশিরাঙ্কে সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ।

$$\text{আপেক্ষিক আর্দ্রতা, } R = \frac{11·3}{15·5} \times 100\% = 72·9\%$$

শিশিরাঙ্ক নির্ণয় ঃ যে তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 11·3 মিমি. পারদ সেই তাপমাত্রাই নির্ণেয় শিশিরাঙ্ক।

তালিকা অনুসারে 13°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 11·2 মিমি. পারদ ; 14°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 12·0 মিমি. পারদ।

সুতরাং নির্ণেয় শিশিরাঙ্ক 13°C ও 14°C-এর মাঝে হবে।

12·0 — 11·2 = 0·8 মিমি. পারদ চাপের পার্থক্যের জন্য তাপমাত্রা বৃদ্ধি = (13 — 12) = 1°C

11·3 — 11·2 = 0·1 মিমি. পারদ চাপের পার্থক্যের জন্য তাপমাত্রা বৃদ্ধি $= 1 \times \left(\frac{0·1}{0·8}\right)^{\circ}C = 0·125°C$

নির্ণেয় শিশিরাঙ্ক, t = 13°C + 0·125°C = 13·125°C

১১·৩০ শুষ্ক ও আর্দ্র বাল্‌ব হাইগ্রোমিটারের সাহায্যে আবহাওয়ার পূর্বাভাস

Weather forecast by wet and dry bulb hygrometer

আর্দ্র বায়ু অপেক্ষা শুষ্ক বায়ুতে পানি দ্রুত বাষ্পীভূত হয়। আবার বাষ্পায়ন যত বেশি হয় আর্দ্র বাল্‌ব থার্মোমিটারের পাঠ তত হ্রাস পায়। সুতরাং আর্দ্র ও শুষ্ক বাল্‌ব থার্মোমিটারের পাঠের পার্থক্য লক্ষ করে আবহাওয়ার মোটামুটি পূর্বাভাস দেয়া যায়।

থার্মোমিটার দুটির পাঠের পার্থক্য—

(১) কম হলে পূর্বাভাসে আর্দ্র আবহাওয়া উল্লেখ করা যায়।

(২) খুব বেশি হলে পূর্বাভাসে বলা যায় যে, আবহাওয়া শুষ্ক।

(৩) ধীরে ধীরে কমতে থাকলে বলা যায় যে; বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা রয়েছে।

(৪) হঠাৎ হ্রাস পেলে পূর্বাভাসে ঝড় হতে পারে উল্লেখ করা যায়।

১১·৩১ আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়ের গুরুত্ব

Importance of determination of relative humidity

(১) কোন কোন রোগের জীবাণু শুষ্ক আবহাওয়ায় এবং কোন কোন রোগের জীবাণু আর্দ্র আবহাওয়ায় বংশ বৃদ্ধি করে। এই কারণে জনস্বাস্থ্য বিভাগ আপেক্ষিক আর্দ্রতার হিসাব রাখে এবং কোন কোন রোগের প্রাদুর্ভাব দেখা দিলে বেতার ও সংবাদপত্রের মাধ্যমে তা ঘোষণা করে।

(২) মানুষের মেজাজ, স্বাস্থ্য, কর্মোদ্যম অনেকাংশে আপেক্ষিক আর্দ্রতার উপর নির্ভরশীল। যে সব আবদ্ধ স্থানে অধিক লোক সমাগম হয় সেখানকার বায়ু কিছুক্ষণের মধ্যে দূষিত ও আর্দ্র হয়ে পড়ে। এজন্য আধুনিক সিনেমা হল, অডিটরিয়াম, বড় বড় অফিস ইত্যাদিতে শীতাতপ নিয়ন্ত্রণের প্রচলন দেখা যায়।

(৩) কোন কোন বস্তু যেমন আলু, তামাক, কাঠ, পেঁয়াজ, রসুন প্রভৃতি শুষ্ক আবহাওয়ায় ভাল থাকে। তাই আপেক্ষিক আর্দ্রতা জানা আবশ্যক।

(৪) আবার বৈদ্যুতিক, ইলেকট্রনিক প্রভৃতি যন্ত্রপাতির স্টোরে ও কারখানায় একটি নির্দিষ্ট আপেক্ষিক আর্দ্রতার প্রয়োজন হয়। এই কারণে এসব ক্ষেত্রে বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে রাখা বিশেষভাবে প্রয়োজন। তাই আপেক্ষিক আর্দ্রতা জানা অপরিহার্য।

(৫) কোন স্থানের আবহাওয়া বহুলাংশে আপেক্ষিক আর্দ্রতার পরিবর্তনে পরিবর্তিত হয়। তাই আবহাওয়া অফিস আপেক্ষিক আর্দ্রতার হিসাব রাখে এবং বেতার ও সংবাদপত্রে আবহাওয়ার পূর্বাভাস প্রদান করে।

(৬) সিগারেট, পশম, কার্পাস প্রভৃতি শিল্পের কতকগুলো বিশেষ রাসায়নিক প্রক্রিয়ার সহায়তার জন্য বায়ুর আপেক্ষিক আর্দ্রতা একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকা প্রয়োজন। এই কারণে এসব কল-কারখানা বিশেষ বিশেষ অঞ্চলে স্থাপিত হয়।

(৭) নিরাপদ বিমান চালনার জন্য বিমান চালককে আর্দ্র বায়ুর অঞ্চল এড়িয়ে যেতে হয়। এই কারণে তাকে আপেক্ষিক আর্দ্রতার হিসাব জানার প্রয়োজন হয়।

১১·৩২ আর্দ্রতামিতি সম্পর্কিত কয়েকটি বাস্তব ঘটনা
Some real events relating hygrometry

আর্দ্রতামিতি সম্পর্কিত কয়েকটি বাস্তব ঘটনা নিম্নে উল্লেখ করা হল ঃ

(ক) মেঘাচ্ছন্ন রাত্রি অপেক্ষা মেঘশূন্য রাত্রি শিশির জমার জন্যে সহায়ক কেন ?

আমরা জানি নদী-নালা, খালবিল, সাগর-সমুদ্র, জলাশয় ইত্যাদি হতে পানি সব সময় বাষ্পায়নের ফলে জলীয় বাষ্পে পরিণত হয় এবং বায়ুমণ্ডলে মিশে যায়। দিনের বেলায় সূর্যের তাপে ভূ-পৃষ্ঠ সংলগ্ন বাতাস গরম থাকে এবং জলীয় বাষ্প দ্বারা অসম্পৃক্ত থাকে। মেঘহীন রাত্রিতে ভূ-পৃষ্ঠ তাপ বিকিরণ করে ঠাণ্ডা হতে থাকে এবং পরিশেষে এমন একটি তাপমাত্রায় উপনীত হয় যখন বাতাস জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয় এবং জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে শিশির জমে।

কিন্তু আকাশ মেঘাচ্ছন্ন থাকলে ভূ-পৃষ্ঠ তাপ বিকিরণ করে ঠাণ্ডা হতে পারে না। কারণ মেঘ তাপরোধী পদার্থ বলে ভূ-পৃষ্ঠ হতে বিকিরণজনিত কারণে তাপ পরিবাহিত হতে পারে না। ফলে ভূ-পৃষ্ঠ ঠাণ্ডা হয় না এবং শিশির জমে না।

(খ) বর্ষার দিন অপেক্ষা শীতকালে ভিজা কাপড় তাড়াতাড়ি শুকায় কেন ?

বর্ষার দিনে বায়ুমণ্ডল জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত থাকে। ফলে বাতাস অধিক পরিমাণে জলীয় বাষ্প ধারণ করতে পারে না। শীতকালের বাতাস শুকনা থাকে। শুকনা বাতাস জলীয় বাষ্পহীন। এই বাতাস ভিজা কাপড় থেকে দ্রুত জলীয় বাষ্প শোষণ করে নিয়ে সম্পৃক্ত হতে চায়। ফলে শীতের দিনে ভিজা কাপড় তাড়াতাড়ি শুকায়।

(গ) গরমের দিনে কুকুর জিহ্বা বের করে দৌড়ায় কেন ?

গরমের দিনে কুকুরের শরীর উত্তপ্ত থাকে এবং কুকুর অস্বস্তিবোধ করে। কিন্তু কুকুরের জিহ্বার উপর এক প্রকার লালা থাকে। সেই লালা কুকুরের শরীর থেকে বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ শোষণ করে এবং কুকুরের শরীর ঠাণ্ডা হয়। কুকুর স্বস্তি অনুভব করে। সেজন্য কুকুর জিহ্বা বের করে দৌড়ায়।

(ঘ) ঘর্মাক্ত দেহে পাখার বাতাস লাগলে আরাম অনুভূত হয় কেন ?

ঘর্মাক্ত দেহ খুবই অস্বস্তিকর। শরীরের ঘাম শরীর থেকে বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ গ্রহণ করে বাষ্প হয়ে উড়ে যায়। পাখার বাতাস সেই গরম বাষ্পকে দূরীভূত করে। ফলে শরীর ঠাণ্ডা হয় এবং আরাম অনুভূত হয়।

(ঙ) শীতকালে শরীরে ও ঠোঁটে-মুখে পমেট বা গ্লিসারিন লাগান হয় কেন ?

শীতকালে বাতাসে জলীয় বাষ্প থাকে না বললেই চলে। ফলে বাতাস জলীয় বাষ্প গ্রহণ করে সম্পৃক্ত হতে চায়। শরীরের ঠোঁট-মুখ অত্যন্ত নরম। বাতাস শরীরের সেই অনাবৃত নরম স্থান থেকে জলীয় বাষ্প শোষণ করে নেয়। ফলে ঠোঁট মুখের চামড়া শুকনা হয়ে চড়চড় করে এবং ফেটে যায়, সেজন্য পমেট বা গ্লিসারিন লাগিয়ে চামড়াকে ভিজা রাখা হয়।

(চ) একই তাপমাত্রায় দিনাজপুর অপেক্ষা চট্টগ্রাম অস্বস্তিকর অনুভূত হয় কেন ?

চট্টগ্রাম সমুদ্র উপকূলে অবস্থিত হওয়ায় সেখানকার বাতাসে অধিক পরিমাণে জলীয় বাষ্প থাকে। এই জলীয় বাষ্প শরীরে লেগে ঘামের সৃষ্টি করে। কারণ শরীরের তাপমাত্রা জলীয় বাষ্পের তাপমাত্রা অপেক্ষা কম। ঘাম হলে শরীর অস্বস্তি বোধ করে।

পক্ষান্তরে দিনাজপুর সমুদ্র হতে অধিক দূরে অবস্থিত হওয়ায় সেখানকার বাতাসে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ কম। ফলে শরীরে ঘামের সৃষ্টি হয় না এবং শরীর অস্বস্তি বোধ না করে আরাম অনুভব করে।

১১.৩৩ জলীয় বাষ্পের ঘনীভবন
Condensation of water vapour

কোন স্থানের বায়ুর তাপমাত্রা শিশিরাঙ্ক অপেক্ষা কম হলে ঐ বায়ুতে যে জলীয় বাষ্প থাকে তার কিছু অংশ বায়ুকে সম্পৃক্ত রাখে এবং বাকি অংশ ঘনীভূত হয়ে পানি বিন্দুর সৃষ্টি করে। **সাধারণত নিম্নলিখিত কারণে বায়ুর তাপমাত্রা শিশিরাঙ্কের নিচে নামতে পাবে ঃ**

(১) বিকিরণ প্রক্রিয়ায় তাপ বর্জন করে। শিশির, কুয়াশা প্রভৃতি এভাবে সৃষ্টি হয়।

(২) শীতল ও গরম বায়ুর মিশ্রণে। কোন কোন মেঘের উৎপত্তি ও তিরোধান এই প্রক্রিয়ায় সংঘটিত হয়।

(৩) রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ায় চাপের দ্রুত পরিবর্তনে। মেঘের উৎপত্তি ও বৃষ্টিপাত এই প্রক্রিয়ায় হয়ে থাকে।

১১.৩৪ বায়ুমণ্ডলে জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হওয়ার ফল
Result of condensation of water vapour in atmosphere

বায়ুমণ্ডলের জলীয় বাষ্প বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় ঘনীভূত হয়ে বিভিন্ন নৈসর্গিক ঘটনার উৎপত্তি করে। নিম্নে কয়েকটি নৈসর্গিক ঘটনা সম্বন্ধে আলোচনা করা হল।

শিশির (Dew) ঃ দিনে সূর্যের উত্তাপে ভূ-পৃষ্ঠ ও ভূ-পৃষ্ঠ সংলগ্ন বায়ু গরম হয় এবং রাত্রিতে ঐ বায়ু তাপ বিকিরণ করে শীতল হয়। কিন্তু সব বস্তুর তাপ বিকিরণের ক্ষমতা সমান হয় না। যে বস্তু বেশি তাপ বিকিরণ করে, যেমন ঘাস, পাতা প্রভৃতি, সে বস্তু তত শীতল হয়। যখন এই সব শীতল বস্তুর সংস্পর্শে ঠাণ্ডা হতে হতে বায়ুর তাপমাত্রা শিশিরাঙ্ক অপেক্ষা কম হয় তখন বায়ুকে সম্পৃক্ত রাখার জন্য যে পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন এর অতিরিক্ত জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুরূপে ঐ সব বস্তুর উপর জমা হয়। এই ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুকে শিশির বলে।

শরৎকালের ভোর বেলা কোন কোন দিন গাছের পাতায় ও ঘাসের উপর প্রচুর পরিমাণ শিশির এবং কোন কোন দিন অল্প পরিমাণ শিশির জমা হতে দেখা যায়। শিশির জমার অনুকূল অবস্থা সব সময় সমান থাকে না বলে এমন হয়।

কুয়াশা (Fog) ঃ কোন কোন সময় ভূ-পৃষ্ঠের কাছাকাছি বায়ুমণ্ডলের বিস্তীর্ণ অঞ্চলের তাপমাত্রা হ্রাস পেয়ে শিশিরাঙ্কের নিচে নেমে যায়। এ অবস্থায় বায়ু জলীয় বাষ্প ধরে রাখার সামর্থ্য হারায় এবং জলীয় বাষ্প সম্পৃক্ত হয়ে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুর আকারে বায়ুমণ্ডলে ভাসমান ধূলিকণা, কয়লার গুঁড়া বা পানি শোষণকারী বিজাতীয় পদার্থ কণাকে কেন্দ্র করে ভূ-পৃষ্ঠের উপরে ভাসতে থাকে। একেই কুয়াশা বলে। সাধারণত বায়ুপ্রবাহ না থাকলে মেঘহীন রাত্রিতে কুয়াশা বেশি পড়ে। শীতকালে প্রায়ই সকালে কুয়াশা দেখা যায়।

কুয়াশা দুই প্রকার—হাল্কা কুয়াশা (Mist) এবং ঘন কুয়াশা (Dense fog)। বায়ুমণ্ডলের প্রতি একক আয়তনে কুয়াশার পরিমাণ কম হলে ঐ কুয়াশাকে হাল্কা কুয়াশা বলে এবং বেশি হলে ঐ কুয়াশাকে ঘন কুয়াশা বলে।

কোন কোন সময় নদীর পানির উপর কুয়াশা দেখা যায়। কারণ রাত্রিকালে স্থলভাগ জলভাগ অপেক্ষা দ্রুত শীতল হয়। ফলে স্থলভাগের শীতল বায়ু নদীর বুকে নেমে পানির উপরিভাগের বায়ুকে শীতল করে কুয়াশার সৃষ্টি করে।

মেঘ (Cloud) ঃ বায়ুমণ্ডলের বিস্তীর্ণ অঞ্চলের বায়ু জলীয় বাষ্প দ্বারা সম্পৃক্ত হয়ে যদি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র পানি বিন্দুরূপে পৃথিবী পৃষ্ঠ হতে বহু উপরে ভেসে বেড়ায় তবে তাকে মেঘ বলে। সুতরাং উর্ধ্বাকাশের কুয়াশাই মেঘ।

ভূ-পৃষ্ঠের জলীয় বাষ্পপূর্ণ বায়ু হাল্কা হয়ে যখন উপরের দিকে প্রবাহিত হয় তখনই উপরের অপেক্ষাকৃত শীতল বায়ুর সংস্পর্শে তা আরও ঠাণ্ডা হতে থাকে। আবার উপরের চাপ কম বলে বায়ু আয়তনে প্রসারিত হয়ে শীতল হয়ে থাকে। এভাবে বায়ুর তাপমাত্রা যখন শিশিরাঙ্কের খানিকটা নিচে নেমে যায় তখন জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে বায়ুতে ভাসমান ধূলিকণা বা পানি শোষণকারী বিজাতীয় পদার্থ কণার সাথে পানি বিন্দুর আকারে ভাসতে থাকে। একে মেঘ বলে।

বৃষ্টি (Rain) ঃ মেঘ যখন উপরের দিকে উঠতে থাকে তখন বিভিন্ন কারণে তা অধিকতর শীতল হয়ে পড়ে। ফলে মেঘের পানি বিন্দুগুলো বড় বড় বিন্দুতে পরিণত হয়। পানি বিন্দুগুলো পরস্পরের সংস্পর্শেও আকারে বড় হয়। এভাবে তারা যথেষ্ট ভারী হয়ে অভিকর্ষের টানে ভূ-পতিত হয়। একেই বৃষ্টি বলে।

শিলা (Sleet) ঃ মেঘ যখন জোরালো বায়ুপ্রবাহে উর্ধ্বাকাশের দিকে উঠতে থাকে তখন তার তাপমাত্রা দ্রুত হ্রাস পায় এবং পানির হিমাঙ্ক ($0^{\circ}C$)-এর নিচে নেমে আসে। এতে মেঘের পানি বিন্দুগুলো জমে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বরফ খণ্ডের সৃষ্টি করে। এই বরফ খণ্ডের সংস্পর্শে তার আশে-পাশের পানির বিন্দুগুলো শীতল হয়েও ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বরফখণ্ডে পরিণত হয়। এভাবে বরফখণ্ডগুলো আকারে বৃদ্ধি পেয়ে যথেষ্ট ভারী হলে তারা আর বায়ুতে ভেসে থাকতে পারে না। অভিকর্ষের টানে সবেগে এরা ভূ-পতিত হয়। একেই শিলাবৃষ্টি বা শিলা বলে। বলা বাহুল্য জলীয় বাষ্প দ্রুত ঘনীভূত হওয়ায় শিলার সৃষ্টি হয় বলে তার ভিতর কিছু কিছু বায়ু আবদ্ধ থাকতে পারে।

স্মরণিকা

তাপ ঃ তাপ এক প্রকার শক্তি যা গরম বা উচ্চ তাপমাত্রার বস্তু হতে নিম্ন তাপমাত্রার বস্তুতে তাপমাত্রার পার্থক্যের কারণে সঞ্চালিত হয়।

গ্যাসীয় সূত্রাবলি ঃ (১) বয়েলের সূত্র ঃ তাপমাত্রা স্থির থাকলে কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন তার চাপের ব্যস্তানুপাতিক।

(২) চার্লস-এর সূত্র ঃ স্থির চাপে কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন $0^{\circ}C$ থেকে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য এর $0^{\circ}C$ তাপমাত্রার আয়তনের নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ অংশ পরিবর্তিত হয়।

(৩) চাপীয় সূত্র ঃ স্থির আয়তনে কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ $0^{\circ}C$ থেকে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য এর $0^{\circ}C$ তাপমাত্রার চাপের নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ $\frac{1}{273}$ অংশ পরিবর্তিত হয়।

আদর্শ গ্যাস ঃ যে সব গ্যাস বয়েল এবং চার্লস-এর সূত্র মেনে চলে তাদেরকে আদর্শ গ্যাস বলে।

পরম শূন্য তাপমাত্রা ঃ স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের তাপমাত্রা ক্রমশ কমাতে থাকলে চার্লসের সূত্রানুযায়ী যে তাপমাত্রায় পৌঁছে তার আয়তন শূন্য হয় ও গ্যাসের গতিশক্তি সম্পূর্ণরূপে লোপ পায় তাকে পরম শূন্য তাপমাত্রা বলে।

স্থির চাপে গ্যাসের আয়তন প্রসারাঙ্ক, γ_p ঃ স্থির চাপে $0^{\circ}C$ তাপমাত্রায় নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের তাপমাত্রা $0^{\circ}C$ থেকে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস বৃদ্ধির জন্য ঐ গ্যাসের প্রতি একক আয়তনে যে প্রসারণ ঘটে তাকে স্থির চাপে গ্যাসের আয়তন প্রসারাঙ্ক বলে।

স্থির আয়তনে গ্যাসের চাপ প্রসারাঙ্ক, γ_v ঃ স্থির আয়তনে $0^{\circ}C$ তাপমাত্রার নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের তাপমাত্রা $0^{\circ}C$ থেকে প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস বৃদ্ধির ফলে ঐ গ্যাসের প্রতি একক চাপের যে বৃদ্ধি ঘটে তাকে স্থির আয়তনে গ্যাসের চাপ প্রসারাঙ্ক বলে।

প্রমাণ তাপমাত্রা ঃ প্রমাণ বা স্বাভাবিক চাপে (760 mm পারদ স্তম্ভ চাপ) যে তাপমাত্রায় বরফ গলে পানিতে পরিণত হয় বা পানি জমে বরফে পরিণত হয় সেই তাপমাত্রাকে পরম তাপমাত্রা বলে।

প্রমাণ চাপ ঃ সমুদ্র পৃষ্ঠে 45° অক্ষাংশে $0^{\circ}C$ বা 273·16 K তাপমাত্রায় উল্লম্বভাবে অবস্থিত 760 mm উচ্চতাবিশিষ্ট শুষ্ক ও বিশুদ্ধ পারদ স্তম্ভ যে চাপ দেয় তাকে প্রমাণ বা স্বাভাবিক চাপ বলে।

সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক, R ঃ এক মোল আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা এক ডিগ্রী বাড়ালে তা যে পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করে তাকে সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবক বলে।

গড় বর্গ বেগ ঃ দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানকে গড় বর্গ বেগ বলে।

গড় বর্গ বেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ ঃ দুই বা ততোধিক বেগের বর্গের গড় মানের বর্গমূলকে গড় বর্গবেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ বলে।

গড় মুক্ত পথ ঃ পরস্পর ধাক্কাগুলোর ভিতর একটি অণু যে গড় দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে গড় মুক্ত পথ বলে।

সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ ঃ কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন আবন্ধ স্থানের বাষ্প যে সর্বাধিক চাপ প্রয়োগ করে তাকে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।

অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপ ঃ কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন আবন্ধ স্থানের বাষ্প যদি সর্বাধিক বাষ্পচাপ অপেক্ষা কম চাপ প্রয়োগ করে তবে তাকে অসম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বলে।

আপেক্ষিক আর্দ্রতা ঃ কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি নির্দিষ্ট আয়তনের বায়ুতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্প থাকে ঐ তাপমাত্রায় ঐ আয়তনের বায়ুকে সম্পৃক্ত করতে যে পরিমাণ জলীয় বাষ্পের প্রয়োজন হয় তাদের অনুপাতকে আপেক্ষিক আর্দ্রতা বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

বয়েলের সূত্র, $PV =$ ধ্রুবক (1)

বয়েলের সূত্র, $P_1V_1 = P_2V_2 =$ ধ্রুবক (2)

চার্লস-এর সূত্র ঃ (i) $V = V_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right)$ (3)

(ii) $V \propto T = \frac{T_1}{T_2}$ (4)

(iii) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ (5)

চাপীয় সূত্র ঃ (i) $P = P_0\left(1 + \frac{\theta}{273}\right)$ (6)

(ii) $P \propto T$ (7)

(iii) $\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2}$ (8)

বয়েল এবং চার্লস সূত্রের সমন্বিত রূপ ঃ $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} =$ ধ্রুবক (9)

স্থির চাপে গ্যাসের আয়তন প্রসারাঙ্ক, $\gamma_p = \frac{V - V_0}{V_0\theta}$ (10)

স্থির আয়তনে গ্যাসের চাপ প্রসারাঙ্ক, $\gamma_v = \frac{P - P_0}{P_0\theta}$ (11)

আদর্শ গ্যাস সমীকরণ, (i) $PV = nRT$ (12)

(ii) $PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow PV = \frac{g}{M}RT$ (13)

গ্যাসের ঘনত্বের সমীকরণ ঃ (i) $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_1}{T_2}$ (14)

(ii) $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{P_1}{P_2}$ (15)

গড় বেগ ঃ $c_n = \frac{c_1 + c_2 + c_3 \ldots\ldots + c_n}{n}$ (16)

গড় বর্গ বেগ ঃ $c_n^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \ldots\ldots + c_n^2}{n}$ (17)

গড় বর্গ বেগের বর্গমূল বা মূল গড় বর্গবেগ, $c = \sqrt{c_n^2} = \sqrt{\frac{c_1^2 + c_2^2 + \ldots\ldots + c_n^2}{n}}$ (18)

আদর্শ গ্যাসের চাপ, $P = \frac{1}{3}\rho c^{-2}$ (19)

প্রতি মোল বা এক গ্রাম অণু গ্যাসের গতিশক্তি, $E = \frac{3}{2}RT$ (20)

একক আয়তনের অণুগুলোর গ্যাসের চাপ, $P = \frac{2}{3}E$ (21)

BG & JEWEL

মূল গড় বর্গবেগের সাথে চাপের সম্পর্ক ঃ $c = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$ (22)

মূল গড় বর্গবেগের সাথে তাপমাত্রার সম্পর্ক ঃ $c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ (23)

গড় মুক্ত পথ ঃ (i) ক্লসিয়াসের সমীকরণ ঃ $\lambda = \frac{1}{\pi a^2 n}$ (24)

(ii) ম্যাক্সওয়েলের সমীকরণ ঃ $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \times a^2 n}$ (25)

আপেক্ষিক আর্দ্রতা ঃ $R = \frac{f}{F} \times 100\%$ (26)

গ্লেইসার-এর সমীকরণ ঃ $t_1 = t + G(t_1 - t_2)$ (27)

সমাধানকৃত উদাহরণ

1. 0·64 m পারদ স্তম্ভ চাপে এবং 39°C তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের আয়তন $5{\cdot}7 \times 10^{-4}$ m³। প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রায় গ্যাসের আয়তন কত ? [য. বো. ২০০১]

মনে করি, নির্ণেয় আয়তন $= V_2$

আমরা পাই, $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$

বা, $\frac{0{\cdot}64 \times 5{\cdot}7 \times 10^{-4}}{312} = \frac{0{\cdot}76 \times V_2}{273}$

বা, $V_2 = \frac{0{\cdot}64 \times 5{\cdot}7 \times 10^{-4} \times 273}{312 \times 0{\cdot}76}$

$V_2 = 4{\cdot}2 \times 10^{-4}$ m³

এখানে,
$P_1 = 0{\cdot}64$ m
$V_1 = 5{\cdot}7 \times 10^{-4}$ m³
$T_1 = 39°C = (39 + 273)$ K $= 312$ K
$P_2 = 0{\cdot}76$ m
$T_2 = 273$ K
$V_2 = ?$

2. কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের তাপমাত্রা 30°C। (i) চাপ স্থির থাকলে কোন্ তাপমাত্রায় আয়তন দ্বিগুণ হবে ? (ii) আয়তন স্থির থাকলে কোন্ তাপমাত্রায় চাপ তিনগুণ হবে ?

(i) মনে করি, তাপমাত্রা $= T_2$

আমরা পাই,

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad (1)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $\frac{V_1}{303} = \frac{2V_1}{T_2}$

$\therefore T_2 = 2 \times 303 = 606$ K
$= (606 - 273) = 333°C$

এখানে,
$V_2 = 2V_1$
$T_1 = 273 + 30 = 303$ K

(ii) মনে করি, তাপমাত্রা $= T_2$

আমরা পাই,

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad (1)$$

বা, $\frac{P_1}{303} = \frac{3P_1}{T_2}$

$T_2 = 303 \times 3 = 909$ K $= (909 - 273) = 636°$ C

এখানে, $P_2 = 3P_1$

3. 0°C তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের চাপ 3×10^5 Pa হলে 60°C তাপমাত্রায় এর চাপ কত হবে? [চ. বো. ২০০০]

আমরা জানি,

$$\gamma_V = \frac{P - P_0}{P_0 \Delta\theta}$$

বা, $P = P_0(1 + \gamma_v \Delta\theta) = 3 \times 10^5 \left(1 + \frac{1}{273} \times 60\right)$ Pa

বা, $P = 3{\cdot}66 \times 10^5$ Pa

এখানে,
0°C তাপমাত্রায় চাপ, $P_0 = 3 \times 10^5$ Pa
তাপমাত্রা বৃদ্ধি, $\Delta\theta = (60 - 0)°C = 60°C$
চাপ প্রসারাঙ্ক $\gamma_V = \frac{1}{273}$ °C⁻¹
চূড়ান্ত চাপ, $P = ?$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

আমরা জানি,

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

বা, $P_2 = \frac{P_1 T_2}{T_1}$

$$P_2 = \frac{3 \times 10^5 \times 333}{273}$$

$$= 3.66 \times 10^5 \text{ Pa}$$

এখানে,

$T_1 = 273 + 0°C = 273K$

$T_2 = 273 + 60°C = 333K$

$P_1 = 3 \times 10^5$ Pa

$P_2 = ?$

P.V

৪। একটি ট্যাংকে 27°C তাপমাত্রায় ও 2 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের 1660 লিটার অক্সিজেন আছে। ট্যাংকে অক্সিজেনের ভর নির্ণয় কর। [অক্সিজেনের আণবিক ভর = 32 kg k mol⁻¹, 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ= 1.013 × 10⁵ Pa ও R = 8314 J k mol⁻¹ K⁻¹]

ধরি অক্সিজেনের ভর = m

আমরা পাই, $m = M\left(\frac{PV}{RT}\right)$

$m = 32 \text{ kg k mol}^{-1} \times$

$$\left(\frac{2 \times 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} \times 1660 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{8314 \text{ J k mol}^{-1}\text{K}^{-1} \times 300 \text{ K}}\right)$$

$= 4.3$ kg

এখানে,

$T = (273 + 27)$ K = 300 K

$M = 32$ kg k mol^{-1}

$R = 8314$ J k mol^{-1} K^{-1}

$P = 2 \times 1.013 \times 10^5$ Pa

$V = 1660$ লিটার $= 1660 \times 10^{-3}$ m^3

Q.V

৫। স্থির তাপমাত্রায় কত চাপ প্রয়োগ করলে একটি গ্যাসের আয়তন এর স্বাভাবিক চাপ আয়তনের 4 গুণ হবে? [বি. বো. ২০০৪, ২০০২]

T P2

আমরা জানি,

$P_1 V_1 = P_2 V_2$

বা, $\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{4V_1}{V_1}$

বা, $\frac{1.013 \times 10^5}{P_2} = 4$

বা, $P_2 = \frac{1.013 \times 10^5}{4}$

$= 25.325 \times 10^3$ Nm^{-2}

এখানে,

স্বাভাবিক চাপ, $P_1 = 1.013 \times 10^5$ Nm^{-2}

আদি আয়তন $= V_1$

চূড়ান্ত আয়তন, $V_2 = 4V_1$

চূড়ান্ত চাপ, $P_2 = ?$

৬। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে কিছু শুষ্ক বায়ু সংনমিত প্রক্রিয়ায় সংনমিত করে এর আয়তন অর্ধেক করা হল। চূড়ান্ত চাপ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০১]

P1

P2 আমরা জানি,

$P_1 V_1 = P_2 V_2$

বা, $P_2 V_2 = P_1 V_1$

বা, $P_2 = \frac{V_1}{V_2} P_1 = \frac{2V_2}{V_2} P_1$

$= 2P_1 = 2 \times 1.013 \times 10^5$ Nm^{-2}

$= 2.026 \times 10^5$ Nm^{-2}

এখানে,

প্রাথমিক চাপ, $P_1 = 1.013 \times 10^5$ Nm^{-2}

প্রাথমিক আয়তন $= V_1$

চূড়ান্ত আয়তন, $V_2 = \frac{V_1}{2}$

চূড়ান্ত চাপ, $P_2 = ?$

BG & JEWEL

P1 Pm

(৭) 0·64 m পারদ স্তম্ভ চাপে এবং 39°C তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের আয়তন $5·7 \times 10^{-4}$ m³। প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রায় গ্যাসের আয়তন কত ? [য. বো. ২০০১]

T1 V1

Tm আমরা জানি, V2

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

বা, $$V_2 = \frac{P_1V_1T_2}{T_1P_2}$$

$$= \frac{0·64 \times 5·7 \times 10^{-4} \times 273}{312 \times 0·76} \text{m}^3$$

$$= 4·2 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

এখানে,

প্রাথমিক চাপ, $P_1 = 0·64$ m Hg

চূড়ান্ত চাপ, P_2 = প্রমাণ চাপ = 0·76 m Hg

প্রাথমিক তাপমাত্রা, T_1 = 39°C = (39 + 273) K = 312K

চূড়ান্ত তাপমাত্রা, T_2 = প্রমাণ তাপমাত্রা = 273K

প্রাথমিক আয়তন, $V_1 = 5·7 \times 10^{-4}$ m³

চূড়ান্ত আয়তন, V_2 = ? m

২। (৮) যদি $R = 8·31$ JK⁻¹ mol⁻¹ হয় তবে 72 cm পারদ চাপে এবং 27°C তাপমাত্রায় 20 g অক্সিজেনের আয়তন নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; য. বো. ২০০০]

P

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

বা, $$V = \frac{mRT}{PM}$$

$$= \frac{20 \times 10^{-3} \times 8·31 \times 300}{72 \times 10^{-2} \times 13·6 \times 10^3 \times 9·8 \times 32 \times 10^{-3}}$$

$$= ·0162369$$

$$= 16·24 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

এখানে,

$m = 20$ g $= 20 \times 10^{-3}$ kg

$M = 32 \times 10^{-3}$ kg mol⁻¹

$R = 8·31$ JK⁻¹ mol⁻¹

$T = (27 + 273) = 300$ K

$h = 72$ cm $= 72 \times 10^{-2}$ m

$P = h\rho g$

$= 72 \times 10^{-2} \times 13·6 \times 10^3 \times 9·8$ Nm⁻²

$V = ?$

২। (৯) স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে হাইড্রোজেনের ঘনত্ব 0·09 kgm⁻³। হাইড্রোজেন অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর।

P ρ C_{rms}

আমরা জানি,

$$c = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

$$c = \sqrt{\frac{3 \times 1·013 \times 10^5}{0·09}}$$

$$= 18·38 \times 10^2 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

স্বাভাবিক চাপ,

$P = 1·013 \times 10^5$ Nm⁻²

হাইড্রোজেনের ঘনত্ব, $\rho = 0·09$ kgm⁻³

$c = ?$

m=28

২। (১০) 29°C তাপমাত্রায় 3 g নাইট্রোজেন গ্যাসের মোট গতিশক্তি নির্ণয় কর। [নাইট্রোজেনের গ্রাম আণবিক ভর 28 g] [কু. বো. ২০০৩]

T m K

আমরা জানি, n মোল গ্যাসের গতি শক্তি,

$$K.E. = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2}\frac{m}{M} RT$$

$$K.E. = \frac{3}{2} \times \frac{3}{28} \times 8·31 \times 302$$

$$= 403 \text{ J}$$

এখানে, $m = 3$g

$M = 28$g

$R = 8·31$ J K⁻¹ mol⁻¹

$T = (273 + 29)$ K $= 302$ K

K.E. = ?

(১১) 27°C তাপমাত্রায় প্রতি গ্রাম অণু হিলিয়াম গ্যাসের গতিশক্তি নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৩]
[$R = 8·3$ JK⁻¹ mol⁻¹]

T K

আমরা জানি,

$$K.E. = \frac{3}{2} RT$$

$$= \frac{3}{2} \times 8·3 \times 300$$

$$= 3735 \text{ J mol}^{-1}$$

এখানে,

$R = 8·3$ JK⁻¹ mol⁻¹

$T = (273 + 27)$ K

$= 300$ K

১২। স্থির চাপে $4 \times 10^{-3} m^3$ আয়তনের কোন গ্যাসকে $0°C$ হতে $68.25°C$ পর্যন্ত উত্তপ্ত করার ফলে এর আয়তন $1 \times 10^{-3} m^3$ বৃদ্ধি পেলে পরম শূন্য তাপমাত্রার মান কত ? [কু. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৫]

এখানে,

$0°C$ তাপমাত্রায় আয়তন, $V_0 = 4 \times 10^{-3}\ m^3$

তাপমাত্রা বৃদ্ধি, $\Delta\theta = 68.25°C$

আয়তন বৃদ্ধি, $\Delta V = 1 \times 10^{-3}\ m^3$

পরমশূন্য তাপমাত্রায় গ্যাসের আয়তন, $V_0 = 0$

সেলসিয়াস স্কেলে পরমশূন্য তাপমাত্রা, $\theta = ?$

আমরা জানি,

$$V = V_0 (1 + \gamma_p \theta)$$

বা, $0 = V_0 (1 + \gamma_p \theta)$

বা, $1 + \gamma_p \theta = 0$

$$\theta = -\frac{1}{\gamma_p}$$

আবার, আমরা জানি,

$$\gamma_p = \frac{\Delta V}{V_0 \Delta\theta} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3} \times 68.25}$$

$$= 3.66 \times 10^{-3}$$

$$\theta = -\frac{1}{3.66 \times 10^{-3}} = -273$$

$\therefore \theta = -273°C$

১৩। কোন হ্রদের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসায় একটি বায়ু বুদবুদের আয়তন 5 গুণ হয়। বায়ুমণ্ডলের চাপ $10^5\ Nm^{-2}$ হলে হ্রদের গভীরতা কত ? [চ. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০২; য. বো. ২০০০]

হ্রদের তলদেশে মোট চাপ = P

হ্রদের তলদেশে পানির চাপ = P_2

পানির ঘনত্ব = ρ_2

পানির উপরিতলে বায়ু চাপ = P_1

হ্রদের তলদেশে বুদবুদের আয়তন = V

পানির উপরিতলে বুদবুদের আয়তন = $V_1 = 5V$

এখানে, $P = P_1 + P_2$ (1)

বয়েলের সূত্র হতে,

$PV = P_1 V_1$

বা, $PV = P_1 5V$

বা, $P = 5P_1$ (2)

(1) এবং (2) নং হতে পাই,

$5P_1 = P_1 + P_2$

$\Rightarrow 4P_1 = P_2$

$\Rightarrow 4 \times 10^5 = h_2 \times 10^3 \times 9.8$

$\Rightarrow h_2 = \frac{4 \times 10^5}{10^3 \times 9.8} = 40.81\ m$

$h = \frac{(n-1)P}{\rho g}$

এখানে,

$P_1 = 10^5\ N\ m^{-2}$

$P_2 = h_2 \rho_2 g$

$\rho_2 = 10^3\ kg\ m^{-3}$

$g = 9.8\ ms^{-2}$

১৪। কোন হ্রদের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসায় একটি বায়ু বুদবুদের ব্যাস দ্বিগুণ হয়। হ্রদের পৃষ্ঠে বায়ুমণ্ডলের চাপ স্বাভাবিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান এবং হ্রদের উষ্ণতা ধ্রুবক হলে হ্রদের গভীরতা কত ? [ঢা. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০২]

বুদবুদের আয়তন $\propto d_1^3$

[$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3$ অর্থাৎ $V \propto d^3$]

সুতরাং ব্যাস দ্বিগুণ হলে আয়তন 8 গুণ হবে।

মনে করি, হ্রদের তলদেশে চাপ=P_1 এবং হ্রদের পৃষ্ঠে চাপ=P_2.

$P_1 = P_2 + h\rho g$

এখানে,

হ্রদের তলদেশে বুদবুদের আয়তন, $V_1 = V$

হ্রদের পৃষ্ঠে বুদবুদের আয়তন, $V_2 = 8V$

পানির ঘনত্ব, $\rho = 1 \times 10^3\ kgm^{-2}$

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$

হ্রদের গভীরতা, $h = ?$

বায়ুমণ্ডলের স্বাভাবিক চাপ, $P_2 = 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$

আমরা জানি,

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

বা, $(P_2 + h\rho g)\,V = P_2V_2 = P_2 \times 8V$

বা, $h\rho g = 8P_2 - P_2 = 7P_2$

$$h = \frac{7P_2}{\rho g} = \frac{7 \times 1.013 \times 10^5}{1 \times 10^3 \times 9.8} = 72.36\text{ m}$$

১৫। কোন আধারের 20টি গ্যাস অণুর মধ্যে 6টি গ্যাস অণুর প্রত্যেকের বেগ 4 ms^{-1}, 4টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 3 ms^{-1}, 3টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 2.5 ms^{-1}, 5টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 2 ms^{-1} এবং 2টি অণুর প্রত্যেকের বেগ 1 ms^{-1}। অণুগুলোর গড় বেগ ও গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, গড় বেগ, $<v> = \frac{6 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 2.5 + 5 \times 2 + 2 \times 1}{6 + 4 + 3 + 5 + 2}\ ms^{-1} = 2.775\ ms^{-1}$

ও গড় বর্গবেগের বর্গমূল, $c = \sqrt{\frac{6 \times 4^2 + 4 \times 3^2 + 3 \times 2.5^2 + 5 \times 2^2 + 2 \times 1^2}{6 + 4 + 3 + 5 + 2}} = 2.939\ ms^{-1}$

১৬। একটি খোলা লিটার ফ্লাস্কে 0°C তাপমাত্রার 1.32×10^{-3} kg বায়ু আছে। 91°C তাপমাত্রায় ফ্লাস্ক হতে কি পরিমাণ বায়ু বের হয়ে যাবে ?

প্রশ্নানুযায়ী স্থির বায়ুমণ্ডলীয় চাপে এই পরিবর্তন সংঘটিত হচ্ছে।

কাজেই $\rho_1T_1 = \rho_2T_2$ (1)

এখানে,

$T_1 = 0°C = (273 + 0)K = 273K$

$T_2 = 91°C = (273 + 91)K = 364K$

$\rho_1 = \frac{1.32 \times 10^{-3}\text{ kg}}{10^{-3}\text{ m}^3} = 1.32\text{ kg m}^{-3}$

পাত্রের আয়তন, V = 1 লিটার = 10^{-3} m^3

প্রাথমিক তাপমাত্রায় বায়ুর ভর = 1.32×10^{-3} kg

এখন সমীকরণ (1)-এ মানগুলো বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\rho_2 = \frac{\rho_1T_1}{T_2} = \frac{1.32 \times 273}{364}\text{ kg m}^{-3}$$

= পরিবর্তিত অবস্থায় বায়ুর ঘনত্ব

পাত্রস্থিত বায়ুর বর্তমান ভর = আয়তন × ঘনত্ব

$$= 10^{-3} \times \frac{1.32 \times 273}{364}\text{ kg}$$

কাজেই বহিষ্কৃত বায়ুর ভর $= \left(1.32 \times 10^{-3} - 10^{-3} \times \frac{1.32 \times 273}{364}\right)$ kg

$$= 3.3 \times 10^{-4}\text{ kg}$$

১৭। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে নাইট্রোজেনের ঘনত্ব 1.25 kgm^{-3}।

(i) অণুগুলোর গড় বর্গবেগের বর্গমূল বের কর। [চ. বো. ২০০৩]

(ii) 100°C তাপমাত্রায় নাইট্রোজেন অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০২]

(i) আমরা জানি,

$$c = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$$

$$c = \sqrt{\frac{3 \times 1.013 \times 10^5}{1.25}}$$

$$= 493.07\ ms^{-1}$$

এখানে,

স্বাভাবিক চাপ, $P = 1.013 \times 10^5\ Nm^{-2}$

স্বাভাবিক তাপমাত্রা, T = 273K

ঘনত্ব, $\rho = 1.25\ kgm^{-3}$

(i) স্বাভাবিক তাপমাত্রায়, c = ?

(ii) তাপমাত্রা, $T_1 = 100°C = (100 + 273)$ K = 373K

c_1 = ?

(ii) আবার, $c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

এবং $c_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}}$ $\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{T_1}{T}}$

বা, $c_1 = c\sqrt{\frac{T_1}{T}} = 493{\cdot}07 \times \sqrt{\frac{373}{273}}$

$= 576{\cdot}34 \text{ ms}^{-1}$

উঃ (i) $493{\cdot}07 \text{ ms}^{-1}$ (ii) $576{\cdot}34 \text{ ms}^{-1}$

১৮। স্থির চাপে কোন্ তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের অণুর মূল গড় বর্গবেগ প্রমাণ চাপ ও তাপমাত্রার মূল গড় বর্গবেগের অর্ধেক হবে ? [য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$c = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

$c_1 = \sqrt{\frac{3RT_1}{M}}$

এবং $c_2 = \sqrt{\frac{3RT_2}{M}}$

অতএব, $\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

বা, $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ বা, $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$T_2 = \frac{1}{4} \times T_1 = \frac{1}{4} \times 273\text{K}$
$= 68{\cdot}25\text{K}$

এখানে,

$c_2 = \frac{1}{2} c_1$

প্রমাণ তাপমাত্রা, $T_1 = 273$ K

নির্ণেয় তাপমাত্রা, $T_2 = ?$

১৯। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে অক্সিজেন গ্যাসের অণুগুলোর গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর। স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় অক্সিজেনের ঘনত্ব = $1{\cdot}43 \text{ kg m}^{-3}$। [ঢা. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০১]

ধরি নির্ণেয় গড় বর্গবেগের বর্গমূল = c

আমরা পাই, $c = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}$ (1)

মানগুলো সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাওয়া যায়

এখানে,

$P = 0{\cdot}76$ m উল্লম্ব পারদস্তম্ভের চাপ

$= 0{\cdot}76 \text{ m} \times (13{\cdot}6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}) \times 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

$= 0{\cdot}76 \times (13{\cdot}6 \times 10^3) \times 9{\cdot}8 \text{ N m}^{-2}$ [$\because P = h\rho g$]

$\rho = 1{\cdot}43 \text{ kg m}^{-3}$

$$c = \sqrt{\frac{3 \times 0{\cdot}76 \times 13{\cdot}6 \times 10^3 \times 9{\cdot}8 \text{ Nm}^{-2}}{1{\cdot}43 \text{ kg m}^{-3}}} = 461 \text{ ms}^{-1}$$

২০। 0°C তাপমাত্রায় বায়ুতে নাইট্রোজেন অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর।
[$K = 1{\cdot}38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$, $M = 28 \text{ kg k mol}^{-1}$ ও $N = 6{\cdot}02 \times 10^{26} \text{ k mol}^{-1}$]

ধরি নির্ণেয় বেগ = c_{rms}

আমরা পাই, $\frac{1}{2} mc^2 = \frac{3}{2}\text{KT}$ ও $m = \frac{M}{N}$

$c = \sqrt{\frac{3KT}{m}} = \sqrt{3\frac{KT \times N}{M}}$

$= \sqrt{\frac{3 \times (1{\cdot}38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}) \times (273 \text{ K}) \times 6{\cdot}02 \times 10^{26} \text{ k mol}^{-1}}{28 \text{ kg k mol}^{-1}}}$

$= 490 \text{ ms}^{-1}$

২১। স্থির চাপে কত তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূল স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রার গড় বর্গবেগের বর্গমূলের দ্বিগুণ হবে ?

আমরা পাই, $c \propto \sqrt{T}$ (1)

প্রথম T_1K ও পরিবর্তিত T_2K তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূল যথাক্রমে c_1 ও c_2 হলে, সমীকরণ (1) অনুযায়ী $\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

ধরি নির্ণেয় তাপমাত্রা = T_2

তাহলে, $T_2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} \times T_1$

$= \frac{(2c_1)^2}{c_1^2} \times 273\text{ K}$

$= 1092\text{K}$

$= (1092 - 273)°\text{C}$

$= 819°\text{C}$

এখানে,

$T_1 = 273\text{K}$

$c_2 = 2c_1$

২২। কোন একটি গ্যাসের অণুগুলোর গড় মুক্ত পথ 6×10^{-8} m ও অণুর ব্যাস 2.5×10^{-10} m। প্রতি ঘন মিটারে অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)]

λ a n

আমরা জানি, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi a^2 n}$

বা, $n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi a^2 \lambda}$

$n = \frac{1}{\sqrt{2} \times 3.14 \times (2.5 \times 10^{-10})^2 \times 6 \times 10^{-8}}$

$= \frac{1000 \times 10^{25}}{\sqrt{2} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 6}$

$= 6 \times 10^{25}/\text{m}^3$

এখানে,

অণুর গড় মুক্ত পথ, $\lambda = 6 \times 10^{-8}$ m

অণুর ব্যাস, $a = 2.5 \times 10^{-10}$ m

একক আয়তনে অণুর সংখ্যা, $n = ?$

a λ n

২৩। কোন গ্যাসের অণুর ব্যাস 3×10^{-10} m এবং গড় মুক্ত পথ 2×10^{-8} m। উক্ত গ্যাসের একক আয়তনে অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর। যদি অণুগুলোর গড় বর্গবেগের বর্গমূলীয় মান 500 ms^{-1} হয়, তবে প্রতি সেকেন্ডে সংঘটিত সংঘর্ষের সংখ্যা নির্ণয় কর।

C N

আমরা জানি,

$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n a^2}$

বা, $n = \frac{1}{\sqrt{2}\pi a^2 \lambda}$

$n = \frac{1}{\sqrt{2} \times 3.14 \times (3 \times 10^{-10})^2 \times 2 \times 10^{-8}}$

$= 1.25 \times 10^{26}\text{ m}^{-3}$

প্রতি সেকেন্ডে সংঘটিত সংঘর্ষের সংখ্যা

$N = \frac{c}{\lambda} = \frac{500}{2 \times 10^{-8}}$

$= 2.5 \times 10^{10}\text{ s}^{-1}$

এখানে,

অণুর ব্যাস, $a = 3 \times 10^{-10}$ m

গড় মুক্ত পথ, $\lambda = 2 \times 10^{-8}$ m

অণুর সংখ্যা, $n = ?$

$c = 500\text{ ms}^{-1}$

সংঘর্ষ সংখ্যা, N = ?

$\sqrt{2}\pi a^2 n$

২৪। কোন গ্যাস অণুর ব্যাস 3×10^{-10} m এবং প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা 6×10^{20} হলে অণুর গড় মুক্ত পথ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; রা. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০১]

মনে করি, গড় মুক্ত পথ = λ

আমরা পাই, $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi a^2 n}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \times (3 \times 10^{-10})^2 \times 6 \times 10^{26}}$$

$= 4{\cdot}17 \times 10^{-9}$ m

এখানে,
$n = 6 \times 10^{26}$ mol/m^3
$a = 3 \times 10^{-10}$ m

$n = 6 \times 10^{20}$ হলে Ans 4.
$n = 6 \times 10^{26}$ " Ans c

২৫। কোন একটি আবদ্ধ স্থানের বায়ুর তাপমাত্রা 15°C ও শিশিরাঙ্ক 8°C। তাপমাত্রা কমে 10°C হলে পরিবর্তিত জলীয় বাষ্পের চাপ ও শিশিরাঙ্ক কত হবে ? [7°C ও 8°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে $7{\cdot}5 \times 10^{-3}$ m ও $8{\cdot}1 \times 10^{-3}$ m পারদ।]

মনে করি 10°C ও 15°C তাপমাত্রায় ঐ স্থানের অসম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে P_1 ও P_2। তা হলে শিশিরাঙ্কের সংজ্ঞা অনুসারে, P_2 = 15°C তাপমাত্রায় অসম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ = 8°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ $= 8{\cdot}1 \times 10^{-3}$ m পারদ।

আবার স্থানটি আবদ্ধ বলে বায়ুর আয়তন নির্দিষ্ট। কাজেই চাপের সূত্র অনুসারে আমরা পাই,

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{273+10}{273+15} = \frac{283}{288}$$

15 ×

পরিবর্তিত জলীয় বাষ্পের চাপ, $P_1 = \dfrac{283}{288} \times P_2 = \dfrac{283}{288} \times 8{\cdot}1 \times 10^{-3}$ m $= 7{\cdot}96 \times 10^{-3}$ m পারদ।

মনে করি পরিবর্তিত শিশিরাঙ্ক = t°C

t°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্পের চাপ $= 7{\cdot}96 \times 10^{-3}$ m পারদ।

এখন প্রদত্ত রাশিগুলো হতে দেখা যাচ্ছে যে, $(8{\cdot}1 - 7{\cdot}5) \times 10^{-3}$ m $= 6 \times 10^{-4}$ m পারদ চাপ বৃদ্ধির জন্য 7°C হতে তাপমাত্রা বৃদ্ধি = (8 − 7)°C = 1°C

$(7{\cdot}96 - 7{\cdot}5) \times 10^{-3}$ m $= 0{\cdot}46 \times 10^{-3}$ m পারদ চাপ বৃদ্ধির জন্য 7°C হতে তাপমাত্রা বৃদ্ধি $= \dfrac{1}{0{\cdot}6} \times 0{\cdot}46 = 0{\cdot}766$°C

পরিবর্তিত শিশিরাঙ্ক $= (7 + 0{\cdot}766)$°C $= 7{\cdot}766$°C

২৬। কোন একদিন সিক্ত ও শুষ্ক বাল্ব আর্দ্রতামাপক যন্ত্রের শুষ্ক বালবের পাঠ 30°C এবং সিক্ত বালবের পাঠ 28°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। 30°C-এ গ্লেইসারের উৎপাদক 1·65 এবং 26°C, 28°C এবং 30°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ যথাক্রমে $25{\cdot}25 \times 10^{-3}$ m, $28{\cdot}45 \times 10^{-3}$ m এবং $31{\cdot}85 \times 10^{-3}$ m পারদ চাপ। [রা. বো. ২০০০]

আমরা জানি,

$t_1 = t + G(t_1 - t_2)$

বা, $t = t_1 - G(t_1 - t_2)$

$= 30 - 1{\cdot}65\,(30 - 28)$

$= 26{\cdot}7$°C

এখানে,
$t_1 = 30$°C
$t_2 = 28$°C
$G = 1{\cdot}65$

আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$$R = \frac{26{\cdot}7^\circ\text{C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ}}{30^\circ\text{C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ}} \times 100\%$$

$= \dfrac{f}{F} \times 100\%$

$= \dfrac{26{\cdot}37 \times 10^{-3}}{31{\cdot}85 \times 10^{-3}} \times 100\% = 82{\cdot}79\%$

এখানে,
$f = 26{\cdot}37 \times 10^{-3}$ m পারদ চাপ

২৭। কোন একদিনের শিশিরাঙ্ক 10°C ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা 67·30%। ঐ দিনের বায়ুর সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ কত? [10°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পচাপ $13\cdot64 \times 10^{-3}$ m] [রা. বো. ২০০১]

এখানে,
$f = 13\cdot64 \times 10^{-3}$ m
$R = 67\cdot3\%$
$F = ?$

আমরা জানি, $R = \frac{f}{F} \times 100\%$

বা, $67\cdot3\% = \frac{13\cdot64 \times 10^{-3}}{F} \times 100\%$

$F = \frac{13\cdot64 \times 10^{-3}}{67\cdot3}$

$= 2\cdot02 \times 10^{-4}$

২৮। কোন একদিন বায়ুর তাপমাত্রা 26°C এবং শিশিরাঙ্ক 20·4°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। 20°C, 22°C এবং 26°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 17·54, 19·83 এবং 25·21 mm পারদ চাপ। [চ. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০০]

$(22 - 20)°C = 2°C$-এর জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপের বৃদ্ধি $= (19\cdot83 - 17\cdot54)$ mmHg $= 2\cdot29$ mmHg

$(20\cdot4 - 20)°C = 0\cdot4°C$-এর জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ বৃদ্ধি $= \frac{2\cdot29 \times 0\cdot4}{2}$ mmHg $= 0\cdot458$ mmHg

শিশিরাঙ্ক 20·4°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ, $f = (17\cdot54 + 0\cdot458)$ mmHg $= 17\cdot998$ mm Hg

আবার, 26°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ, $F = 25\cdot21$ mmHg

আমরা জানি, আপেক্ষিক আর্দ্রতা,

$R = \frac{f}{F} \times 100\% = \frac{17\cdot998}{25\cdot21} \times 100\% = 71\cdot39\%$

২৯। কোন এক দিনের শিশিরাঙ্ক 7·4°C এবং কক্ষ তাপমাত্রা 18·6°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। 7°C, 8°C, 18°C ও 19°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ যথাক্রমে $7\cdot5 \times 10^{-3}$ m, $8\cdot2 \times 10^{-3}$ m, $15\cdot6 \times 10^{-3}$ m এবং $16\cdot5 \times 10^{-3}$ m পারদ] [সি. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০১]

এখানে, 7°C, 8°C, 18°C ও 19°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ যথাক্রমে $7\cdot5 \times 10^{-3}$, $8\cdot2 \times 10^{-3}$, $15\cdot6 \times 10^{-3}$ ও $16\cdot5 \times 10^{-3}$ m পারদ।

সুতরাং 7°C তাপমাত্রার পর $(8 - 7) = 1°C$ তাপমাত্রা বৃদ্ধির জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পচাপ বৃদ্ধি

$= (8\cdot2 - 7\cdot5) \times 10^{-3}$

$= 0\cdot7 \times 10^{-3}$ m পারদ

$(7\cdot4 - 7) = 0\cdot4°C$ তাপমাত্রা বৃদ্ধির জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পচাপ বৃদ্ধি

$= 0\cdot7 \times 10^{-3} \times 0\cdot4$ m $= 0\cdot28 \times 10^{-3}$ m

শিশিরাঙ্ক (7·4°C) সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ,

$f = (7\cdot5 \times 10^{-3} + 0\cdot28 \times 10^{-3})$ m $= 7\cdot78 \times 10^{-3}$ m

আবার, 18°C তাপমাত্রার পর $(19 - 18) = 1°C$ বৃদ্ধির জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ বৃদ্ধি

$= (16\cdot5 - 15\cdot6) \times 10^{-3}$ m পারদ

$= 0\cdot9 \times 10^{-3}$ m পারদ।

$(18\cdot6 - 18) = 0\cdot6°C$ তাপমাত্রা বৃদ্ধির জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ বৃদ্ধি

$= 0\cdot90 \times 0\cdot6 \times 10^{-3}$ m $= 0\cdot54 \times 10^{-3}$ m

বায়ুর তাপমাত্রায় (18·6°C) সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ,

$F = (15\cdot6 + 0\cdot54) \times 10^{-3}$ m

$= 16\cdot14 \times 10^{-3}$ m পারদ

এখন, $R = \frac{f}{F} \times 100\%$

$= \frac{7\cdot78 \times 10^{-3}}{16\cdot14 \times 10^{-3}} \times 100\%$

$= 48\cdot2\%$

৩০। কোন একদিন শিশিরাঙ্ক 7·6°C ও বায়ুর তাপমাত্রা 16°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। [7°C, 8°C এবং 16°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ যথাক্রমে $7{\cdot}5 \times 10^{-3}$ m, 8×10^{-3} m এবং $13{\cdot}5 \times 10^{-3}$ m পারদ]

[ঢা. বো. ২০০৪]

এখানে, 7°C, 8°C ও 16°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ যথাক্রমে $7{\cdot}5 \times 10^{-3}$ m, $8{\cdot}0 \times 10^{-3}$ m ও $13{\cdot}5 \times 10^{-3}$ m পারদ।

7°C তাপমাত্রার পর $(8-7) = 1$°C তাপমাত্রার বৃদ্ধির জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ বৃদ্ধি
$= (8{\cdot}0 \times 10^{-3} - 7{\cdot}5 \times 10^{-3})$
$= 0{\cdot}5 \times 10^{-3}$m পারদ

$(7{\cdot}6 - 7) = 0{\cdot}6$°C তাপমাত্রার বৃদ্ধির জন্য সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ বৃদ্ধি
$= 0{\cdot}5 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}6$
$= 0{\cdot}30 \times 10^{-3}$ m পারদ

শিশিরাংকে (7·6°C) সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ, $f = (7{\cdot}5 \times 10^{-3} + 0{\cdot}30 \times 10^{-3})$ m পারদ

$= 7{\cdot}8 \times 10^{-3}$ m পারদ

16°C তাপমাত্রায় বা বায়ুর তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ, $F = 13{\cdot}5 \times 10^{-3}$ m পারদ।

এখন, $R = \frac{f}{F} \times 100 = \frac{7{\cdot}8 \times 10^{-3}}{13{\cdot}5 \times 10^{-3}} \times 100$
$= 57{\cdot}77\%$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। বয়েলের সূত্রটি বর্ণনা কর। [য. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৪]
২। পরম আর্দ্রতা বলতে কি বুঝ ? [ব. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৪]
৩। মূল গড় বর্গ বেগ কি বা কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩]
৪। প্রমাণ চাপ কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩ ; চ. বো. ২০০১]
৫। গ্যাস অণুর গড় মুক্ত পথ কি কি রাশির উপর নির্ভর করে ? [য. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৩]
৬। আদর্শ গ্যাস কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৩] বাস্তব ক্ষেত্রে আদর্শ গ্যাস পাওয়া যায় কি ? [ব. বো. ২০০৪]
৭। শিশিরাঙ্ক কাকে বলে ? [ব. বো. ২০০৪, ২০০২ ; সি. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০১]
৮। গড় মুক্ত পথ কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৩, ২০০১; চ. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০১ ; ব. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৩, ২০০০]
৯। গ্যাসের গতিতত্ত্বের মৌলিক স্বীকার্যগুলো কি কি ? [সি. বো. ২০০৪]
১০। সম্পৃক্ত বাষ্পচাপের সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২]
১১। গ্যাস ও বাষ্পের মধ্যে পার্থক্য লিখ। [কু. বো. ২০০৩]
১২। চার্লসের সূত্র বিবৃত কর। [ব. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৩]
১৩। প্রমাণ তাপমাত্রা কাকে বলে ? [য. বো. ২০০৩ ; চ. বো. ২০০১]
১৪। সম্পৃক্ত ও অসম্পৃক্ত বাষ্পের পার্থক্য লিখ। [চ. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০৩]
১৫। আপেক্ষিক আর্দ্রতা কাকে বলে ? [ব. বো. ২০০৩, ২০০১ ; কু. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০১]
১৬। অসম্পৃক্ত বাষ্পচাপের সংজ্ঞা দাও। [য. বো. ২০০২]
১৭। সংজ্ঞা লিখ ঃ শিশিরাঙ্ক ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা [রা. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০২]
১৮। ক্রান্তি তাপমাত্রা কাকে বলে ? [চ. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০১]
১৯। দুটি ঘরের তাপমাত্রা সমান। একটিতে আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60%, অপরটিতে 80%। কোন্ ঘরটিতে বেশি অস্বস্তি লাগবে এবং কেন ? [ব বো. ২০০৪]
২০। কোন স্থানের আপেক্ষিক আর্দ্রতা 70% বলতে কি বুঝ ? [য. বো. ২০০২]
২১। শিশিরাঙ্ক 15°C বলতে কি বুঝ ?
২২। পরম শূন্য তাপমাত্রা কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৫]
২৩। আদর্শ গ্যাস কাকে বলে ? [ব. বো. ২০০৬]
২৪। S.T.P. বা N.T.P কি ?
২৫। সর্বজনীন গ্যাস ধ্রুবকের সংজ্ঞা দাও। এর একক কি ?
২৬। বোলজম্যান ধ্রুবক কি ?
২৭। বায়ুর আর্দ্রতা 10^{-2} kgm^{-3} বলতে কি বুঝ ?

২৮। মেঘলা রাত্রি অপেক্ষা মেঘহীন রাত্রি শিশির জমার পক্ষে বেশি সহায়ক—ব্যাখ্যা কর।

২৯। শীতকালে ঠোঁটে গ্লিসারিন লাগান হয় কেন ?

৩০। আমাদের দেশে বর্ষাকাল অপেক্ষা শীতকালে ভেজা কাপড় দ্রুত শুকায় কেন ? [সি. বো. ২০০৬]

রচনামূলক প্রশ্ন :

১। প্রমাণ কর যে, কোন গ্যাসের চাপ তার একক আয়তনের অণুগুলোর গতিশক্তির দুই-তৃতীয়াংশ।
[রা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; চ. বো. ২০০৬, ২০০০ ; সি. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৫, ২০০২ ; ব. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০৫, ২০০০]

২। গ্যাসের গতিতত্ত্ব অনুসারে গ্যাসের চাপের রাশিমালা নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০২]

৩। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর। [রা. বো. ২০০৫, ২০০৪]

৪। দেখাও যে, গড় মুক্ত পথ গ্যাসের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক। [ঢা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩]

৫। দেখাও যে, T পরম তাপমাত্রায় এক গ্রাম অণু গ্যাসের রৈখিক গতিশক্তি $\frac{3}{2}RT$-এর সমান। [কু. বো. ২০০৪]

৬। আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে গ্যাসের গতিতত্ত্বের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PV = \frac{1}{3}mnc^2$, এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [চ. বো. ২০০৪, ২০০০]

৭। সিক্ত ও শুষ্ক হাইগ্রোমিটারের সাহায্যে কিভাবে আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় করা যায় বর্ণনা কর।
[চ.বো. ২০০৪, ২০০২, ২০০০ ; সি. বো. ২০০৩, ২০০২ ; কু. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০১ ; ব. বো. ২০০১ ; ব. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০২, ২০০১ ; রা. বো. ২০০২, ২০০০]

৮। চার্লসের সূত্র বিবৃত কর এবং এই সূত্র থেকে প্রমাণ কর যে, স্থির চাপে আয়তন পরম তাপমাত্রার সমানুপাতিক।
[ব. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০১]

৯। একটি গ্যাসের অণুর গড় মুক্ত পথের রাশিমালা প্রতিষ্ঠা কর। [কু. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৪, ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০০ ; ঢা. বো. ২০০৩, ২০০১]

১০। একটি আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে $PV = nRT$ সমীকরণটি নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৬, ২০০৩, '০১ ; ঢা. বো. ২০০৫, '০৩ ; ব. বো. ২০০৫, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৫, ২০০১ ; সি. বো. ২০০৫, ২০০১ ; রা. বো. ২০০০ ; কু. বো. ২০০৩]

১১। গ্যাসের প্রসারণে চার্লসের সূত্র বর্ণনা কর এবং এটা হতে কিভাবে পরম শূন্য তাপমাত্রার সংজ্ঞা পাওয়া যায় ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০০৩]

১২। গ্যাস অণুর গড় মুক্ত পথের রাশিমালা প্রতিপাদন কর এবং দেখাও যে, গড় মুক্ত পথ গ্যাসের ঘনত্বের ব্যস্তানুপাতিক। [সি. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩, ২০০১]

১৩। গ্যাসের গতিতত্ত্বের ছয়টি মৌলিক স্বীকার্য লিখ। [ব. বো. ২০০৪]

১৪। গ্যাসের গতিতত্ত্ব হতে প্রমাণ কর যে একক আয়তনে কোন আবদ্ধ গ্যাস পাত্রের দেয়ালে যে চাপ দেয় তা তার গতিশক্তির দুই-তৃতীয়াংশ এবং এটা হতে দেখাও যে, গ্যাস অণুর মূল গড় বর্গবেগ এর ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। [চ. বো. ২০০২]

১৬। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয়ের প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা কর।

১৭। বয়েলের সূত্রটি লিখ ও ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক সমস্যাবলি :

১। স্থির তাপমাত্রায় $2 \times 10^5\ Nm^{-2}$ চাপে কোন নির্দিষ্ট গ্যাসের আয়তন $0.004\ m^3$, $6 \times 10^5\ Nm^{-2}$ চাপে গ্যাসটির আয়তন কত ? [উত্তর : $1.34 \times 10^{-3}\ m^3$]

২। $27°C$ তাপমাত্রায় ও $0.76m$ পারদ স্তম্ভ চাপে একটি গ্যাসের আয়তন $4.5m^3$। যদি তাপমাত্রা $77°C$ করা হয় তবে কত চাপে আয়তন $3m^3$ হবে ? [উত্তর : $1.33m$ পারদ স্তম্ভ চাপ]

৩। একটি পাত্রে $0°C$ তাপমাত্রায় কিছু গ্যাস আছে। কত তাপমাত্রায় গ্যাসের চাপ $0°C$ তাপমাত্রার চাপের অর্ধেক হবে ? [উত্তর : $136.5\ K$]

৪। স্থির তাপমাত্রায় 1×10^5 Nm^{-2} চাপে নির্দিষ্ট ভরের কিছু গ্যাসের আয়তন $0 \cdot 002$m^3। (ক) 4×10^5 Nm^{-2} চাপে গ্যাসটির আয়তন ও (খ) কত চাপে গ্যাসটির আয়তন $0 \cdot 004$ m^3 হবে নির্ণয় কর। [উত্তর : (ক) 5×10^{-4} m^3 ; (খ) 5×10^4 Nm^{-2}]

৫। 30°C তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের চাপ $1 \cdot 5 \times 10^5$ Nm^{-2} হলে 90°C তাপমাত্রায় এর চাপ কত ? [উত্তর : $1 \cdot 8 \times 10^5$ Pa]

৬। 600 mm পারদ স্তম্ভ চাপে কত তাপমাত্রায় একটি গ্যাসের আয়তন এর স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রার আয়তনের দ্বিগুণ হবে ? [উত্তর : $431 \cdot 3$ K]

৭। একটি লেকের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসার সময় বাতাসের বুদবুদ আয়তনে দ্বিগুণ হয়। বায়ুমণ্ডলের চাপ 10^5 Nm^{-2} হলে লেকটির গভীরতা কত? [সি. বো. ২০০৩] [উত্তর : $10 \cdot 20$m]

৮। কোন হ্রদের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসায় একটি বায়ু বুদবুদের ব্যাস $1 \cdot 5$ গুণ হয়। হ্রদের পৃষ্ঠে বায়ুমণ্ডলের চাপ স্বাভাবিক বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান এবং হ্রদের উষ্ণতা ধ্রুবক হলে হ্রদের গভীরতা কত ? [উত্তর : $24 \cdot 55$ m]

৯। কোন হ্রদের তলদেশ থেকে পানির উপরিতলে আসায় একটি বায়ু বুদবুদের আয়তন 3 গুণ হয়। বায়ুমণ্ডলের চাপ $1 \cdot 013 \times 10^5$ Pa হলে হ্রদের গভীরতা কত ? [উত্তর : $20 \cdot 67$ m]

১০। জলাশয়ের কত গভীরতায় একটি বুদবুদের আয়তন উপর তলে থাকাকালীন আয়তন অপেক্ষা অর্ধেক হবে ? ঐ সময় বায়ুমণ্ডলের চাপ 760 mm এবং পারদের ঘনত্ব $13 \cdot 6 \times 103$ kgm^{-3}। [য. বো. ২০০০] [উত্তর : $10 \cdot 336$m]

১১। 0°C তাপমাত্রায় ও 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে বাতাসের অণুগুলোর গড় মুক্তপথের মান বের কর। বাতাসের প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা $= 4 \times 10^{19}$। প্রতিটি অণুর ব্যাস $= 3 \times 10^{-8}$ cm। [উত্তর : $6 \cdot 26 \times 10^{-6}$ cm]

১২। 1 লিটার আয়তনের একটি পাত্রে 2×10^{25} সংখ্যক অণু আছে। যদি অণুর ভর 3×10^{-25} g হয় এবং মূল গড় বর্গবেগ 5×10^4 cms^{-1} হয় তাহলে উক্ত গ্যাসের চাপ নির্ণয় কর। [উত্তর : 5×10^5 Nm^{-2}]

১৩। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে কোন আবদ্ধ গ্যাসের ঘনত্ব $0 \cdot 0995$ kgm^{-3} হলে ঐ গ্যাসের অণুগুলোর গড় বর্গবেগের বর্গমূল নির্ণয় কর। [উত্তর : $1 \cdot 747 \times 10^3$ ms^{-1}]

১৪। 27°C তাপমাত্রায় 5g নাইট্রোজেনের গতিশক্তি নির্ণয় কর। (নাইট্রোজেনের গ্রাম আণবিক ভর = 28g)। [উত্তর : $667 \cdot 8$ J]

১৫। 27°C তাপমাত্রায় এবং 4×10^5 Nm^{-2} চাপে কোন গ্যাসের আয়তন 100 cm^3। 100°C তাপমাত্রায় ও 8×10^5 Nm^{-2} চাপে এর আয়তন কত হবে ? [উত্তর : $62 \cdot 2$ cm^3]

১৬। 0°C তাপমাত্রায় কোন গ্যাসের চাপ 5×10^5 Pa হলে 80°C তাপমাত্রায় এর চাপ কত হবে ? [উত্তর : $6 \cdot 465 \times 10^5$ Pa]

১৭। 20g হিলিয়াম গ্যাস পূর্ণ একটি বেলুনের আয়তন $0 \cdot 12$m^3। বেলুনের ভিতরে গ্যাসের চাপ $1 \cdot 5 \times 10^5$ Nm^{-2}। বেলুনের ভিতরে গ্যাসের তাপমাত্রা কত ? [উত্তর : $433 \cdot 2$ K]

১৮। একটি সিলিন্ডারে রক্ষিত অক্সিজেন গ্যাসের আয়তন 1×10^{-2} m^3 ; তাপমাত্রা 300K এবং চাপ $2 \cdot 5 \times 10^5$ Nm^{-2}। তাপমাত্রা স্থির রেখে কিছু অক্সিজেন বের করে নেয়ার পর চাপ কমে $1 \cdot 3 \times 10^5$ Nm^{-2} হয়। ব্যবহৃত অক্সিজেনের ভর কত ? [উত্তর : $0 \cdot 015$ kg]

১৯। 27°C তাপমাত্রা এবং 20 atm চাপের একটি গ্যাসকে প্রসারিত হতে দেওয়ায় এর নতুন আয়তন পূর্বের আয়তনের 10 গুণ এবং নতুন চাপ বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান হল। গ্যাসটির নতুন তাপমাত্রা কত ? [উত্তর : -123°C]

২০। যদি $R = 8 \cdot 31$ JK^{-1} mol^{-1} হয় তবে 76 cm পারদ চাপে 27°C তাপমাত্রায় 50g অক্সিজেনের আয়তন নির্ণয় কর। [উত্তর : $3 \cdot 85 \times 10^{-2}$ m^3]

২১। যদি আদর্শ চাপ ও তাপমাত্রায় হাইড্রোজেন গ্যাসের ঘনত্ব $0 \cdot 09$ kgm^{-3} হয়, তবে আদর্শ তাপমাত্রা ও চাপে হাইড্রোজেন অণুর মূল গড় বর্গবেগ কত ? [উত্তর : $1837 \cdot 6$ ms^{-1}]

২২। কোন গ্যাসের অণুর ব্যাসার্ধ $1 \cdot 2 \times 10^{-10}$ m এবং গড় মুক্ত পথ $2 \cdot 6 \times 10^{-8}$ m। উক্ত গ্যাসের এক ঘনমিটার আয়তনে অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর। যদি অণুগুলোর মূল গড় বর্গবেগ 800 ms^{-1} হয় তবে পরপর দুটি সংঘর্ষের মধ্যে সময়ের ব্যবধান নির্ণয় কর। [উত্তর : $1 \cdot 504 \times 10^{26}$ m^{-3} ; $3 \cdot 25 \times 10^{-9}$ s]

২৩। একটি গ্যাসের অণুর ব্যাসার্ধ $3 \cdot 6 \times 10^{-10}$ m এবং প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা $2 \cdot 79 \times 10^{19}$ হলে অণুর গড় মুক্ত পথ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৪] [উত্তর : $6 \cdot 25 \times 10^{-8}$ m]

২৪। কোন গ্যাস অণুর ব্যাস 2×10^{8} cm এবং প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা 3×10^{19} হলে অণুর গড় মুক্ত পথ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৬] (উত্তর ঃ 1.877×10^{-7} m]

২৫। কোন একটি গ্যাস অণুগুলোর গড় মুক্ত পথ 2.6×10^{-8} m এবং আণবিক ব্যাস 2.2×10^{-10} m হলে, প্রতি ঘন সেন্টিমিটারে অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 1.79×10^{20}]

২৬। কোন গ্যাসের প্রতি ঘনমিটারে অণুর সংখ্যা 3×10^{25} এবং অণুর ব্যাস 3.8×10^{-10} m হলে, ঐ গ্যাসের গড় মুক্ত পথ বের কর। [উত্তর ঃ 5.2×10^{-8} m]

২৭। কোন একটি গ্যাসের অণুগুলোর গড় মুক্ত পথ 2.6×10^{-8} m ও অণুর ব্যাস 3×10^{-10} m হলে, প্রতি ঘনমিটারে অণুর সংখ্যা নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 5.2×10^{25}]

২৮। 1092°C তাপমাত্রায় বায়ুর অণুগুলোর গড় বর্গবেগের বর্গমূলীয় মান নির্ণয় কর। স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় বায়ুর ঘনত্ব = 1.296 kgm^{-3}] [উঃ 1.08×10^{3} ms^{-1}]

২৯। 0°C-এ নাইট্রোজেন গ্যাসের গড় বর্গবেগের বর্গমূলীয় মান 493 ms^{-1}। স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় নাইট্রোজেনের ঘনত্ব নির্ণয় কর। স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় পারদের ঘনত্ব = 13.59×10^{3} kgm^{-3} ও $g = 9.8$ms^{-2}]

[উঃ 1.2493 kgm^{-3}]

৩০। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপে অক্সিজেনের ঘনত্ব হাইড্রোজেনের ঘনত্বের 16 গুণ হলে অক্সিজেন অণুর গড় বর্গবেগের বর্গমূলীয় মান নির্ণয় কর। [হাইড্রোজেনের ঘনত্ব = 0.0898 kgm^{-3}] [উঃ 461.21 ms^{-1}]

৩১। 27°C তাপমাত্রায় প্রতি কিলোগ্রাম মোল হিলিয়াম গ্যাসের গতিশক্তি নির্ণয় কর। [R = 8314 J k mol^{-1}K^{-1}]

[উঃ 3.74×10^{6} J]

৩২। 0°C তাপমাত্রায় একটি হাইড্রোজেন অণুর গতিশক্তি 5.64×10^{-21} J এবং R = 8320 J k mol^{-1}K^{-1} ধরে অ্যাভোগ্রাড্রো সংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ 6.04×10^{26} কণা K mol^{-1}]

৩৩। নির্দিষ্ট কোন একদিনের শিশিরাঙ্ক 8.5°C এবং বায়ুর তাপমাত্রা 18°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, 8°C, 9°C এবং 18°C তাপমাত্রায় সর্বোচ্চ বায়ুচাপ যথাক্রমে 0.084 m, 0.0861 m এবং 0.1546 m পারদ।

[উত্তর ঃ 55%]

৩৪। কোন একদিনে শিশিরাঙ্ক 8.5°C এবং বায়ুর তাপমাত্রা 17.5°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। [8°C, 9°C, 17°C ও 18°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 7.35×10^{-3}, 8.03×10^{-3}, 15.48×10^{-3} এবং 16.46×10^{-3} m পারদ। [রা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)] [উত্তর ঃ 48.2%]

৩৫। কোন একটি আবদ্ধ স্থানের বায়ুর তাপমাত্রা 27°C ও শিশিরাঙ্ক 15°C। তাপমাত্রা কমে 17°C হলে, জলীয় বাষ্পের চাপ ও শিশিরাঙ্ক কত হবে ? [সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ 15°C তাপমাত্রায় 12.8×10^{-3} m ও 14°C তাপমাত্রায় 12.0×10^{-3} m পারদ।] [উঃ 12.37 mm পারদ ; 14.462°C]

৩৬। কোন একটি বন্ধ ঘরের তাপমাত্রা 17°C এবং শিশিরাঙ্ক 12°C। বায়ুর তাপমাত্রা কমে 14°C হলে শিশিরাঙ্ক কত হবে ? [10°C ও 12°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 9.2×10^{-3} m ও 10.5×10^{-3} m পারদ।]

[উঃ 11.053 °C]

৩৭। কোন একদিন বায়ুর তাপমাত্রা 22°C এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60%। যদি ঐ স্থানের তাপমাত্রা হ্রাস পেয়ে 12°C হয় তবে বায়ুস্থিত জলীয় বাষ্পের কত অংশ ঘনীভূত হবে ? [12°C ও 22°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 10.5×10^{-3} m এবং 19.8×10^{-3} m] [উঃ 0.116]

৩৮। একটি শুষ্ক ও আর্দ্র বাল্‌ব থার্মোমিটারের শুষ্ক ও আর্দ্র বাল্‌বের তাপমাত্রা যথাক্রমে 25°C ও 19°C। বায়ুর শিশিরাঙ্ক ও আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। [25°C তাপমাত্রায় G-এর মান 1.65 ; 15°C, 16°C ও 25°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ যথাক্রমে 12.77×10^{-3} m, 13.71×10^{-3} m ও 23.7×10^{-3} m।] [উঃ 15.1°C ঃ 54.28%]

৩৯। নির্দিষ্ট কোন দিনে শিশিরাঙ্ক 10.5°C এবং বায়ুর তাপমাত্রা 19.4°C। আপেক্ষিক আর্দ্রতা নির্ণয় কর। [10°C 11°C, 19°C এবং 20°C তাপমাত্রায় সর্বাধিক বায়ুচাপ যথাক্রমে 9.2×10^{-3} m, 9.9×10^{-3} m, 16.5×10^{-3} m এবং 17.7×10^{-3} m পারদ।] [উঃ 56.24%]

৪০। বায়ুর তাপমাত্রা 30°C এবং আপেক্ষিক আর্দ্রতা 60% হলে বায়ুর জলীয় বাষ্পের চাপ কত ? 30°C তাপমাত্রায় সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প চাপ = 31.70×10^{-3} mHg [য. বো. ২০০২] [উত্তর ঃ 19×10^{-3} mHg]

১২
তাপমাত্রা
TEMPERATURE

১২·১ সূচনা
Introduction

তাপ ও তাপমাত্রা পদার্থবিজ্ঞানের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পদার্থের ভৌতিক অবস্থা প্রকাশে তাপমাত্রার ভূমিকা বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। আমরা জানি যে কোন পদার্থ অসংখ্য অণুর সমন্বয়ে গঠিত হয়। এই অণুগুলোর গতিশক্তি রয়েছে। তাপমাত্রা বৃদ্ধি করলে গতিশক্তি বৃদ্ধি পায় এবং কমালে গতিশক্তি হ্রাস পায়। তাপমাত্রা একটি পরিমাপযোগ্য রাশি। এখন আমরা তাপমাত্রা, তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেল, তাপমাত্রা পরিমাপের নীতি ও পদ্ধতি ইত্যাদি আলোচনা করব।

১২·২ তাপমাত্রা
Temperature

গরম বা ঠাণ্ডা বোধ আমাদের সকলেরই রয়েছে। সুতরাং কোন একটি বস্তু কি পরিমাণ গরম বা ঠাণ্ডা তার পরিমাপকে আপাতভাবে ঐ বস্তুর তাপমাত্রা বলে। অর্থাৎ আপাতভাবে বলা যায় **তাপমাত্রা বস্তুর বা উত্তপ্ততার (degree of hotness) পরিমাণ বুঝায়।** মনে করি দুটি বস্তু রয়েছে। একটি বস্তু A এবং অপরটি B। যদি স্পর্শ করলে মনে হয় বস্তু A বস্তু B অপেক্ষা বেশি গরম, তবে আমরা বলতে পারি বস্তু A-এর তাপমাত্রা বেশি এবং বস্তু B-এর তাপমাত্রা কম।

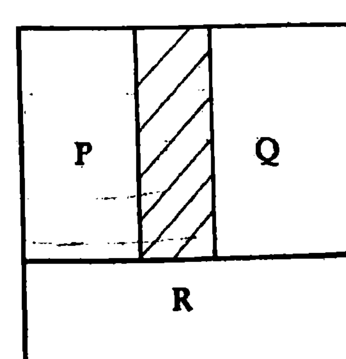
কিন্তু নিখুঁতভাবে তাপমাত্রার নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে ঃ

তাপমাত্রা বস্তুর একটি তাপীয় অবস্থা যা ঐ বস্তু হতে অন্য বস্তুতে তাপের প্রবাহ নিয়ন্ত্রণ করে এবং তাপ প্রবাহের অভিমুখ নির্ধারণ করে।

১২·৩ তাপীয় সাম্যাবস্থা
Thermal equilibrium

পরিপার্শ্বের তুলনায় উত্তপ্ত একটি বস্তুকে যদি উন্মুক্ত স্থানে রেখে দেওয়া হয়, তবে দেখা যায় যে উত্তপ্ত বস্তু তাপ হারাতে থাকে এবং যতক্ষণ পর্যন্ত উত্তপ্ত বস্তুর তাপমাত্রা পরিপার্শ্বের তাপমাত্রার সমান না হয় ততক্ষণ পর্যন্ত তাপ হারানো চলতে থাকে। অনুরূপ ঘটনা লক্ষ করা যায় যদি দুটি ভিন্ন তাপমাত্রার বস্তুর মধ্যে তাপীয় সংযোগ করা হয়। তবে উচ্চ তাপমাত্রার বস্তু হতে নিম্ন তাপমাত্রার বস্তুতে তাপ প্রবাহিত হয় এবং এক সময় উভয় বস্তুই একই তাপমাত্রায় উপনীত হয়। একে তাপীয় সাম্যাবস্থা বলে।

তাপগতিবিদ্যার শূন্যতম সূত্র (Zeroth law of thermodynamics) ঃ দুটি বস্তু যদি তৃতীয় কোন বস্তুর সাথে তাপীয় সাম্যাবস্থায় থাকে তবে প্রথমোক্ত বস্তু দুটি পরস্পরের সাথে তাপীয় সাম্যাবস্থায় থাকবে। একে তাপগতিবিদ্যার শূন্যতম সূত্র বলা হয়।



চিত্র ১২·১

ব্যাখ্যা ঃ দুটি বস্তু সাম্যাবস্থায় আছে, তা নির্ধারণের জন্য তৃতীয় একটি বস্তু ব্যবহার করা হয়। ধরা যাক P ও Q দুটি বস্তু একটি কুপরিবাহী দেওয়াল দিয়ে পৃথক করা অবস্থায় তৃতীয় একটি বস্তু R-এর সংস্পর্শে রাখা হল [চিত্র ১২·১]। কিছুক্ষণ পরে দেখা যাবে P ও Q উভয়ই তৃতীয় বস্তু R-এর সাথে তাপীয় সাম্যাবস্থায় পৌছবে। এখন কুপরিবাহী দেওয়ালটি সরিয়ে নিলেও P ও Q-এর তাপমাত্রায় কোন পরিবর্তন হবে না। এ থেকে বুঝা যাচ্ছে যে দেওয়াল সরানোর আগেই P ও Q পরস্পরের তাপীয় সাম্যাবস্থায় পৌচেছে। এই উদাহরণ থেকেই উপরের সূত্র প্রমাণিত হয়। এই সূত্রের উপর ভিত্তি করেই থার্মোমিটার তৈরি করা হয়েছে।

১২.৪ তাপ ও তাপমাত্রার মধ্যে পার্থক্য
Distinction between heat and temperature

তাপ এবং তাপমাত্রার মধ্যে ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক থাকলেও তারা একই অর্থ বহন করে না। তাদের মধ্যে যথেষ্ট পার্থক্য রয়েছে। পার্থক্যসমূহ নিম্নে উল্লেখ করা হল :

১। তাপ এক প্রকার শক্তি, কিন্তু তাপমাত্রা বস্তুর একটি তাপীয় অবস্থা।

২। তাপ শক্তি, তাপমাত্রা শক্তির প্রকাশ।

৩। তাপ কারণ, তাপমাত্রা এর ফল।

৪। তাপ প্রয়োগ করলে বস্তুর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায় এবং তাপ অপসারণে বস্তুর তাপমাত্রা হ্রাস পায়।

৫। দুটি বস্তু একই তাপমাত্রায় থাকলেও তাপের পরিমাণ বিভিন্ন হতে পারে।

৬। একটি বস্তু হতে অন্য বস্তুতে তাপের প্রবাহ তাদের তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে।

৭। তাপ বস্তুস্থিত অণুগুলোর মোট শক্তির সমানুপাতিক, কিন্তু তাপমাত্রা বস্তুস্থিত একটি অণুর গড় গতিশক্তির সমানুপাতিক।

৮। তাপ অধিক তাপমাত্রাবিশিষ্ট বস্তু হতে কম তাপমাত্রাবিশিষ্ট বস্তুর দিকে ধাবিত হয়।

৯। পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখায় তাপের পরিমাপ করা হয় তার নাম ক্যালরিমিতি এবং যে শাখায় তাপমাত্রার পরিমাপ করা হয়, তার নাম থার্মোমিতি।

১০। যে যন্ত্রের সাহায্যে তাপ পরিমাপ করা হয় তার নাম ক্যালরিমিটার। অপরপক্ষে, যে যন্ত্রের সাহায্যে তাপমাত্রা পরিমাপ করা হয়, তার নাম থার্মোমিটার বা তাপমান যন্ত্র।

১১। তাপের একক আন্তর্জাতিক পদ্ধতিতে জুল। কিন্তু তাপমাত্রা প্রকাশ করা হয় °C, °F ও K-এ।

১২। তাপমাত্রার মাত্রা সমীকরণ নেই, কিন্তু তাপের মাত্রা সমীকরণ শক্তির মাত্রা সমীকরণ $[ML^2T^{-2}]$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

১২.৫ উষ্ণতামিতি ধর্ম ও উষ্ণতামিতি পদার্থ
Thermometric property and Thermometric substance

কোন বস্তু কত গরম অথবা কত ঠাণ্ডা তা স্পর্শ করে সরাসরি বুঝা যায় না, অনুভব করা যায় মাত্র। এই কারণে তাপমাত্রার তারতম্যভেদে যে পদার্থের বিশেষ কোন ধর্ম নিয়মিতভাবে পরিবর্তিত হয় এবং যে ধর্মের পরিবর্তন লক্ষ করে সহজ ও সূক্ষ্মভাবে তাপমাত্রা নিরূপণ করা যায় সেই পদার্থ বস্তুর তাপমাত্রা পরিমাপে ব্যবহৃত হয়।

যে যন্ত্র দ্বারা বস্তুর তাপমাত্রা নির্ভুলভাবে পরিমাপ করা যায় তাকে থার্মোমিটার (Thermometer) বলে। তাপমাত্রা পরিমাপ উপযোগী পদার্থের যে সকল ধর্ম কাজে লাগানো হয়, পদার্থের ঐ ধর্মগুলোকে উষ্ণতামিতি ধর্ম বলে এবং যে সকল পদার্থের উষ্ণতামিতি ধর্ম ব্যবহার করে থার্মোমিটার তৈরি করা হয় তাদেরকে উষ্ণতামিতি পদার্থ বলে। সাধারণত উষ্ণতামিতি পদার্থের বা তার ধর্মের নাম অনুসারে থার্মোমিটারের নামকরণ করা হয়। বিভিন্ন উষ্ণতামিতি পদার্থের তৈরি কয়েকটি থার্মোমিটারের নাম ও ধর্ম উল্লেখ করা হল।

(ক) তরল থার্মোমিটার (Liquid thermometer) : তাপমাত্রার পরিবর্তনের সাথে সাথে তরল পদার্থের আয়তন পরিবর্তিত হয়। যে সব থার্মোমিটারে উষ্ণতামিতি পদার্থ হিসেবে তরল ব্যবহৃত হয় তাদেরকে সাধারণত তরল থার্মোমিটার বলে। থার্মোমিটারে উষ্ণতামিতি পদার্থ হিসেবে পারদ ব্যবহৃত হলে তাকে পারদ থার্মোমিটার বলে এবং অ্যালকোহল ব্যবহৃত হলে তাকে অ্যালকোহল থার্মোমিটার বলে। তরলকে সুষম ব্যাসের কৈশিক নলে রাখা হয়। তরলের উচ্চতা বা স্তম্ভের দৈর্ঘ্যকে উষ্ণতামিতি ধর্ম বলা যায় এবং কৈশিক নলে তরলের উচ্চতা তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

(খ) গ্যাস থার্মোমিটার (Gas thermoneter) : দুই ধরনের গ্যাস থার্মোমিটার রয়েছে। যথা—(১) স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটার ও (২) স্থির চাপ গ্যাস থার্মোমিটার।

(১) স্থির আয়তনে একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে বৃদ্ধি পায় এবং তাপমাত্রা হ্রাস পেলে চাপ কমে যায়। গ্যাসের এই ধর্মকে ব্যবহার করে যে সব থার্মোমিটার তৈরি হয় তাদেরকে স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটার (constant volume gas thermometer) বলে। এই ধরনের একটি থার্মোমিটারে হাইড্রোজেন উষ্ণতামিতি পদার্থরূপে ব্যবহৃত হলে তাকে স্থির আয়তন হাইড্রোজেন থার্মোমিটার বলে।

(২) স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের আয়তন তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে বৃদ্ধি পায় এবং তাপমাত্রা হ্রাস পেলে আয়তন কমে যায়। গ্যাসের এই ধর্মকে ব্যবহার করে যে সব থার্মোমিটার তৈরি তাদেরকে স্থির চাপ গ্যাস থার্মোমিটার (constant pressure gas thermometer) বলে। এই প্রকার একটি থার্মোমিটারে হাইড্রোজেন ব্যবহৃত হলে তাকে স্থির চাপ হাইড্রোজেন থার্মোমিটার বলে।

(গ) রোধ থার্মোমিটার (Resistance thermometer) : সাধারণত পরিবাহীর তড়িৎ রোধ তাপমাত্রার বৃদ্ধিতে বৃদ্ধি পায়। কাজেই একটি পরিবাহীর তড়িৎ রোধ জেনে তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়। এই নীতির উপর যে সব থার্মোমিটার গঠিত হয়েছে তাদেরকে **রোধ থার্মোমিটার** (Resistance thermometer) বলে। এরূপ একটি প্লাটিনাম ধাতুর থার্মোমিটারকে **প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার** বলে।

(ঘ) তাপযুগল বা থার্মোকাপল থার্মোমিটার (Thermocouple thermometer) : দুটি সুবিধামত তার পরপর যুক্ত করে সংযুক্ত দুই প্রান্তে তাপমাত্রার পার্থক্য সৃষ্টি করলে এতে তড়িচ্চালক বলের উদ্ভব হয়। এই বল প্রান্তদ্বয়ের তাপমাত্রার পার্থক্যভেদে বিভিন্ন হয় এবং এই তড়িচ্চালক বল মেপে দুই প্রান্তের তপমাত্রার পার্থক্য জানা যায়। এক প্রান্তের তাপমাত্রা জানা থাকলে এই পার্থক্য হতে অন্য প্রান্তের তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়। বিভিন্ন ধাতুর এরূপ দুটি তারকে একত্রে **তাপযুগল** বা **থার্মোকাপল** বলে। যেমন— কপার কনস্টানটান (copper-constantan) থার্মোকাপল।

(ঙ) থার্মিস্টর (Thermistor) : তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে অর্ধপরিবাহী পদার্থের বৈদ্যুতিক রোধ হ্রাস পায়। অর্ধপরিবাহী পদার্থের এই ধর্মের উপর ভিত্তি করে থার্মিস্টর তৈরি করা হয়।

(চ) বিকিরণ থার্মোমিটার (Radiation thermometer) : তাপমাত্রা 550°C-এর বেশি হলে কোন কোন বস্তু হতে বিভিন্ন রঙের আলো বের হতে দেখা যায়। পরীক্ষায় দেখা যায় যে, একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় বস্তু হতে একটি নির্দিষ্ট রঙের আলো নির্গত হয়। সুতরাং আলোর বর্ণালী পরীক্ষা করে তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়। এরূপ একটি থার্মোমিটারকে **বিকিরণ থার্মোমিটার** বলে।

(ছ) বিচুম্বকীকরণ থার্মোমিটার (Demagnetisation thermometer) : তাপমাত্রা পরিবর্তনের সাথে প্যারাচৌম্বক পদার্থ (paramagnetic substance)-এর চৌম্বক গ্রাহীতার পরিবর্তন হয়। এই ধর্মকে ব্যবহার করে যে থার্মোমিটার তৈরি হয় তাকে বিচুম্বকীকরণ থার্মোমিটার বলে। নিম্ন তাপমাত্রা পরিমাপে এই থার্মোমিটার খুবই উপযোগী।

১২·৬ পানির ত্রৈধ বিন্দুর (বা একটি স্থির বিন্দুর) সাপেক্ষে থার্মোমিতির মূলনীতি

Principle of thermometry in relation to triple point of water

সূচনা : তাপমাত্রার স্কেল তৈরির জন্য নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুর দরকার। 1954 সালে অনুষ্ঠিত আন্তর্জাতিক ওজন ও পরিমাপ সংস্থার অধিবেশনের সিদ্ধান্ত অনুযায়ী তাপমাত্রা পরিমাপে পানির ত্রৈধ বিন্দুকে স্থির বিন্দু হিসেবে ধরে নেয়া হয়। একটি মাত্র স্থির বিন্দুর (পানির ত্রৈধ বিন্দু) সাপেক্ষে তাপমাত্রার স্কেল নির্ধারণ করা হয়। পানির ত্রৈধবিন্দু হল এমন একটি তাপমাত্রা, যে তাপমাত্রায় **বিশুদ্ধ বরফ, বিশুদ্ধ পানি এবং সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প তাপগত**

সহঅবস্থানে থাকে তাকে পানির ত্রৈধ বিন্দু বলে। পানির ত্রৈধ বিন্দু $0.16°C$ বা 273.16 K (4.58 mm পারদ চাপে)। আর সাধারণভাবে বলা যায় যে **তাপমাত্রায় কোন পদার্থের কঠিন, তরল এবং বাষ্প একটি নির্দিষ্ট চাপে তাপগত সহঅবস্থানে থাকে তাকে উক্ত পদার্থের ত্রৈধ বিন্দু বলে।**

তাপমাত্রা পরিমাপের এস. আই. (S. I.) একক হল কেলভিন (K)।

অতএব 1 K বা এক কেলভিন = $\frac{1}{~~273.16°C~~}$ পানির ত্রৈধ বিন্দু।

নীতি ঃ কোন পদার্থের উষ্ণতামিতিক ধর্ম তাপমাত্রার সমানুপাতিক।

মনে করি x উষ্ণতামিতিক ধর্ম এবং T তাপমাত্রা।

$$x \propto T$$

যদি T_1 এবং T_2 তাপমাত্রায় উষ্ণতামিতিক ধর্ম যথাক্রমে x_1 ও x_2 হয়, তবে আমরা পাই,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (1)$$

এখন পানির ত্রৈধ বিন্দুতে উষ্ণতামিতিক ধর্ম x_{tp} এবং যে কোন তাপমাত্রা T-তে উষ্ণতামিতিক ধর্ম x হলে আমরা পাই, $\frac{T}{273.16\ K} = \frac{x}{x_{tp}}$

বা, $$T = \left(273.16 \frac{x}{x_{tp}}\right) K \qquad (2)$$

এটিই হল পানির ত্রৈধ বিন্দুর সাপেক্ষ কোন থার্মোমিটারের সাহায্যে তাপমাত্রা নির্ণয়ের মূলনীতি।

বিভিন্ন থার্মোমিটার ঃ

(ক) পারদ থার্মোমিটার ঃ এক্ষেত্রে আমরা পারদ স্তম্ভের দৈর্ঘ্য বিবেচনা করি। x-এর স্থলে l এবং পানির ত্রৈধ বিন্দুতে উষ্ণতামিতিক ধর্ম l_{tp} হলে,

$$T = \left(273.16 \times \frac{l}{l_{tp}}\right) K$$

(খ) স্থির চাপ গ্যাস থার্মোমিটার ঃ এ স্থলে উষ্ণতামিতিক ধর্ম গ্যাসের আয়তন V। পানির ত্রৈধ বিন্দুতে উষ্ণতামিতিক ধর্ম V_{tp} হলে,

$$T = \left(273.16 \times \frac{V}{V_{tp}}\right) K$$

(গ) স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটার ঃ এক্ষেত্রে উষ্ণতামিতিক ধর্ম গ্যাসের চাপ P। পানির ত্রৈধ বিন্দুতে উষ্ণতামিতিক ধর্ম P_{tp} হলে,

$$T = \left(273.16 \times \frac{P}{P_{tp}}\right) K$$

(ঘ) রোধ থার্মোমিটার ঃ এক্ষেত্রে উষ্ণমিতিক ধর্ম পরিবাহীর রোধ R। পানির ত্রৈধ বিন্দুতে উষ্ণতামিতিক ধর্ম R_{tp} হলে,

$$T = \left(273.16 \times \frac{R}{R_{tp}}\right) K$$

(ঙ) তাপযুগল বা থার্মোকাপল থার্মোমিটার ঃ এক্ষেত্রে উষ্ণতামিতিক ধর্ম তাপ তড়িচ্চালক বল E। পানির ত্রৈধ বিন্দুতে এর মান E_{tp} হলে, $T = \left(273.16 \times \frac{E}{E_{tp}}\right) K$

(চ) বাষ্পচাপ থার্মোমিটার ঃ এক্ষেত্রে উষ্ণতামিতিক ধর্ম বাষ্পচাপ f। পানির ত্রৈধ বিন্দুতে উষ্ণতামিতিক ধর্ম f_{tp} হলে, $T = \left(273.16 \times \frac{f}{f_{tp}}\right) K$

১২·৭ দুই স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে থার্মোমিতির মূলনীতি
Principle of the thermometry in relation to two fixed points

সেলসিয়াস, ফারেনহাইট এবং আরও কয়েকটি স্কেলে দুই স্থির বিন্দু পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতির থার্মোমিতির মূলনীতি হল ঊর্ধ্ব স্থির ও নিম্ন স্থির বিন্দুর মধ্যবর্তী ব্যবধানকে কতগুলো সমান ভাগে ভাগ করে এক একটি স্কেল গঠন করা হয়। প্রতিটি ভাগ এক ডিগ্রী ($1°$) তাপমাত্রা নির্দেশ করে।

তাপমাত্রা নির্ধারণের সময় পদার্থের উষ্ণতামিতি ধর্ম (যেমন কৈশিক নলে তরলের উচ্চতা, রোধ থার্মোমিটারে পরিবাহীর রোধ, গ্যাসীয় থার্মোমিটারে গ্যাসের চাপ বা আয়তন ইত্যাদি) কাজে লাগানো হয়। ধরা যাক, বরফ বিন্দু ও স্টীম বিন্দুর তাপমাত্রা যথাক্রমে θ_{ice} এবং θ_{steam}। এই দুই তাপমাত্রায় কোন একটি উষ্ণতামিতি ধর্মের মান যথাক্রমে X_{ice} ও X_{steam}। θ_{ice} ও θ_{steam} স্থির বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী মৌলিক ব্যবধান সমান N সংখ্যক ভাগে বিভক্ত ($\theta_{steam} - \theta_{ice} = N$)। এখন অন্য কোন তাপমাত্রা θ- তে ঐ উষ্ণতামিতি ধর্মের মান X_θ। আমরা জানি, উষ্ণতামিতি ধর্ম X-এর পরিবর্তন তাপমাত্রার পরিবর্তনের সমানুপাতিক। এখন N ভাগ (অর্থাৎ $N°$) তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে X-এর বৃদ্ধি $= X_{steam} - X_{ice}$

অতএব, $X_{steam} - X_{ice} \propto N$ (3)

$= KN$, K সমানুপাতিক ধ্রুবক।

আবার, θ ভাগ (অর্থাৎ $\theta°$) তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে X-এর বৃদ্ধি $= X_\theta - X_{ice}$

$$X_\theta - X_{ice} \propto \theta = K\theta \quad (4)$$

সমীকরণ (3) ও (4) হতে পাই,

$$\frac{K\theta}{KN} = \frac{X_\theta - X_{ice}}{X_{steam} - X_{ice}}$$

$$\boxed{\text{বা, } \theta = \frac{X_\theta - X_{ice}}{X_{steam} - X_{ice}} \times N} \quad (5)$$

সমীকরণ (5) হচ্ছে দুই স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে থার্মোমিতির মূল সমীকরণ।

উদাহরণ : একটি স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারের $0°C$ ও $100°C$ তাপমাত্রায় বায়ুর চাপ যথাক্রমে 90 cm Hg ও 130 cm Hg। উষ্ণ পানিতে থার্মোমিটারটি নিমজ্জিত করলে বায়ুচাপ 110 cm Hg পাওয়া গেলে পানির তাপমাত্রা হবে,

$$\theta = \frac{P_\theta - P_0}{P_{100} - P_0} \times 100 = \frac{110 - 90}{130 - 90} \times 100 = \frac{20}{40} \times 100 = 50°C$$

১২·৮ তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেল
Different scales of temperature

তাপমাত্রা পরিমাপের জন্য সর্বমোট ছয়টি স্কেল রয়েছে, যথা—

(১) **সেন্টিগ্রেড বা সেলসিয়াস স্কেল** (Centigrade or Celcius scale)

(২) **ফারেনহাইট স্কেল** (Fahrenheit scale)

(৩) **আদর্শ গ্যাস স্কেল** (Perfect Gas scale)

(৪) **কেলভিন-এর পরম তাপগতীয় স্কেল** (Kelvin's absolute thermodynamic scale) এবং

(৫) **তাপমাত্রার আন্তর্জাতিক স্কেল** (International scale of temperature)

৬/ রোমার

১। সেলসিয়াস স্কেল (Celcius scale) : সুইডেনের জ্যোতির্বিজ্ঞানী অ্যানডার্স সেলসিয়াস (Anders Celcius) 1742 খ্রিস্টাব্দে তাপমাত্রার এই স্কেল প্রবর্তন করেন। এই স্কেলের বৈশিষ্ট্য হল এতে দুটি স্থির বিন্দু বা স্থিরাঙ্ক রয়েছে। যথা—নিম্ন স্থির বিন্দু ও ঊর্ধ্ব স্থির বিন্দু।

নিম্ন স্থির বিন্দু (Lower fixed point) ঃ যে তাপমাত্রায় প্রমাণ চাপে বিশুদ্ধ বরফ গলতে শুরু করে তাকে নিম্ন স্থির বিন্দু বা স্থিরাঙ্ক বলে। একে বরফ বিন্দু ও (ice point) বলা হয়।

ঊর্ধ্ব স্থির বিন্দু (Upper fixed point) ঃ যে তাপমাত্রায় প্রমাণ চাপে বিশুদ্ধ পানি জলীয় বাষ্পে পরিণত হতে শুরু করে তাকে সেলসিয়াস স্কেলের ঊর্ধ্ব বিন্দু বা স্থিরাঙ্ক বলে। একে স্টীম বিন্দুও (steam point) বলা হয়।

এই স্কেলে নিম্ন স্থির বিন্দুকে শূন্য ডিগ্রী (0°) এবং ঊর্ধ্ব স্থির বিন্দুকে 100° ধরা হয় এবং মৌলিক ব্যবধানকে 100টি সমান ভাগে ভাগ করা হয়। প্রত্যেক ভাগকে 1° সেলসিয়াস বা 1° সেন্টিগ্রেড (1°C) বলা হয়। সুতরাং সেলসিয়াস স্কেল ও 1°C-এর নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা ঃ যে স্কেলে বরফ বিন্দুকে 0° এবং স্টীম বিন্দুকে 100° ধরে মধ্যবর্তী মৌলিক ব্যবধানকে সমান 100 ভাগে ভাগ করা হয়, সেই স্কেলকে সেলসিয়াস স্কেল এবং এর প্রত্যেক ভাগকে এক ডিগ্রী সেলসিয়াস (1°C) বলে।

২। ফারেনহাইট স্কেল (Farenheit scale) ঃ জার্মান দার্শনিক জি.ডি. ফারেনহাইট 1720 খ্রিস্টাব্দে এই স্কেল প্রবর্তন করেন। সেলসিয়াস স্কেলের ন্যায় এই স্কেলেও দুটি স্থির বিন্দু পদ্ধতিতে তাপমাত্রা পরিমাপ করা হয়। এই স্কেলে নিম্ন স্থির বিন্দু বা স্থিরাঙ্ক 32° এবং ঊর্ধ্ব স্থির বিন্দু বা স্থিরাঙ্ক 212° ধরা হয়। স্থির বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী ব্যবধানকে (212 − 32) = 180টি সমান ভাগে ভাগ করা হয়। প্রত্যেক ভাগকে এক ডিগ্রী ফারেনহাইট (1°F) বলা হয়।

সুতরাং, **যে স্কেলে বরফ বিন্দুকে 32° এবং স্টীম বিন্দুকে 212° ধরা হয় এবং মৌলিক ব্যবধানকে সমান 180 ভাগে ভাগ করা হয়, সেই স্কেলকে ফারেনহাইট স্কেল এবং এর প্রত্যেক ভাগকে এক ডিগ্রী ফারেনহাইট (1°F) বলে।**

সেলসিয়াস ও ফারেনহাইট স্কেলের তুলনা (Comparison of Celcius and Farenheit Scale) ঃ সেলসিয়াস স্কেল ও ফারেনহাইট স্কেল তুলনা করলে দেখা যায় যে,

সেলসিয়াস স্কেলের 100 ভাগ = ফারেনহাইট স্কেলের 180 ভাগ,

অর্থাৎ 100°C পরিবর্তন = 180° F পরিবর্তন

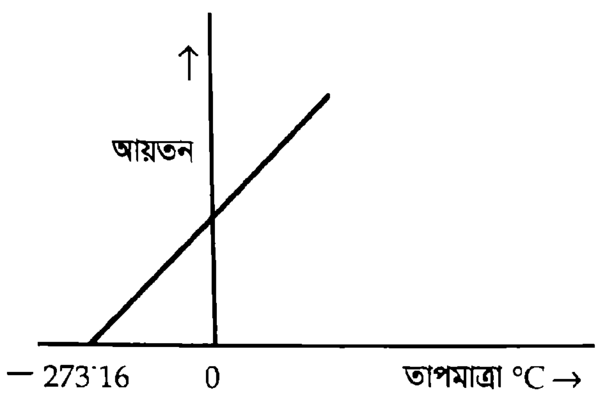
$$1°C \text{ পরিবর্তন} = \frac{180}{100}°F = \frac{9}{5}°F \text{ পরিবর্তন।}$$

(৩) আদর্শ গ্যাস স্কেল (Ideal gas scale) ঃ যে গ্যাস বয়েল ও চার্লসের সূত্র মেনে চলে তাকে আদর্শ গ্যাস বলে। স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট ভরের আদর্শ গ্যাসের তাপমাত্রা ক্রমাগত কমাতে থাকলে যে তাপমাত্রায় পৌঁছলে তার আয়তন তাত্ত্বিকভাবে শূন্য হয় তাকে **পরমশূন্য তাপমাত্রা** (Absolute zero temperature) বলে। চার্লসের সূত্র হতে পরমশূন্য তাপমাত্রার মান − 273°C বা − 495·4° F। **এই পরমশূন্য তাপমাত্রা অর্থাৎ − 273°C তাপমাত্রাকে শূন্য ধরে এবং আরও কয়েকটি স্থির বিন্দুর সমন্বয়ে যে স্কেল তৈরি করা হয়েছে তাকে আদর্শ গ্যাস স্কেল বা পরম স্কেল বলে।**

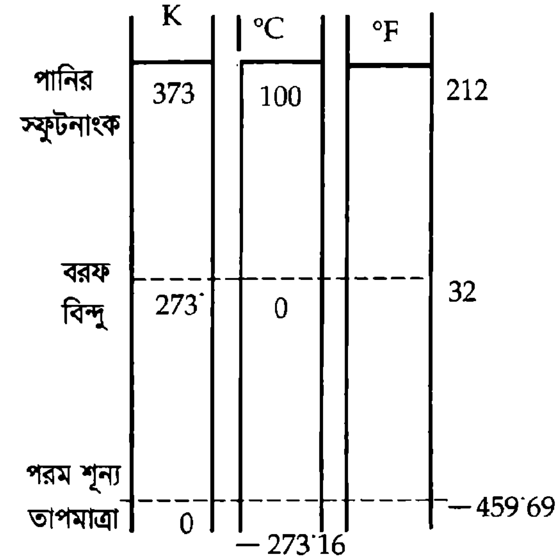
(৪) কেলভিন-এর পরম তাপগতীয় স্কেল (Kelvin's thermodynamic scale) বা সংক্ষেপে কেলভিন স্কেল (Kelvin's cale) ঃ

সেলসিয়াস ও ফারেনহাইট স্কেলে নিম্ন স্থির বিন্দু বা শূন্য বিন্দু ইচ্ছামত (arbitrarily) নির্দিষ্ট করা হয়েছে। সেলসিয়াস স্কেলে শূন্য বিন্দু 0°C এবং ফারেনহাইট স্কেলে শূন্য বিন্দু 32°F। এটাই নিম্নতম তাপমাত্রা নয়।

এর নিচেও বস্তুর তাপমাত্রা রয়েছে। 1848 খ্রিস্টাব্দে লর্ড কেলভিন তাপমাত্রার নতুন একটি স্কেল প্রবর্তন করেন। এটাকে **পরম স্কেল বা কেলভিন স্কেল** বলে। কার্নোর তাপ ইঞ্জিনের তাপগতি বিবেচনার প্রেক্ষিতে লর্ড কেলভিন এই স্কেল উদ্ভাবন করেন বলে একে **কেলভিন-এর তাপগতীয় স্কেলও** বলা হয়। এই স্কেলে 1°C তাপমাত্রা কমালে গ্যাসের আয়তন 0°C তাপমাত্রার আয়তনের $\frac{1}{273 \cdot 16}$ অংশ কমে। এভাবে গ্যাসের তাপমাত্রা হ্রাসের সাথে আয়তন কমতে থাকলে — 273·16°C তাপমাত্রায় তাত্ত্বিকভাবে আয়তন শূন্য হবে [চিত্র ১২·২]।



চিত্র ১২·২



চিত্র ১২·৩

সুতরাং — 273·16°C **তাপমাত্রাকে শূন্য ধরে যে তাপমাত্রা স্কেল তাই কেলভিন তাপমাত্রার স্কেল।** কেলভিন স্কেলে প্রতি ডিগ্রী তাপমাত্রার পার্থক্য সেলসিয়াস স্কেলের তাপমাত্রার পার্থক্যের সমান [চিত্র ১২·৩] অর্থাৎ সেলসিয়াস স্কেলে 1°C তাপমাত্রা পার্থক্য হলে কেলভিন স্কেলেও 1K পার্থক্য হবে। তবে অবশ্যই মনে রাখতে হবে যে 1°C = 1K নয়।

উদাহরণ ঃ কোন বস্তুর তাপমাত্রা 1°C হলে কেলভিন স্কেলে তাপমাত্রা হবে (273 + 1) = 274K ; অনুরূপভাবে 10°C = (273 + 10) K = 283K ; কিন্তু সেলসিয়াস স্কেলে তাপমাত্রার পার্থক্য 10°C এবং কেলভিন স্কেলে তাপমাত্রার পার্থক্য 10K। সেলসিয়াস ও কেলভিন স্কেলের রূপান্তর খুবই সহজে নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে করা যায় ঃ

$\mathbf{T_K = T_C + 273 \cdot 16}$, **এখানে T_K হচ্ছে কেলভিন স্কেলে তাপমাত্রা এবং T_C হচ্ছে সেলসিয়াস স্কেলে তাপমাত্রা।**

উপরের আলোচনা থেকে 1K তাপমাত্রার নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় ঃ

পানির ত্রৈধ বিন্দুর তাপমাত্রার $\frac{1}{273 \cdot 16}$ কে 1K বা এক কেলভিন বলা হয়।

৫। তাপমাত্রার আন্তর্জাতিক স্কেল (International scale of temperature) ঃ তাপমাত্রা পরিমাপের জন্য বিভিন্ন তাপমান যন্ত্রে তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেল ব্যবহার করা হয়েছে। বিভিন্ন স্কেলে প্রতি ডিগ্রী তাপমাত্রার মান সমান নয়। তাপমাত্রার সবগুলো স্কেলই খেয়ালমাফিক করা হয়েছে। এজন্য একটি স্কেলের সাথে অন্যটির পুরাপুরি সামঞ্জস্য বা মিল নেই। এই অসুবিধা দূর করার জন্য 1927 খ্রিস্টাব্দে **আন্তর্জাতিক ওজন ও পরিমাপ সমিতির** (International Committee of Weights and Measures) এক অধিবেশনে তাপমাত্রার একটি ব্যবহারিক স্কেল অনুমোদন করা হয়। এর নাম **তাপমাত্রার আন্তর্জাতিক স্কেল**। এই স্কেল কেলভিন-এর পরম তাপগতীয় স্কেলের বিকল্প নয়, একই। তবে বৈদ্যুতিক যন্ত্রপাতি ক্রমাংকনের একটি নির্ভরযোগ্য পদ্ধতি। পরবর্তীকালে 1948

খ্রিস্টাব্দে আন্তর্জাতিক ওজন ও পরিমাপ সমিতি অপর একটি অধিবেশনে আন্তর্জাতিক তাপমাত্রা স্কেলের জন্য কতকগুলো মৌলিক স্থিরাঙ্ক নির্দিষ্ট করে দেন। নিম্নে এদের বিবরণ দেয়া হল :

১। অক্সিজেন বিন্দু বা তরল অক্সিজেনের স্ফুটনাঙ্ক ⟶ − 182·97°C বা 90·18K
২। বরফ বিন্দু বা বরফের গলনাঙ্ক ⟶ 0°C বা 273K
৩। বাষ্প বিন্দু বা পানির স্ফুটনাঙ্ক ⟶ 100°C বা 373K
৪। গন্ধক বিন্দু বা গন্ধকের স্ফুটনাঙ্ক ⟶ 444·6°C বা 717·6K
৫। অ্যান্টিমনি বিন্দু বা তরল অ্যান্টিমনির কঠিনাঙ্ক ⟶ 630·5°C বা 903·5K
৬। রৌপ্য বিন্দু বা রৌপ্যের গলনাঙ্ক ⟶ 960·80°C বা 1233·80K
৭। স্বর্ণ বিন্দু বা স্বর্ণের গলনাঙ্ক ⟶ 1063·0°C বা 1336K

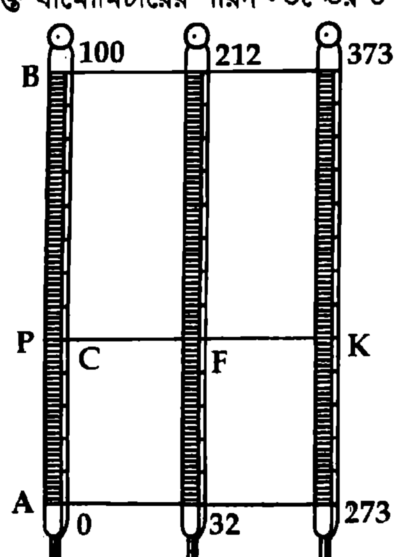
১২·৯ তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেলের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between the different scales of temperature

তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেলের মধ্যে সম্পর্ক আছে। এই সম্পর্কের সাহায্যে একটি স্কেলের তাপমাত্রা অন্য একটি স্কেলে পরিণত করা যায়। নিম্নে এদের মধ্যকার সম্পর্ক দেখান হল।

তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেলের তালিকা

স্কেলের নাম	সঙ্কেত	নিম্ন স্থিরাঙ্ক	ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক	মৌলিক দূরত্বের ভাগ সংখ্যা
সেন্টিগ্রেড	C	0°	100°	100
ফারেনহাইট	F	32°	212°	180
কেলভিন	T	273	373	100

একটি থার্মোমিটার লই। মনে করি এর নিম্ন ও ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক যথাক্রমে A এবং B। মনে করি কোন এক তাপমাত্রায় উক্ত থার্মোমিটারের পারদ স্তম্ভের উপরিতল P বিন্দুতে অবস্থান করে।



চিত্র ১২·৪

এখন তিনটি থার্মোমিটার লই [চিত্র ১২·৪]। এরা যথাক্রমে **সেন্টিগ্রেড, ফারেনহাইট** এবং **কেলভিন**। ধরি এদের নিম্ন স্থিরাঙ্ক পূর্বের থার্মোমিটারের A দাগের সাথে মিলে যায় এবং ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক B দাগের সাথে মিলে যায়। এখন এই তিনটি থার্মোমিটারকে উক্ত তাপমাত্রায় রাখায় P দাগের পারদের উপরিতল সেন্টিগ্রেড, ফারেনহাইট এবং কেলভিন থার্মোমিটারের C, F এবং K দাগের পারদের উপরিতলের সাথে মিলে গেল।

আমরা পাই,

$$\frac{PA}{BA} = \boxed{\frac{C-0}{100-0} = \frac{F-32}{212-32} = \frac{K-273}{373-273}}$$

বা, $\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180} = \frac{K-273}{100}$

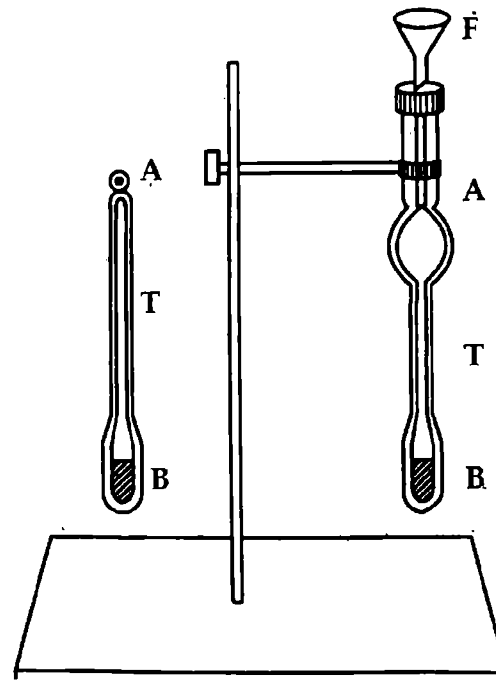
$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{K-273}{5} \qquad (6)$$

এটিই হল তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেলের তুলনামূলক রাশিমালা।

১২.১০ পারদ থার্মোমিটার
Mercury thermometer

তাপমাত্রার সাথে পারদের আয়তন পরিবর্তনকে উষ্ণমিতিক ধর্ম হিসেবে ব্যবহার করে পারদ থার্মোমিটার প্রস্তুত করা হয়।

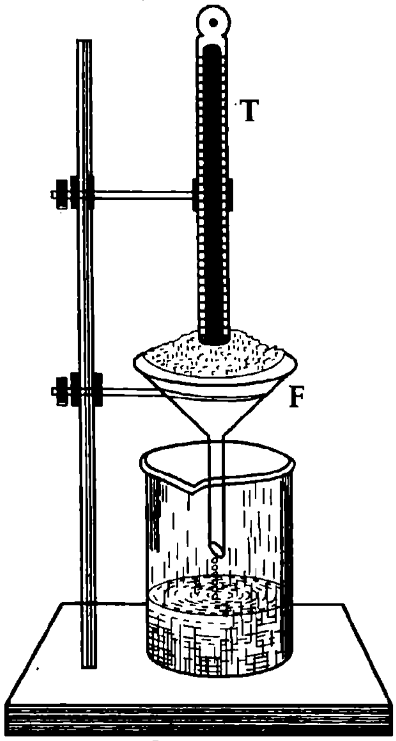
এতে অতি সূক্ষ্ম ও সুষম ছিদ্রের একটি কাচ নল থাকে [চিত্র ১২.৫]। এই নলের এক প্রান্তে পারদপূর্ণ একটি নলাকার বাল্‌ব B থাকে এবং অপর প্রান্ত A বন্ধ। কাচ নলের গায়ে তাপমাত্রার স্কেল দাগাঙ্কিত থাকে। কোন বস্তুর সংস্পর্শে যন্ত্রটি রাখলে পারদের আয়তনের পরিবর্তন ঘটে এবং স্কেলে নলের পারদ পৃষ্ঠের সর্বোচ্চ অবস্থান ঐ বস্তুর তাপমাত্রা নির্দেশ করে।



চিত্র ১২.৫

নির্মাণ প্রণালী ঃ প্রথমে অতি সূক্ষ্ম ও সুষম ছিদ্রের একটি পরিষ্কার ও শুষ্ক কাচ নল নেয়া হয় যার এক প্রান্তে একটি নলাকার বাল্‌ব B আছে এবং অপর মুখ খোলা ও তার নিচে A-তে কাচের দেয়াল একটু সরু [চিত্র ১২.৫]। এখন নলটিকে একটি দণ্ডের সাহায্যে খাড়াভাবে রেখে এর খোলা মুখে রবারের নল দ্বারা একটি ফানেল F যুক্ত করা হয়। এই ফানেলে কিছু বিশুদ্ধ ও শুষ্ক পারদ নিয়ে বাল্‌বটিকে পর্যায়ক্রমে গরম ও ঠাণ্ডা করে নল ও বাল্‌ব সম্পূর্ণরূপে পারদে ভর্তি করা হয়। উত্তাপে বাল্‌ব ও নলের ভিতরের বায়ুর আয়তন বৃদ্ধি পায় এবং কিছু বায়ু পারদের ভিতর দিয়ে বুদবুদ্ আকারে বের হয়ে যায়। আবার ঠাণ্ডা করলে বাল্‌ব ও নলের ভিতরের অবশিষ্ট বায়ুর আয়তন কমে যায় এবং এতে বাইরের বায়ুর চাপে কিছু পারদ নলে প্রবেশ করে। এভাবে বাল্‌ব ও নল ক্রমশ পারদে পূর্ণ হয়। অতঃপর বাল্‌বটিকে যথেষ্ট গরম করা হয় যাতে তার ভিতরের পারদ ফুটতে থাকে এবং উত্থিত বাষ্প নলের ভিতরের বায়ুকে বের করে দেয়। এই অবস্থায় একটি তীব্র ও সরু অগ্নি শিখা দ্বারা নলের সরু অংশ গলিয়ে বন্ধ করা হয়। বাল্‌ব ঠাণ্ডা হয়ে ঘরের তাপমাত্রায় ফিরে এলে পারদ সম্পূর্ণ বাল্‌ব ও নলের কিছু অংশ পূর্ণ করে রাখে এবং নলের বাকি অংশ বায়ুশূন্য অবস্থায় থাকে। পারদ স্বাভাবিক অবস্থায় ফিরে এলে দুটি বিশেষ তাপমাত্রায় নলে পারদের অবস্থান লক্ষ করে তার গায়ে দুটি দাগ কাটা হয়। এই দাগদ্বয় যে দুটি বিশেষ তাপমাত্রা নির্দেশ করে তাদের প্রত্যেককে থার্মোমিটারের **স্থিরাঙ্ক** (fixed point) বলে। পারদ থার্মোমিটারে বরফের গলনাঙ্ক দ্বারা নিম্ন স্থিরাঙ্ক এবং পানির স্ফুটনাঙ্ক দ্বারা উর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক নির্দেশ করা হয়। **উর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক ও নিম্ন স্থিরাঙ্কের মধ্যবর্তী তাপমাত্রার ব্যবধানকে মৌলিক ব্যবধান** (Fundamental interval) **বলে। তাপমাত্রার স্কেল অনুসারে এই মৌলিক ব্যবধানকে কয়েকটি সমান ভাগে বিভক্ত করা হয় এবং এর এক একটি ভাগকে ডিগ্রী বলে।** থার্মোমিটারের গায়ে এভাবে দাগ দেওয়াকে তার দাগাংকন (Graduation) বলে।

নিম্ন স্থিরাঙ্ক নির্ণয় ঃ একটি বড় ফানেল F-এর মধ্যে বিশুদ্ধ বরফের ছোট ছোট টুকরা নিয়ে তার ভিতর উপরে বর্ণিত পারদপূর্ণ নলটিকে খাড়াভাবে ঢুকিয়ে রাখা হয় [চিত্র ১২.৬]।



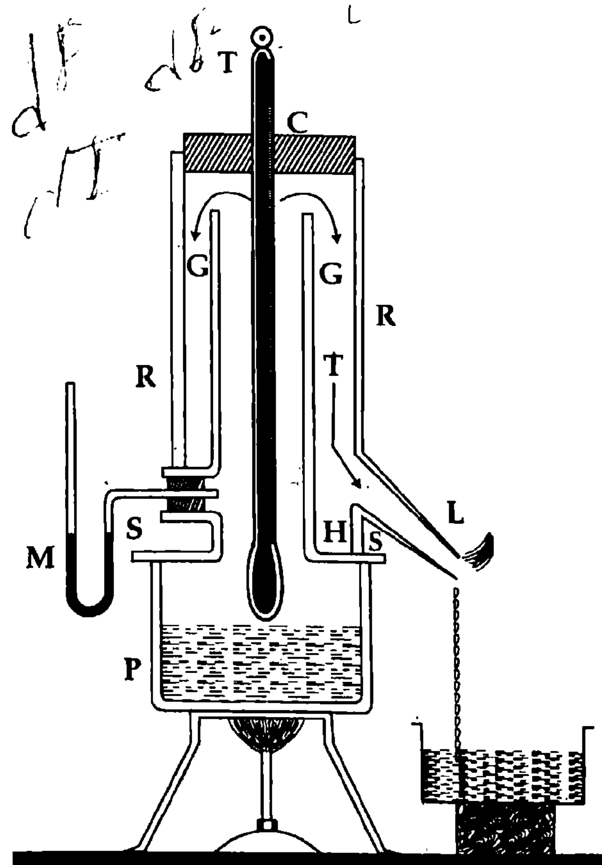
চিত্র ১২.৬

এ অবস্থায় নলের ভিতরের পারদ ঠাণ্ডায় ক্রমশ সঙ্কুচিত হয়ে নিচের দিকে নামতে থাকে। পারদের তাপমাত্রা বরফের গলনাঙ্কের সমান হলে পারদের উপরিতল এক স্থানে এসে স্থির থাকে। এই স্থানে নলের গায়ে একটি দাগ কাটা হয়। এটাই থার্মোমিটারের নিম্ন স্থিরাঙ্ক।

ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক নির্ণয় ঃ থার্মোমিটারের ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক হিপসোমিটার (Hypsometer) নামক একটি যন্ত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়।

বর্ণনা ঃ এই যন্ত্রের একটি তামার পাত্র যার উপর একটি ছোট ধাতব চোঙ GGH-কে ঘিরে একটি বড় ধাতব চোঙ RS বসানো থাকে [চিত্র ১২.৭]। বাইরের চোঙের গায়ে একটি ম্যানোমিটার M এবং একটি নির্গম নল L যুক্ত থাকে। এখানে ম্যানোমিটারের সাহায্যে বাষ্প চাপ নির্ণয় করা হয়। RS চোঙের উপরের মুখ একটি ছিপি দ্বারা বন্ধ থাকে।

কার্যপ্রণালী ঃ পাত্র P-এ কিছু পানি নিয়ে RS চোঙের ছিপির মধ্য দিয়ে উপরে বর্ণিত থার্মোমিটারটি চোঙ GH-এর মধ্যে এমনভাবে বসানো হয় যেন থার্মোমিটারের বাল্ব পাত্রের পানি হতে সামান্য উপরে অবস্থান করে। এখন পাত্রের পানিতে তাপ দিয়ে বাষ্প তৈরি করা হয়। এই বাষ্প GGH চোঙের ভিতরের বাষ্প RS চোঙের ভিতরের বাষ্প দ্বারা ঘিরে থাকায় GGH চোঙের ভিতরের বাষ্প শুষ্ক থাকে ও তাপমাত্রা সর্বত্র সমান থাকে। এভাবে থার্মোমিটারটি বাষ্প দ্বারা পরিবেষ্টিত হয়ে উত্তপ্ত হতে থাকে এবং থার্মোমিটারের নলের পারদের উপরিতল ক্রমশ উপরে উঠতে থাকে। কিছুক্ষণ পরে দেখা যাবে নলের পারদের উপরিতল এক স্থানে পৌঁছে স্থির আছে এবং আর নিচে নামছে না। পারদের উপরিতলের এই অবস্থানে নলের গায়ে একটি দাগ কাটা হয়। এটিই RS চোঙের বাষ্পের চাপে থার্মোমিটারের ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক। পানির স্ফুটনাঙ্ক বায়ুমণ্ডলের চাপের উপর নির্ভর করে এবং প্রতি এক সেন্টিমিটার পারদ চাপের পরিবর্তনে পানির স্ফুটনাংক 0.37°C পরিবর্তিত হয়। এজন্য পেষমান যন্ত্রে পারদ ব্যবহার করে বায়ুমণ্ডলের চাপ ও RS-এর ভিতরের বাষ্প চাপের ব্যবধান নির্ণয় করা হয়। উপরোক্ত হিসাব দুটি হতে এবং বায়ুমণ্ডলের স্বাভাবিক চাপে অর্থাৎ 76 সেমি. পারদ চাপে পানির স্ফুটনাঙ্ক 100°C। এটিই পারদ থার্মোমিটারের ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক।



চিত্র ১২.৭

১২·১১ থার্মোমিটারে পারদ ব্যবহারের সুবিধা
Advantages of using mercury in a thermometer

(১) পারদ একটি তাপ সুপরিবাহী পদার্থ। ফলে পারদ খুব সহজে তাপ গ্রহণ করে তার বিভিন্ন অংশে ছড়িয়ে দিতে পারে এবং পারদ থার্মোমিটার বস্তুর প্রকৃত তাপমাত্রা নির্দেশ করে।

(২) পারদ বিশুদ্ধ অবস্থায় পাওয়া যায়।

(৩) পারদ একটি অস্বচ্ছ ও উজ্জ্বল পদার্থ বলে থার্মোমিটারের কাচের নলের ভিতর তার উঠা-নামা বাইরে থেকে সহজেই দেখা যায়।

(৪) পারদ কাচের নলের গায়ে লেগে থাকে না। ফলে থার্মোমিটারের পারদ, তাপমাত্রার পরিবর্তনের সাথে সাথে খুব সহজেই নলের মধ্য দিয়ে উঠা-নামা করতে পারে।

(৫) পারদের তাপধারণ ক্ষমতা খুব কম। এজন্য একটি পারদ থার্মোমিটার কোন বস্তুর সংস্পর্শে এলে তা বস্তুর অতি সামান্য তাপ শোষণ করে এবং বস্তুর তাপমাত্রার উল্লেখযোগ্য কোন পরিবর্তন হয় না। কাজেই পারদ থার্মোমিটার বস্তুর সঠিক তাপমাত্রাই নির্দেশ করে।

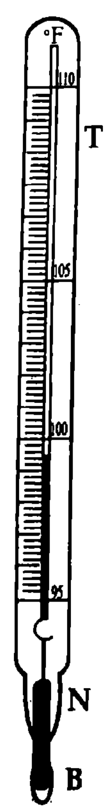
(৬) পারদের স্ফুটনাঙ্ক 357°C এবং হিমাঙ্ক —39°C। এই দীর্ঘ পরিসরে পারদ তরল অবস্থায় থাকে বলে পারদ থার্মোমিটারে এই দুই তাপমাত্রার মধ্যবর্তী যে কোন তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়।

(৭) যে কোন তাপমাত্রা হতে একই তাপমাত্রার বৃদ্ধিতে পারদের আয়তন বৃদ্ধি সমান ও যথেষ্ট হয়। ফলে থার্মোমিটারে দাগ কাটা সহজ ও সুষম হয়, ডিগ্রী আকারে বড় হয় এবং অল্প তাপমাত্রাও সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় করা যায়।

(৮) পারদ কম উদ্বায়ী (volatile)। ফলে থার্মোমিটারের পারদের উপরিভাগের যে সামান্য পারদ বাষ্প থাকে তা পারদের ওঠা-নামায় কোন বিঘ্ন ঘটায় না।

১২·১২ ক্লিনিক্যাল বা ডাক্তারি থার্মোমিটার
Clinical or Doctor's thermometer

সূচনা ঃ **এটি এক প্রকার সুবেদী চরম ফারেনহাইট থার্মোমিটার**। মানব দেহের তাপমাত্রা (জ্বর) মাপার কাজে এই থার্মোমিটার সাধারণত ডাক্তারগণ ব্যবহার করেন। এই কারণে একে **ডাক্তারি থার্মোমিটার** বা **ক্লিনিক্যাল থার্মোমিটার** বলা হয়। এর একটি বিশেষত্ব এই যে, একে শরীর হতে সরিয়ে নেয়ার অনেক পরেও শরীরের তাপমাত্রা থার্মোমিটার দেখে জানা যায়।



চিত্র ১২·৮

গঠন ঃ এতে একটি নলাকার বাল্‌ব B থাকে যা বিশুদ্ধ পারদে ভর্তি [চিত্র ১২·৮]। এই বাল্‌বের সাথে সুষম ও সূক্ষ্ম ছিদ্রের একটি কৈশিক নল T যুক্ত আছে। B বাল্‌বের ঠিক উপরে N বিন্দুতে নলটিকে অপেক্ষাকৃত সরু ও বাঁকা করে তৈরি করা হয়। মানব-দেহের তাপমাত্রা 95°F হতে 110°F-এর মধ্যে থাকে বলে নলের গায়ে 95°F হতে 110°F পর্যন্ত দাগ কাটা থাকে। প্রত্যেকটি ডিগ্রী আবার 5টি সমান অংশে বিভক্ত। এ ছাড়া **একজন সুস্থ ব্যক্তির শরীরের তাপমাত্রা সাধারণত 98·4°F হয়** বলে এর গায়ে 98·4°F চিহ্নিত একটি বিশেষ দাগ রয়েছে।

কার্যপ্রণালী ঃ এই থার্মোমিটারে শরীরের তাপমাত্রা নির্ণয় করার পূর্বে একে বেশ কয়েকবার জোরে ঝাঁকিয়ে নিতে হয়। এতে বাল্‌বের উপরের পারদ নিচে নেমে বাল্‌বের মধ্যে অবস্থান করে। এ অবস্থায় জিহ্বার নিচে অথবা বগলে থার্মোমিটারের বালবটিকে রাখলে শরীরের উত্তাপে পারদের তাপমাত্রা ও আয়তন বৃদ্ধি পায়। ফলে B-এর কিছু পারদ সরু ছিদ্র N-এর মধ্য দিয়ে ঠেলে উপরের নলে প্রবেশ করে। আবার যন্ত্রটি শরীর হতে সরিয়ে নিলে পারদ আয়তনে সঙ্কুচিত হয়। এতে N-এর নিচের পারদ সঙ্কুচিত হয়ে বাল্‌বের ভিতর চলে যায়, কিন্তু N-এর উপরের পারদ সরু ছিদ্রের মধ্য দিয়ে বাল্‌বে প্রবেশ করতে না পারায় উপরে থেকে যায়। কাজেই নলের পারদ সূত্রের শীর্ষের পাঠ শরীরের তাপমাত্রা নির্দেশ করে। যন্ত্রটিকে পুনরায় ব্যবহার করার জন্য শরীরের সংস্পর্শে নেবার পূর্বে কয়েকবার জোরে ঝাঁকিয়ে নলের পারদকে বাল্‌বের ভেতর নিয়ে যেতে হয়।

১২·১৩ থার্মোমিটার-এর সুবেদিতা কি ?
What is sensitivity of a thermometer ?

তাপমাত্রা পরিমাপের জন্য সুবেদী থার্মোমিটারের প্রয়োজন। **একটি থার্মোমিটারকে তখনই সুবেদী বলা হবে যখন পরীক্ষাধীন বস্তুতে স্থাপন করার সঙ্গে সঙ্গেই পরীক্ষাধীন বস্তুর তাপমাত্রা প্রদর্শন করবে এবং একটি ডিগ্রীর দশ ভাগের একভাগ কিংবা একশ ভাগের একভাগ পর্যন্ত তাপমাত্রা পরিমাপ করবে।**

নিম্নলিখিত শর্তে একটি **কাচ তরল** (Liquid in glass) থার্মোমিটার সুবেদী হয় ঃ

১। অল্প তাপমাত্রা পরিবর্তনে তরল স্তম্ভের অধিক স্থান পরিবর্তন হয়।

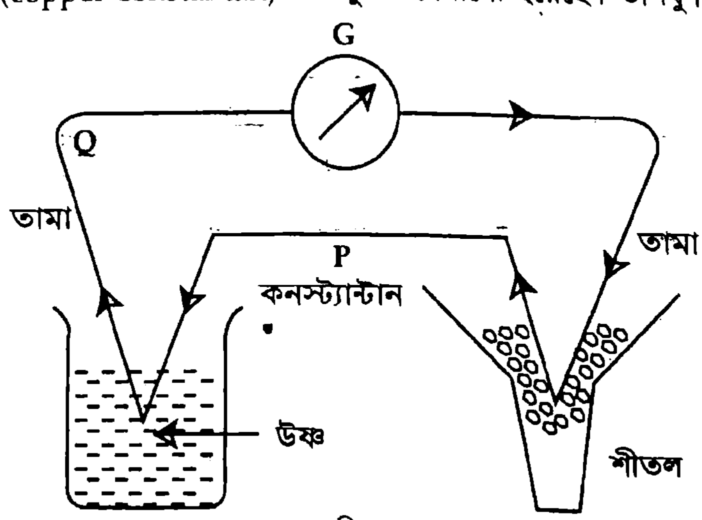
২। কুণ্ডটি মাঝামাঝি আকারের হবে এবং নলটিও মাঝামাঝি সরু হবে। কুণ্ড বড় হলে তাপগ্রাহীতা বৃদ্ধি পাবে এবং নল খুবই সুরু হলে কৈশিকতা বৃদ্ধি পাবে। অতএব থার্মোমিটারের ত্রুটি বৃদ্ধি পাবে।

১২·১৪ তাপযুগল বা থার্মোকপল থার্মোমিতি
Thermocouple Thermometry

1821 খ্রিস্টাব্দে জার্মান পদার্থবিদ সীবেক (Seebeck) সর্বপ্রথম লক্ষ করেন যে, দুটি ভিন্ন ধাতব পদার্থের দুই প্রান্ত যুক্ত করে একটি বন্ধ বর্তনী প্রস্তুত করে সংযোগস্থল দুটিকে বিভিন্ন তাপমাত্রায় রাখলে বর্তনীর মধ্য দিয়ে ক্ষীণ তড়িৎ প্রবাহ চলতে থাকে। এই ক্রিয়াকে **সীবেক ক্রিয়া** বলে। বর্তনীতে যে বিদ্যুৎ প্রবাহের সৃষ্টি হয় তাকে **তাপবিদ্যুৎ** (Thermoelectricity) বলে এবং ব্যবহৃত ধাতব পদার্থ দুটিকে **তাপযুগল** বা **থার্মোকাপল** বলে। সুতরাং তাপযুগল বা থার্মোকাপলের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা ঃ দুটি ভিন্ন বিশুদ্ধ ধাতু বা সংকর ধাতুর তৈরি তারের দুই প্রান্ত যুক্ত করে একটি বদ্ধ বর্তনী তৈরি করে সংযোগ স্থল দুটির একটিকে নিম্ন স্থির তাপমাত্রায় এবং অপরটি অজানা তাপমাত্রার বস্তুতে রাখলে বর্তনীতে ক্ষীণ তড়িচ্চালক বলের সৃষ্টি হয় এবং বর্তনীতে তড়িৎ প্রবাহ চলে। এরূপ একজোড়া সংযোগকে থার্মোকাপল বা তাপযুগল বলে।

তাপযুগল বা থার্মোকাপলের সাহায্যে তাপমাত্রা পরিমাপ করার পদ্ধতিকে **তাপযুগল থার্মোমিতি** (Thermocouple thermometry) এবং এই উদ্দেশ্যে যে থার্মোমিটার তৈরি করা হয় তাকে **তাপযুগল থার্মোমিটার** (Thermocouple thermometer) বলে। উষ্ণ সংযোগস্থলের যে তাপমাত্রার জন্য বর্তনীতে তড়িচ্চালক বলের মান সর্বাধিক হয় তাকে **নিরপেক্ষ তাপমাত্রা** (Neutral Temperature) বলে। চিত্র ১২·৯-এ একটি তামা-কন্সট্যান্টান (copper-constantan) তাপযুগল দেখানো হয়েছে। তাপযুগলের একটি সংযোগস্থলকে



চিত্র ঃ ১২·৯

বরফের মধ্যে এবং অপর সংযোগস্থলটি উত্তপ্ত বস্তুতে রাখা হয়। তাপযুগলের দুই প্রান্ত গ্যালভানোমিটারের সঙ্গে যুক্ত করে বর্তনী সম্পূর্ণ করা হয়। সংযোগস্থল দুটি ভিন্ন তাপমাত্রায় থাকায় বর্তনীতে তড়িৎ প্রবাহের সৃষ্টি হয় যা গ্যালভানোমিটারের সাহায্যে পরিমাপ করা যায়।

১২.১৫ তাপযুগল থার্মোমিটারের সাহায্যে তাপমাত্রা নির্ণয়

Determination of temperature by a thermocouple thermometer

মূলনীতি : নিম্ন সংযোগস্থলের তাপমাত্রা 0°C (বরফ বিন্দু) এবং উষ্ণ সংযোগস্থলের তাপমাত্রা θ হলে বর্তনীতে যে তাপ তড়িচ্চালক বলের (Thermoelectric force) সৃষ্টি হয়, তার মান নিম্নের সমীকরণ হতে পাওয়া যায়।

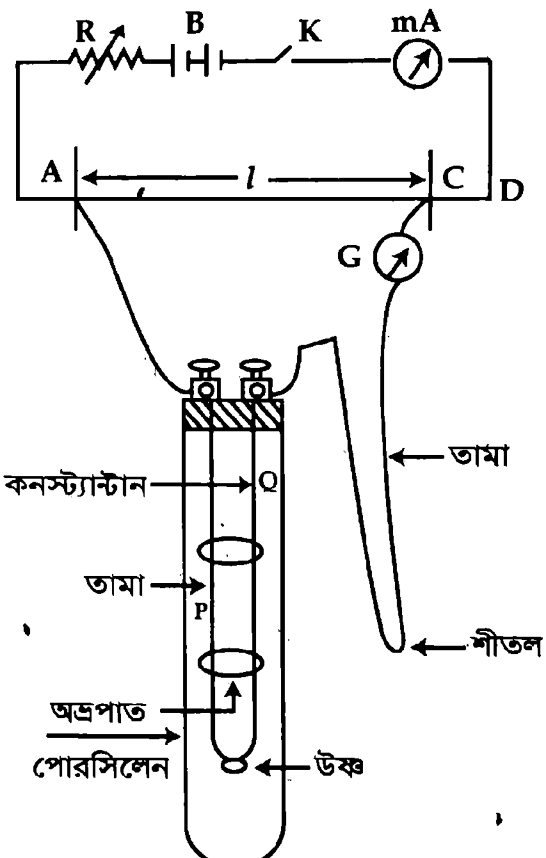
$$E = a\theta + b\theta^2 \qquad (7)$$

এখানে a ও b তাপযুগল পদার্থের ধ্রুব সংখ্যা। এদের মান তাপযুগল পদার্থের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। যে কোন দুটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় E-এর মান জেনে a ও b ধ্রুব এর মান নির্ণয় করা হয়। E, a ও b-এর মান জেনে সমীকরণ (7) ব্যবহার করে অজানা তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়।

কার্যপদ্ধতি : এই থার্মোমিটারের সাহায্যে অজানা তাপমাত্রা সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করার জন্য একটি পটেনশিওমিটার নেয়া হয়। পটেনশিওমিটার তারের A বিন্দুর সাথে তাপযুগল P ও Q-এর একপ্রান্ত [চিত্র ১২.১০] এবং তাপ যুগলের অপর প্রান্ত একটি সুবেদী গ্যালভানোমিটার G-এর মধ্য দিয়ে জকির সঙ্গে যুক্ত করা হয়। চিত্রে P ও Q তামা কনস্ট্যান্টান তাপযুগল। পরিশেষে পটেনশিওমিটার তারের দুই প্রান্তকে সারিতে স্থাপিত একটি পরিবর্তনশীল রোধ R, একটি ব্যাটারী B, একটি মিলি অ্যামিটার (mA) এবং একটি চাবি K -এর সাথে যুক্ত করা হয়। পটেনশিওমিটার তার সুষম প্রস্থচ্ছেদের হওয়ায় তার বরাবর বিভব পতন এর দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক হবে। যদি C নিষ্ক্রিয় বিন্দু হয় এবং AC-এর দৈর্ঘ্য l হয় তবে তাপযুগলে উৎপন্ন তড়িচ্চালক বল,

$$E = l\rho i$$

এখানে, ρ = পটেনশিওমিটার তারের একক দৈর্ঘ্যের রোধ এবং i = তড়িৎ প্রবাহ মাত্রা।



চিত্র ১২.১০

পটেনশিওমিটার তারের মোট দৈর্ঘ্য L এবং L দৈর্ঘ্যের জন্য রোধ R হলে,

$$\rho = \frac{R}{L}$$

$$E = l\rho i = \frac{liR}{L} \qquad (8)$$

সমীকরণ (8) এর সাহায্যে E নির্ণয় করে সমীকরণ (7) ব্যবহার করে অজানা তাপমাত্রা নির্ণয় করা হয়।

বিকল্প পদ্ধতি : লেখচিত্র হতেও অজানা তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়। তাপযুগলের একপ্রান্ত 0°C তাপমাত্রায় স্থির রেখে এর উষ্ণ প্রান্ত একটি তরলপূর্ণ কোন আধারের মধ্যে স্থাপন করা হয়। আধারের বিভিন্ন জানা তাপমাত্রায় তাপযুগলে উৎপন্ন তড়িচ্চালক বল বের করা হয়। তাপমাত্রাকে X-অক্ষে এবং তড়িচ্চালক বলকে Y-অক্ষে স্থাপন করে একটি লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। এবার যে বস্তুর তাপমাত্রা পরিমাপ করতে হবে ঐ বস্তুতে উষ্ণ সংযোগস্থল স্থাপন করে তড়িচ্চালক বল পরিমাপ করে লেখচিত্র হতে অজানা তাপমাত্রা বের করা হয়।

পরিমাপ সীমা ঃ তাপযুগল থার্মোমিটারের সাহায্যে — 265°C হতে 3000°C পর্যন্ত তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায়।

তাপযুগলের সুবিধা ও অসুবিধা ঃ

সুবিধাসমূহ ঃ

১। এটি সস্তা এবং অতি সহজেই গঠন করা যায়; ফলে এর বহুল ব্যবহার রয়েছে।

২। নিম্ন তাপমাত্রা হতে উচ্চ তাপমাত্রা পর্যন্ত মাপার জন্য বিভিন্ন ধরনের তাপযুগল পাওয়া যায়।

৩। এর সাহায্যে কোন ক্ষুদ্র বস্তুর তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায়।

৪। উষ্ণ সংযোগস্থলের তাপগ্রাহীতা কম হওয়ায় এর সাহায্যে দ্রুত পরির্তনশীল তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায়।

অসুবিধাসমূহ ঃ

১। দীর্ঘ তাপমাত্রা পরিসরে কোন তাত্ত্বিক সম্পর্ক না থাকায় তাপমাত্রা পরিমাপের ক্ষেত্রে প্রতিটি তাপযুগলের ক্রমাঙ্কন দরকার হয়।

২। শীতল সংযোগস্থল 0°C তাপমাত্রায় না থাকলে সংশোধনের প্রয়োজন হয়।

৩। নিরপেক্ষ তাপমাত্রা পরিমাপ সীমাকে বিঘ্নিত করে।

১২·১৬ প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার
Platinum resistance thermometer

ধাতব পদার্থের বৈশিষ্ট্য হল তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে বৈদ্যুতিক রোধ বেড়ে যায়। সুতরাং রোধ পরিমাপ করে তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়। **যে কৌশল বা ডিভাইসে (Device) রোধ পরিমাপ করে তাপমাত্রা নির্ণয় করা হয় তাকে রোধ থার্মোমিটার বলে।**

1871 খ্রিস্টাব্দে বিজ্ঞানী সিমেন প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার তৈরি করেন। এখনও রোধ থার্মোমিটার হিসেবে প্লাটিনাম ধাতুই সবচেয়ে বেশি ব্যবহার করা হয়। প্লাটিনাম ধাতু খুবই দৃঢ় এবং নির্ভরযোগ্য। পুনঃ পুনঃ ব্যবহারেও এর বৈশিষ্ট্য সহজে নষ্ট হয় না।

তাপমাত্রার সাথে বৈদ্যুতিক রোধের পরিবর্তন নিম্নোক্ত সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ করা যায়,

$$R_\theta = R_0(1 + \alpha\theta) \qquad (9)$$

এখানে, $R_\theta = \theta°$ তাপমাত্রায় প্লাটিনাম তারের রোধ

$R_0 = 0°$ তাপমাত্রায় প্লাটিনাম তারের রোধ

α = একটি ধ্রুবক

ধরা যাক, 0°C ও 100°C তাপমাত্রায় প্লাটিনাম থার্মোমিটারের রোধ যথাক্রমে R_0 ও R_{100}। সমীকরণ (9) হতে পাই,

$$R_{100} = R_0(1 + \alpha.100)$$

বা, $$\alpha = \frac{R_{100} - R_0}{100\, R_0} \qquad (10)$$

থার্মোমিটারটিকে অন্য যে কোন অজানা তাপমাত্রা θ-তে রাখলে এর রোধ R_θ হলে,

$$R_\theta = R_0(1 + \alpha\theta)$$

বা, $$\theta = \frac{R_\theta - R_0}{R_0\,\alpha}$$

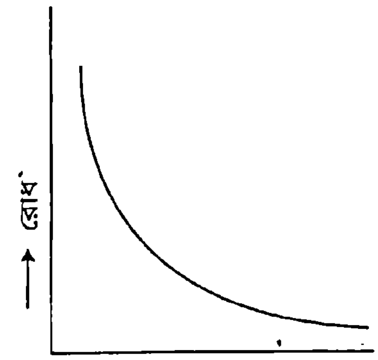
সমীকরণ (10) ব্যবহার করে,

$$\theta = \frac{R_\theta - R_0}{R_{100} - R_0} \times 100 \qquad \ldots (11)$$

রোধ থার্মোমিটারের সাহায্যে — 250°C থেকে 1300°C পর্যন্ত তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায়।

১২.১৭ থার্মিস্টর
Thermistor

থার্মিস্টর হচ্ছে অর্ধপরিবাহী পদার্থ দ্বারা তৈরি কোন বস্তুর তাপমাত্রা পরিমাপক কৌশল বা ডিভাইস (Device)। রোধ থার্মোমিটারের ন্যায় থার্মিস্টরের উষ্ণতামিতি ধর্ম রোধ। তবে রোধ থার্মোমিটারে তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে রোধ বৃদ্ধি পায়, এক্ষেত্রে বিপরীত ঘটনা ঘটে। থার্মিস্টরে যে অর্ধপরিবাহী পদার্থ ব্যবহার করা হয় তার বৈশিষ্ট্য হল তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে বৈদ্যুতিক রোধ সূচকীয়ভাবে (Exponentially) হ্রাস পায় [চিত্র ১২.১১]। 1°C তাপমাত্রা পরিবর্তনের জন্য রোধ থার্মোমিটারে যে পরিমাণ পরিবর্তন হয় তার চেয়ে 15 গুণেরও বেশি পরিবর্তন ঘটে থার্মিস্টরে। তাই থার্মিস্টর খুবই সুবেদী।



চিত্র ১২.১১

থার্মিস্টর বিভিন্ন আকৃতির হয়। যেমন রড, চাক্তি, গুটিকা ইত্যাদি। সাধারণত – 50°C থেকে 300°C তাপমাত্রা পরিমাপের জন্য থার্মিস্টর ব্যবহার করা হয়। উল্লেখিত তাপমাত্রার কম বা বেশি তাপমাত্রায় সুবেদিতা হ্রাস পায়।

১২.১৮ পাইরোমিটার থার্মোমিতি
Pyrometer thermometry

সংজ্ঞা ঃ **যে সব থার্মোমিটারের সাহায্যে 500°C-এর অধিক অর্থাৎ পারদ থার্মোমিটারের পরিমাপ সীমার বাইরে তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায়, তাদেরকে পাইরোমিটার বলে** ('pyros' শব্দের অর্থ 'fire') **এবং পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখায় 500°C-এর অধিক তাপমাত্রা পরিমাপ করা হয়, তাকে পাইরোমিটার থার্মোমিতি বলে।** উক্ত সংজ্ঞা অনুসারে গ্যাস থার্মোমিটার, প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার, তাপ-তড়িৎ থার্মোমিটারকে পাইরোমিটার বলা হয় এবং তাদেরকে যথাক্রমে **গ্যাস পাইরোমিটার, রোধ পাইরোমিটার এবং তাপ-তড়িৎ পাইরোমিটার** নাম দেয়া হয়েছে।

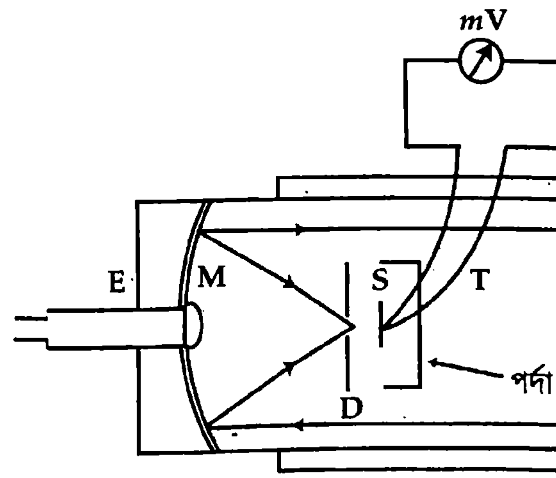
তাপের বিকিরণকে ভিত্তি করে আমরা এখানে দুই প্রকারের পাইরোমিটার আলোচনা করব, যথা—

১। **পূর্ণ বিকিরণ পাইরোমিটার** (Total radiation pyrometer) এবং
২। **আলোকীয় পাইরোমিটার** (Optical pyrometer)।

১২.১৮.১ পূর্ণ বিকিরণ পাইরোমিটার
Total radiation pyrometer

পূর্ণ বিকিরণ পাইরোমিটারের সাহায্যে কোন বস্তু হতে বিকিরিত তাপশক্তি পরিমাপ করে স্টিফেনের সূত্র প্রয়োগ করে তাপমাত্রা নির্ণয় করা হয়। ফেরী (Fery) প্রথম এই ধরনের পাইরোমিটার তৈরি করে তাপমাত্রা পরিমাপ করেন বলে একে ফেরীর পাইরোমিটারও বলা হয়।

যন্ত্রের গঠন ঃ এই যন্ত্রে একটি অবতল দর্পণ M রয়েছে যা তামার পাত দিয়ে তৈরি। পাতের উপর তল নিকেল ধাতুর প্রলেপ দেওয়া। দর্পণের মাঝখানে একটি ছিদ্র আছে যার পিছনে অভিনেত্র E যুক্ত থাকে [চিত্র ১২.১২]। M-এর সম্মুখে একটি ছোট ছিদ্র D রয়েছে যার পিছনেই একটি ধাতব ফলক S থাকে। দর্পণ অভিমুখী ফলকের পৃষ্ঠে কালো প্রলেপ দেয়া



চিত্র ১২.১২

থাকে। ছিদ্র D দুটি অর্ধবৃত্তাকার দর্পণ দ্বারা গঠিত। S-এর পিছন পৃষ্ঠে থার্মোকাপল T যুক্ত থাকে। থার্মোকাপলে উৎপন্ন তড়িচ্চালক বল পরিমাপের জন্য এটি মিলি ভোল্টমিটারের সাথে যুক্ত থাকে। ফলকটির উপর বস্তুর বিকিরিত রশ্মি যাতে সরাসরি আপতিত না হতে পারে সেজন্য ফলকটি একটি বাক্সে আবদ্ধ রাখা হয়। একটি স্ক্রু সাহায্যে সম্পূর্ণ ব্যবস্থাটি সামনে পিছনে সরানো যায়।

কার্যনীতি ঃ যে বস্তুর তাপমাত্রা পরিমাপ করা হয় যেটি হতে আগত রশ্মি অবতল দর্পণের সাহায্যে প্রতিবিম্ব ছিদ্র D-এর মধ্য দিয়ে S-এর উপর আপতিত হয়। অভিনেত্র E-এ চোখ রেখে তাকালে সঠিক ফোকাসিং হলে ছিদ্র D বৃত্তাকার দেখাবে। সঠিক ফোকাস না হলে D দুই অর্ধাংশে সরে যায়। দর্পণ সামনে পিছনে সরিয়ে ফোকাসিং করা হয়।

তাপমাত্রা নির্ণয় ঃ মিলি ভোল্টমিটারের পাঠ V, উৎসের তাপমাত্রা T এবং ফলক S-এর তাপমাত্রা T_0 হলে, স্টিফেনের সূত্র অনুসারে,

$V = \sigma(T^4 - T_0^4)$, এখানে σ স্টিফেন ধ্রুবক।

সুতরাং, V ও T_0 পরিমাপ করে এই পাইরোমিটারের সাহায্যে অজানা তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়। এই যন্ত্রের সাহায্যে সূর্য পৃষ্ঠের তাপমাত্রা পাওয়া গেছে 6000°C।

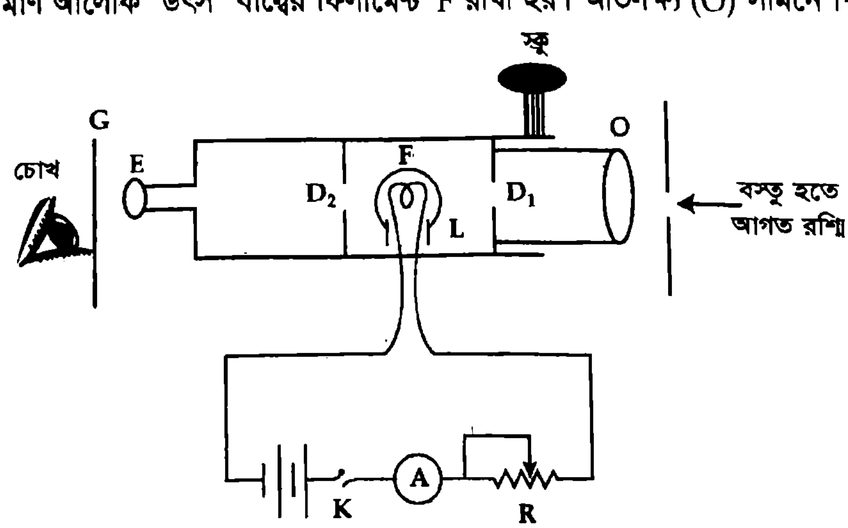
১২.১৮.২ আলোকীয় পাইরোমিটার
Optical pyrometer

কোন উত্তপ্ত বস্তুর উজ্জ্বলতা ঐ বস্তুর তাপমাত্রার সমানুপাতিক— এই নীতির উপর ভিত্তি করে আলোকীয় পাইরোমিটার তৈরি করা হয়েছে। দুই ধরনের আলোকীয় পাইরোমিটার রয়েছে। যথা— (ক) অদৃশ্যমান ফিলামেন্ট আলোকীয় পাইরোমিটার (Disappearing filament optical pyrometer) ও (খ) সমবর্তন আলোকীয় পাইরোমিটার (Polarising optical pyrometer)। এখানে আমরা অদৃশ্যমান ফিলামেন্ট আলোকীয় পাইরোমিটার বর্ণনা করব।

অদৃশ্যমান ফিলামেন্ট আলোকীয় পাইরোমিটার (Disappearing filament optical pyrometer) ঃ মোর্স (Morse) প্রথম এই যন্ত্র আবিষ্কার করেন। পরে হলবোর্ণ (Holborn), কার্লবাউম (Karlbaum) প্রমুখ বিজ্ঞানী এই যন্ত্রের উন্নতি সাধন করেন।

মূলনীতি ঃ এই যন্ত্রে প্রমাণ উৎস হিসেবে ব্যবহৃত একটি ফিলামেন্ট আলোকের তীব্রতা এবং উত্তপ্ত বস্তু হতে আপতিত বিকিরণের তীব্রতা সমান করে ফিলামেন্ট অদৃশ্য করা হয়। ফিলামেন্টে আলোকের তীব্রতা কম হলে ফিলামেন্টের তার কালো দেখাবে এবং আপতিত বিকিরণের তীব্রতা কম হলে তারটিকে উজ্জ্বল দেখাবে। যখন উৎস ও ফিলামেন্টের আলোর তীব্রতা সমান হবে তখন তারটি দেখা যাবে না।

যন্ত্রের বর্ণনা ঃ মূল যন্ত্রটি একটি দূরবীক্ষণ যন্ত্রের অনুরূপ। তবে দূরবীক্ষণ যন্ত্রের আড়াআড়ি তারের (cross wire) পরিবর্তে প্রমাণ আলোক উৎস বাল্বের ফিলামেন্ট F রাখা হয়। অভিলক্ষ্য (O) সামনে পিছনে সরিয়ে উত্তপ্ত



চিত্র ১২.১৩

বস্তু হতে আগত তাপরশ্মি ফিলামেন্টের অবস্থানে কেন্দ্রীভূত করা হয়। এই অবস্থায় L অবস্থানে বস্তুর একটি প্রতিবিম্ব গঠিত হয়েছে বলা যায়। ফিলামেন্টের সাথে তড়িৎ বর্তনী সংযুক্ত থাকে। বর্তনীর রোধ কম-বেশি করে ফিলামেন্টের আলোর তীব্রতা কম-বেশি করা হয়। বাল্বের দুই পার্শ্বে দুটি ছিদ্র D_1 ও D_2 থাকে [চিত্র ১৩.১৩]। এদের দ্বারা আলোক নিয়ন্ত্রণ করা হয়। অভিনেত্র E-এর সম্মুখে একটি লাল রঙের কাচের (G) মধ্য দিয়ে ফিলামেন্ট পর্যবেক্ষণ করা হয়।

ফিলামেন্টের প্রবাহমাত্রা নিয়ন্ত্রণ করে ফিলামেন্টের দীপন মাত্রা এরূপ করা হয় যে তাপ প্রতিবিম্বের পটভূমিতে তারটিকে অদৃশ্য মনে হবে। এই অবস্থায় নির্দিষ্ট তরঙ্গদৈর্ঘ্যে উভয়ের তীব্রতা সমান ধরা যায় এবং প্লাঙ্কের সূত্রানুযায়ী উত্তপ্ত বস্তুর তাপমাত্রা প্রমান উৎসের তাপমাত্রার সমান হবে। অ্যামিটারকে কয়েকটি সুনির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কেলভিন স্কেলে পূর্বেই ক্রমাঙ্কিত করে নিলে অ্যামিটার পৃষ্ঠ হতে সরাসরি তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায়। অথবা অ্যামিটারের প্রবাহমাত্রার পাঠ থেকে উত্তপ্ত বস্তুর তাপমাত্রা নিম্নের ফর্মুলা অনুযায়ী বের করা যায়। ফিলামেন্টের তড়িৎ প্রবাহ I এবং ফিলামেন্ট তথা উত্তপ্ত বস্তুর পরম তাপমাত্রা T হলে লেখা যায়,

$$I = a + bT + cT^2 \qquad (12)$$

এখানে a, b, c ধ্রুবক। জানা তিনটি তাপমাত্রা থেকে a, b, c -এর মান বের করা যায়। a, b, c-এর মান সমীকরণ (12)-এ বসিয়ে অজানা তাপমাত্রা বের করা যায়। এই যন্ত্রের সাহায্যে 1500°C পর্যন্ত তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায়। তবে ঘূর্ণায়মান বৃত্তকলা (rotating sector) ব্যবহার করে 1500°C-এর উর্ধ্বের তাপমাত্রাও এই যন্ত্র দ্বারা মাপা যায়।

লাল কাচ ফিল্টারের কাজ করে যাতে নির্দিষ্ট তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সীমার মধ্যে ফিলামেন্টের উজ্জ্বলতা ও উৎসের প্রতিবিম্ব সদৃশ করা যায়।

এ ছাড়াও আর একটি বিশেষ ধরনের পাইরোমিটার আছে। এর নাম পাইরোহেলিওমিটার (Pyroheliometer)। এর সাহায্যে 6000°C পর্যন্ত তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায়।

১২.১৯ বিভিন্ন থার্মোমিটারের নাম, উষ্ণতামিতি পদার্থ ও ধর্ম এবং তাপমাত্রার পরিসর

থার্মোমিটার	উষ্ণতামিতি পদার্থ	উষ্ণতামিতি ধর্ম	তাপমাত্রার পরিসর
পারদ থার্মোমিটার	পারদ	আয়তন	– 39°C থেকে 357°C
অ্যালকোহল থার্মোমিটার	অ্যালকোহল	আয়তন	– 130°C থেকে 78°C
স্থির চাপ গ্যাস থার্মোমিটার	স্থির চাপে গ্যাস	গ্যাসের আয়তন	– 183°C থেকে 600°C
স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটার	স্থির আয়তনে গ্যাস	গ্যাসের চাপ	– 270°C থেকে 1500°C
প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার	প্লাটিনাম রোধ তার	বৈদ্যুতিক রোধ	– 200°C থেকে 1200°C
তাপযুগল বা থার্মোকাপল	দুটি ভিন্ন পদার্থের যুগল	তাপ তড়িচ্চালক বল	– 265°C থেকে 3000°C
বিকিরণ পাইরোমিটার	বিকিরিত তাপশক্তি	তাপের পরিমাপ	500°C থেকে উর্ধ্বের তাপমাত্রা
আলোকীয় পাইরোমিটার	আলোক শক্তি	ঔজ্জ্বল্য	600°C থেকে 1500°C
থার্মিস্টর	অর্ধপরিবাহী পদার্থ	বৈদ্যুতিক রোধ	– 70°C থেকে 300°C
বিচুম্বকীকরণ থার্মোমিটার	পরাচৌম্বক পদার্থ	চৌম্বক গ্রহীতা	– 270°C-এর কম তাপমাত্রা

স্মরণিকা

তাপমাত্রা : তাপমাত্রা বস্তুর একটি তাপীয় অবস্থা যা ঐ বস্তুতে তাপ প্রবাহ নিয়ন্ত্রণ করে।

থার্মোমিটার : যা দ্বারা বস্তুর তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায় তাকে থার্মোমিটার বলে।

তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেল : তাপমাত্রা পরিমাপের জন্য মূলত পাঁচটি স্কেল আছে, যথা—(১) সেন্টিগ্রেড স্কেল, (২) ফারেনহাইট স্কেল, (৩) আদর্শ গ্যাস স্কেল, (৪) কেলভিনের পরম তাপগতীয় স্কেল ও (৫) তাপমাত্রার আন্তর্জাতিক স্কেল।

তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেলের মধ্যে সম্পর্ক :

$$\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}=\frac{K-273}{5}$$

থার্মোমিটারের প্রকারভেদ : তরল থার্মোমিটার, গ্যাস থার্মোমিটার, রোধ থার্মোমিটার, তাপ-তড়িৎ থার্মোমিটার, বাষ্প থার্মোমিটার, বিকিরণ থার্মোমিটার ও চৌম্বক থার্মোমিটার।

পানির ত্রৈধবিন্দু : যে তাপমাত্রায় বিশুদ্ধ বরফ, বিশুদ্ধ পানি এবং সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প তাপগত সহঅবস্থানে থাকে তাকে পানির ত্রৈধ বিন্দু বলে।

ত্রৈধ বিন্দু : যে তাপমাত্রায় কোন পদার্থের কঠিন, তরল এবং বাষ্প একটি নির্দিষ্ট চাপে তাপগত সহঅবস্থানে থাকে তাকে ঐ পদার্থের ত্রৈধ বিন্দু বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

তাপমাত্রার বিভিন্ন স্কেলের মধ্যে সম্পর্ক, $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}=\frac{K-273}{5}$ (1)

সেলসিয়াস এবং কেলভিন তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক, $t°\,C=(t+273)\,K$ ও $T=(t+273)$ ... (2)

তাপমাত্রা এক স্কেল হতে আর এক স্কেলে পরিণত করার জন্য, $\left(\frac{\text{পাঠ — নিম্ন স্থিরাঙ্ক}}{\text{ঊর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক — নিম্ন স্থিরাঙ্ক}}\right)$—এই অনুপাত সব স্কেলের জন্য সমান। (3)

রোধ এবং তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক, $R_t=R_0(1+\alpha t)$ (4)

তাপীয় বিদ্যুচ্চালক বল, $E=at+bt^2$ (5)

চাপ এবং তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক, $t=\frac{P_t-P_0}{P_{100}-P_0}\times 100$ (6)

তাপমাত্রা এবং আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক, $t=\frac{V_t-V_0}{V_{100}-V_0}\times 100$ (7)

ত্রৈধ বিন্দুর সাপেক্ষে থার্মোমিতির মূল সমীকরণ, $T=\left(273{\cdot}16\,\frac{x}{x_{tp}}\right)K$ (8)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। এমন একটি তাপমাত্রা বের কর যার মান সেন্টিগ্রেড এবং ফারেনহাইট স্কেলে এক হয়।

[য. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০১]

মনে করি নির্ণেয় তাপমাত্রা $= x$

আমরা পাই, $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$ (1)

এখানে, $C=F=x$.

সমীকরণ (1) হতে আমরা পাই, $\frac{x}{5}=\frac{x-32}{9}$

বা, $9x=5x-160$ বা, $9x-5x=-160$ বা, $4x=-160$

$x=\frac{-160}{4}=-40°$

উঃ $-40°C$ এবং $-40°F$

২। কোন তাপমাত্রায় ফারেনহাইট ও কেলভিন স্কেলে একই পাঠ পাওয়া যায় ?

আমর জানি,

$$\frac{F-32}{9}=\frac{K-273}{5} \qquad (1)$$

এখানে, $F = K = x$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\frac{x-32}{9}=\frac{x-273}{5}$$

বা, $9x - 9\times 273 = 5x - 5\times 32$

বা, $4x = 9\times 273 - 5\times 32$

বা, $x = \frac{9\times 273 - 5\times 32}{4} = 574.25$

উত্তর : $\boxed{574.25\text{ F}}$ এবং $\boxed{574.25\text{ K}}$

574.25

৩। স্বাভাবিক চাপে পারদের হিমাঙ্ক – 39°C, স্ফুটনাঙ্ক 357°C। উক্ত চাপে ফারেনহাইট স্কেলে পারদের হিমাঙ্ক ও স্ফুটনাঙ্ক কত হবে ? [ব. বো. ২০০৫]

মনে করি, ফারেনহাইট স্কেলে হিমাঙ্ক $= x$

এবং ফারেনহাইট স্কেলে স্ফুটনাঙ্ক $= y$

দেওয়া আছে, সেলসিয়াস স্কেলে হিমাঙ্ক $= -39°C$

এবং স্ফুটনাঙ্ক $= 357°C$

বের করতে হবে, $x = ?$

আমরা জানি, $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$ [হিমাঙ্কের জন্য]

বা, $\frac{-39}{5}=\frac{x-32}{9}$

বা, $5x = 160 - 351$

বা, $x = -38.2$

$x = -38.2°F$

আবার, $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9}$ (স্ফুটনাঙ্কের জন্য)

বা, $\frac{357}{5}=\frac{y-32}{9}$

বা, $5y = 160 + 3213$

$y = 674.6°\text{ F}$

৪। কোন্ তাপমাত্রা সেন্টিগ্রেড ও ফারেনহাইট স্কেলে পড়লে 40° পার্থক্য হয় ? [রা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন)]

মনে করি সেন্টিগ্রেড স্কেলে পাঠ $= x$

ফারেনহাইট স্কেলে পাঠ $= x \pm 40$

আমরা জানি, $\frac{C}{5}=\frac{F-32}{9} \qquad (1)$

$\frac{x}{5}=\frac{x\pm 40-32}{9}$

বা, $9x = 5x \pm 200 - 160$ বা, $4x = \pm 200 - 160$

(i) $4x = 200 - 160 = 40$ বা, $x = \frac{40}{4} = 10°C$

বা, (ii) $4x = -200 - 160 = -360°$

$x = -\frac{360}{4} = -90°C$

কিন্তু যখন $C = x = 10°$, তখন সমীকরণ (1) অনুসারে, $\frac{10}{5}=\frac{F-32}{9}$

$F = 9\times\frac{10}{5} + 32 = 50°$

এবং যখন $x = C = -90°$, তখন $-\frac{90}{5}=\frac{F-32}{9}$

$F = -\frac{90}{5}\times 9 + 32 = -130°$

৫। একটি ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটার প্রমাণ চাপে গলিত বরফে $1°$ এবং শুষ্ক বাষ্পে $97°$ পাঠ দেয়। থার্মোমিটারটি যখন $76°$ পাঠ দেয় তখন সেলসিয়াস স্কেলে শুদ্ধ পাঠ কত হবে নির্ণয় কর ? [ঢা. বো. ২০০৩]

এখানে,
ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারে থার্মোমিটারের পাঠ, $X_t = 76°$
স্টীম বিন্দু, $X_{steam} = 97°$
বরফ বিন্দু $X_{ice} = 1°$
প্রকৃত তাপমাত্রা $= ?$

আমরা জানি, যে-কোন তাপমাত্রা স্কেলের ক্ষেত্রে,

$$\frac{X_t - X_{ice}}{X_{steam} - X_{ice}}$$ এ অনুপাত সমান।

মনে করি, ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারে যখন $76°$ পাঠ দেয় তখন সেলসিয়াস স্কেলে সঠিক পাঠ C।

সেলসিয়াস স্কেলের সাথে তুলনা করে পাই,

$$\frac{C-0}{100-0} = \frac{76-1}{97-1}$$

বা, $\frac{C}{100} = \frac{75}{96}$

বা, $C = \frac{7500}{96}$

$C = 78.13°C$

৬। একটি রোধ থার্মোমিটার বরফ বিন্দু ও স্টীম বিন্দুতে যথাক্রমে $4.5\ \Omega$ ও $9.5\ \Omega$ রোধ প্রদর্শন করে। এটি একটি তরলে স্থাপন করলে $6.1\ \Omega$ রোধ প্রদর্শন করে। তরলটির তাপমাত্রা নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০১]

এখানে,
$R_t = 6.1\ \Omega$
$R_0 = 4.5\ \Omega$
$R_{100} = 9.5\ \Omega$

মনে করি, কক্ষের তাপমাত্রা $= t_p$

আমরা পাই, $R_t = R_0(1 + \alpha t)$

$$t_p = \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} \times 100$$

নির্ণেয় তাপমাত্রা, $t_p = \frac{6.1 - 4.5}{9.5 - 4.5} \times 100$

$$= \frac{1.6}{5} \times 100 = 32°C = (32 + 273)\ K = 305\ K$$

৭। একটি রোধ থার্মোমিটারের রোধ পানির ত্রৈধ বিন্দুতে $32.316\ \Omega$ এবং কোন তরলের স্ফুটনাঙ্কে $27.316\ \Omega$ হলে তরলের স্ফুটনাঙ্ক কত ? [য. বো. ২০০৩]

এখানে,
$R_{tr} = 32.316\ \Omega$
$R_t = 27.316\ \Omega$
স্ফুটনাঙ্ক, $T = ?$

আমরা জানি,

$$T = \frac{R_t}{R_{tr}} \times 273.16$$

$$= \frac{27.316}{32.316} \times 273.16$$

$$= 230.90\ K$$

৮। একটি প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার $0°C$ তাপমাত্রায় 2.57 ও'ম এবং $100°C$ তাপমাত্রায় 3.53 ও'ম পাঠ দেয়। $33.3°C$ তাপমাত্রায় যন্ত্রটি কত পাঠ দিবে ?

এখানে, $t_p = 33.3°C$
$R_0 = 2.57$ ও'ম
$R_{100} = 3.53$ ও'ম

মনে করি $33.3°C$–এ যন্ত্রটির পাঠ $= R_1$

আমরা পাই,

$$t_p = \frac{R_t - R_0}{R_{100} - R_0} \times 100 \qquad (1)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই;

$$33.3 = \frac{R_t - 2.57}{3.53 - 2.57} \times 100$$

বা, $33.3 = \frac{R_t - 2.57}{0.96} \times 100$

বা, $R_t - 2.57 = \frac{33.3 \times 0.96}{100} = 0.319$

বা, $R_t = 0.319 + 2.57 = 2.889$ ও'ম

৯। একটি রোধ থার্মোমিটারের রোধ 0°C তাপমাত্রায় 8Ω এবং 100°C তাপমাত্রায় 20Ω। থার্মোমিটারটিকে একটি চুল্লীতে স্থাপন করলে রোধ 32Ω হয়। চুল্লীর তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

[কু. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; সি. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; চ. বো. ২০০৫]

ধরি, চুল্লীর তাপমাত্রা = θ°C

আমরা জানি,

$$\theta = \frac{R_\theta - R_0}{R_{100} - R_0} \times 100$$

$$= \frac{32 - 8}{20 - 8} \times 100$$

$$= \frac{24}{12} \times 100$$

$$= 200$$

$$\theta = 200°C$$

এখানে,

0°C তাপমাত্রায় রোধ $R_0 = 8\ \Omega$

100°C " " $R_{100} = 20\ \Omega$

θ°C " " $R_\theta = 32\ \Omega$

নির্ণেয় তাপমাত্রা, θ = ?

১০। স্থির চাপে কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাস বরফের গলনাঙ্কে, পানির স্ফুটনাঙ্কে এবং গন্ধকের স্ফুটনাঙ্কে যথাক্রমে 200 ঘন সে. মি., 273·2 ঘন সে. মি. এবং 525·1 ঘন সে. মি. আয়তন দখল করে। গন্ধকের স্ফুটনাঙ্ক নির্ণয় কর।

মনে করি গন্ধকের স্ফুটনাঙ্ক = t

আমরা পাই,

$$t = \frac{V_t - V_0}{V_{100} - V_0} \times 100 \qquad (1)$$

এখানে, V_0 = 200 ঘন সে. মি.
V_{100} = 273·2 ঘন সে. মি.
V_t = 525·1 ঘন সে. মি.

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$t = \frac{525{\cdot}1 - 200}{273{\cdot}2 - 200} \times 100$$

$$= \frac{325{\cdot}1}{73{\cdot}2} \times 100 = 444{\cdot}12°C$$

$T = \frac{P}{T_r}$ 271

১১। একটি স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারকে তরল বায়ু, গলিত বরফ এবং ফুটন্ত পানিতে স্থাপন করলে যথাক্রমে 20·5 cm, 72·0 cm এবং 99·4 cm পারদ স্তম্ভ চাপ নির্দেশ করে। তরল বায়ুর তাপমাত্রা কত ?

মনে করি, তরল বায়ুর তাপমাত্রা = θ°C

আমরা জানি,

$$\theta = \frac{P_\theta - P_0}{P_{100} - P_0} \times 100$$

$$\theta = \frac{20{\cdot}5 - 72{\cdot}0}{99{\cdot}4 - 72{\cdot}0} \times 100$$

$$= \frac{-51{\cdot}5}{27{\cdot}4} \times 100$$

$$= -187{\cdot}96°C$$

এখানে,

P_θ = θ°C তাপমাত্রায় চাপ = 20·5 cm পারদ

P_0 = 0°C তাপমাত্রায় চাপ = 72·0 cm পারদ

P_{100} = 100°C তাপমাত্রায় চাপ = 99·4 cm পারদ

১২। কেলভিন তাপমাত্রা T-তে স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারে $4{\cdot}80 \times 10^4\ Nm^{-2}$ চাপ নির্দেশিত হল। যদি ত্রৈধ বিন্দুতে চাপ $4{\cdot}20 \times 10^4\ Nm^{-2}$ হয় তবে T-এর মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$$T = \frac{P_T}{P_1} \times 273{\cdot}16\ K$$

$$= \frac{4{\cdot}80 \times 10^4}{4{\cdot}20 \times 10^4} \times 273{\cdot}16\ K$$

$$= 312{\cdot}18\ K$$

এখানে,

T তাপমাত্রায় চাপ, $P_T = 4{\cdot}80 \times 10^4\ Nm^{-2}$

ত্রৈধ বিন্দুতে চাপ, $P_1 = 4{\cdot}20 \times 10^4\ Nm^{-2}$

তাপমাত্রা, T = ?

১৩। সুষম ছিদ্রবিশিষ্ট একটি থার্মোমিটার সমান ডিগ্রীতে ভাগ করা আছে। থার্মোমিটারটি গলন্ত বরফে 20°C এবং পানির 100°C তাপমাত্রায় 80°C পাঠ দেয়। 100°F তাপমাত্রায় উক্ত থার্মোমিটার কত পাঠ দিবে ? [ব. বো. ২০০২]

মনে করি, 100°F সেলসিয়াস স্কেলে θ°C তাপমাত্রা।

আমরা জানি,

$$\frac{\theta}{5} = \frac{100-32}{9}$$

$$\theta = \frac{68\times 5}{9} = 37{\cdot}78°C$$

আবার, $\theta = \dfrac{t_\theta - t_{icce}}{t_{steam} - t_{ice}} \times 100$

বা, $37{\cdot}78 = \dfrac{t_\theta - 20}{80-20} \times 100$

$$t_\theta = \frac{60\times 37{\cdot}78}{100} + 20$$

$$= 42{\cdot}67°C$$

এখানে,

থার্মোমিটারটির নিম্ন স্থির বিন্দু

$t_{ice} = 20°C$

ঊর্ধ্ব স্থির বিন্দু, $t_{steam} = 80°C$

$t_\theta = ?$

১৪। একটি প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটারের সাহায্যে পানির ত্রৈধ বিন্দুর রোধ 6·7 Ω এবং কক্ষ তাপমাত্রায় রোধ 7·5 Ω পাওয়া যায়। রোধ থার্মোমিটারে কক্ষের তাপমাত্রা কত হবে ? [সি. বো. ২০০১]

আমরা জানি, রোধ থার্মোমিটারে কেলভিন স্কেলে তাপমাত্রা, $T = 273{\cdot}16 \times \dfrac{R}{R_{tp}}$

আমরা পাই,

$$T = 273{\cdot}16 \times \frac{7{\cdot}5}{6{\cdot}7}$$

$$= 305{\cdot}78 \text{ K} = 32{\cdot}62°C$$

এখানে,

$R = 7{\cdot}5\,\Omega$

$R_{tp} = 6{\cdot}7\,\Omega$

১৫। একটি নির্দিষ্ট রোধ থার্মোমিটারের রোধ বরফ ও স্টীম বিন্দুতে যথাক্রমে 2·00 Ω এবং 2·73 Ω পাওয়া গেল। যে তাপমাত্রায় রোধ 4·83 Ω পাওয়া যায় তার মান নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০০]

মনে করি নির্ণেয় তাপমাত্রা = θ°C

$$\theta = \frac{R_\theta - R_0}{R_{100} - R_0} \times 100°C$$

$$= \frac{4{\cdot}83 - 2{\cdot}00}{2{\cdot}73 - 2{\cdot}00} \times 100°C$$

$$= 387{\cdot}67°C$$

এখানে,

$R_0 = 2{\cdot}00\,\Omega$

$R_{100} = 2{\cdot}73\,\Omega$

$R_\theta = 4{\cdot}83\,\Omega$

$\theta = ?$

১৬। একটি ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটার প্রমাণ চাপে গলিত বরফে 2°C এবং শুষ্ক বাষ্পে 98°C পাঠ দেয়। থার্মোমিটারটি যখন 30°C পাঠ দেয় তখন প্রকৃত তাপমাত্রা কত ? [সি. বো. ২০০৫]

আমরা জানি, যে কোন তাপমাত্রা স্কেলের ক্ষেত্রে

$\dfrac{x_t - x_{icc}}{x_{steam} - x_{ice}}$ এর অনুপাত সমান

সেলসিয়াস স্কেলের সাথে তুলনা করে পাই,

$$\frac{C-0}{100-0} = \frac{30-2}{98-2}$$

বা, $\dfrac{C}{100} = \dfrac{28}{96}$

বা, $C = \dfrac{28\times 100}{96} = 29{\cdot}16$

নির্ণেয় তাপমাত্রা = 29·16°C

এখানে,

x_t = থার্মোমিটারের পাঠ = 30°C

x_{ice} = বরফ বিন্দু = 2°C.

x_{steam} = 98°C

প্রকৃত তাপমাত্রা (C) = ?

১৭। একটি অ্যালুমিনিয়াম ও সীসার তাপযুগলের শীতল সংযোগস্থলের তাপমাত্রা 0°C। উক্ত সংযোগস্থলের তাপমাত্রা কত হলে তাপ বিদ্যুচ্চালক শক্তি 1050 μV হবে ? [$a = 12\mu V/°C$ ও $b = -0{\cdot}015\,\mu V/(°C)^2$]

ধরি নির্ণেয় তাপমাত্রা = t°C

আমরা পাই, $E = at + bt^2$ (1)

∴ সমীকরণ (1) হতে পাওয়া যায়,

$$1050 = 12t - 0{\cdot}015t^2$$

বা, $0{\cdot}015t^2 - 12t + 1050 = 0$

এখানে, $a = 12\,\mu V/°C$

$b = -0{\cdot}015\,\mu V/(°C)^2$

$E = 1050\,\mu V$

বা, $1.5t^2 - 1200t + 105000 = 0$

বা, $1.5t^2 - 150t - 1050t + 105000 = 0$

বা, $1.5t(t - 100) - 1050(t - 100) = 0$

বা, $(1.5t - 1050)(t - 100) = 0$

$t = 100°C$ বা $t = \left(\frac{1050}{1.5}\right)°C = 700°C$

কিন্তু সমীকরণ (1) অনুসারে $t \neq 700°C$

নির্ণেয় তাপমাত্রা $= 100°C = 373K$

১৮। একটি স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারে পানি ত্রৈধ বিন্দুর চাপ $20\ Nm^{-2}$ এবং শুষ্ক বরফে চাপ $14.3\ Nm^{-2}$ প্রদর্শন করে। শুষ্ক বরফের তাপমাত্রা কত ? [য. বো. ২০০১]

মনে করি, তাপমাত্রা = T

আমরা পাই,

$$T = \left(273.16 \times \frac{P}{P_{tp}}\right)$$

$$= 273.16 \times \frac{14.3}{20.0}$$

$$T = 195.31\ K$$

এখানে,

$P_{tp} = 20\ Nm^{-2}$

$P = 14.3\ Nm^{-2}$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। উষ্ণতামিতি পদার্থ কাকে বলে ? [চ. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৪, ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]

২। থার্মোকাপল কি ? [চ. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০৪, ২০০১ ; রা. বো. ২০০৩, ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০২, ২০০০]

বা তাপযুগল কি ? [রা. বো. ২০০০; সি. বো. ২০০৬, ২০০৩, ২০০১]

৩। তাপমাত্রার আন্তর্জাতিক স্কেল কি ? [য. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩]

৪। পানির ত্রৈধবিন্দু কি ? ত্রৈধবিন্দুর তাপমাত্রা কত ? [ব. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০০]

৫। থার্মোমিটারে পারদ ব্যবহারের সুবিধাগুলো লিখ।

[চ. বো. ২০০৬ ; সি. বো.২০০৪ ; ব. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২ ; রা. বো. ২০০১]

৬। পানির ত্রৈধবিন্দুর সংজ্ঞা দাও। [রা. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০১ ; চ. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০১]

৭। উষ্ণতামিতি ধর্ম ও উষ্ণতামিতি পদার্থ কাকে বলে ? [সি. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৩]

৯। সংজ্ঞা লিখ ঃ থার্মিস্টর, দশা। [চ. বো. ২০০৩] ; পানির ত্রৈধবিন্দু [ঢা. বো. ২০০২ ; ব. বো. ২০০২] থার্মোকাপল [ব. বো. ২০০২] তাপমিতিক ধর্ম [চ. বো. ২০০২ ; ব. বো. ২০০২]

১০। পানির ত্রৈধবিন্দু বলতে কি বুঝ ? [সি. বো. ২০০৫, ২০০৩, ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]

১১। থার্মিস্টর কি ? [রা. বো. ২০০৬; সি. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০০ ; ঢা. বো. ২০০২]

১২। পাইরোমিটার কি ? [ব. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৫, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৪, ২০০১]

১৩। তাপমিতিক ধর্মের সংজ্ঞা দাও। [চ. বো. ২০০২]

১৪। কেলভিনের সংজ্ঞা দাও। [চ. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০১]

১৫। সংজ্ঞা লিখ ঃ দশা, পরম শূন্য তাপমাত্রা, ত্রৈধবিন্দু। [চ. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০১]

১৬। কেলভিন কাকে বলে ? [য. বো. ২০০২]

১৭। পরম শূন্য তাপমাত্রা কি ? [কু. বো. ২০০৬; ব. বো. ২০০৩]

১৮। থার্মোমিটারের মৌলিক ব্যবধান কাকে বলে ?

১৯। থার্মোমিটারের স্থিরাঙ্ক কি ? নিম্ন স্থিরাঙ্ক ও উর্ধ্ব স্থিরাঙ্ক বলতে কি বুঝ ?

২০। থার্মোমিটারের সুবেদিতা কাকে বলে ?

২১। তাপমাত্রার পরম স্কেল কি ?

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। তাপীয় সাম্যাবস্থা বলতে কি বুঝ ? তাপগতিবিদ্যার শূন্যতম সূত্র ব্যাখ্যা কর?

২। একটি পারদ থার্মোমিটারের প্রস্তুত প্রণালী বর্ণনা কর। [রা. বো. ২০০৪, ২০০১ ; কু. বো. ২০০২]

৩। তাপযুগল কি ? তাপযুগলের কার্যপ্রণালী বর্ণনা কর। [ব. বো. ২০০৪]

৪। দুটি স্থির বিন্দুর সাপেক্ষে থার্মোমিতির মূল সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৩]

৫। তাপযুগলের সাহায্যে তাপমাত্রা পরিমাপ কিভাবে করা যায় বর্ণনা কর। [য. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০০]

৬। থার্মোকাপল ও থার্মিস্টর কি ? বুঝাও। [কু. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২]

৭। বিকিরণ পাইরোমিটারের সাহায্যে কিভাবে তাপমাত্রা নির্ণয় করা যায় ? [য. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১]

৮। একটি তাপ তড়িৎ থার্মোমিটারের গঠন ও কর্মপ্রণালী বর্ণনা কর। [সি. বো. ২০০৬, ২০০১]

৯। একটি আলোক পাইরোমিটারের বর্ণনা দাও। [ঢা. বো. ২০০৪]

১০। প্লাটিনাম রোধ থার্মোমিটার দ্বারা কিভাবে তাপমাত্রা পরিমাপ করা যায় বর্ণনা কর।

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। ফারেনহাইট স্কেলে একটি বস্তুর তাপমাত্রা 95°F হলে কেলভিন স্কেলে উক্ত বস্তুর তাপমাত্রা কত? [উত্তরঃ308 K]

২। কোন তাপমাত্রায় সেলসিয়াস ও ফারেনহাইট স্কেলের পাঠের পার্থক্য 50° হবে ? [রা. বো. ২০০৬]
[উত্তর ঃ 22·5°C ও 72·5°F , −102·5°C ও −152·5°F)

৩। দুটি তাপমাত্রার পার্থক্য 25°C। ফারেনহাইট স্কেলে এই পার্থক্য কত হবে বের কর। [উঃ 45°F]

৪। ফারেনহাইট স্কেলের কোন্ তাপমাত্রা সেলসিয়াস স্কেলের তাপমাত্রার 5 গুণ ? [উত্তর ঃ 50°F]

৫। কোন তাপমাত্রায় সেলসিয়াস ও ফারেনহাইট স্কেলে 20° পার্থক্য হয়? [উত্তরঃ −15°C, 5°F বা, −65°C , −85°F]

৬। একটি ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের বরফ বিন্দু 15°C , স্টীমবিন্দু 114°C। যখন এ থার্মোমিটার 67°C প্রদর্শন করে, তখন ফারেনহাইট স্কেলে তাপমাত্রা কত ? [ব. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 178·4°F]

৭। একটি ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের বরফ বিন্দু 4°, স্টীম বিন্দু 98°। যখন এই থার্মোমিটার (i) 50° প্রদর্শন করে, তখন সেলসিয়াস স্কেলে তাপমাত্রা কত ? (ii) 51° পাঠ দিলে ফারেনহাইট ও কেলভিন স্কেলে পাঠ কত হবে ?
[উত্তর ঃ (i) 48·9°C ; (ii) 122°F, 323 K]

৮। একটি ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটারের বরফ বিন্দু 5°C এবং স্টীম বিন্দু 115°C। কোন বস্তুর প্রকৃত তাপমাত্রা 40°C হলে ঐ থার্মোমিটার বস্তুটির কত তাপমাত্রা নির্দেশ করবে ? [উত্তর ঃ 49°C]

৯। একটি নির্দিষ্ট রোধ থার্মোমিটারের বরফ বিন্দু ও স্টীম বিন্দুতে রোধ যথাক্রমে 46Ω এবং 51·6Ω। কোন তরলের স্ফুটনাঙ্কে এর রোধ 48·5Ω হলে তরলের উষ্ণতা নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 50°C]

১০। বরফ ও স্টীম বিন্দুতে একটি রোধ থার্মোমিটারের রোধ যথাক্রমে 2·5Ω এবং 3Ω পাওয়া গেল। যে তাপমাত্রায় রোধ 10Ω পাওয়া যায় তার মান নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 1500°C]

১১। পানির ত্রৈধবিন্দু এবং ফুটন্ত সালফারে একটি ধ্রুব আয়তন গ্যাস থার্মোমিটার যথাক্রমে 100 cmHg এবং 262·78 cmHg চাপ পাওয়া যায়। সালফারের স্ফুটনাঙ্ক নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 717·8K]

১২। একটি ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটার সাধারণ বায়ুচাপের গলিত বরফে 5°C এবং শুষ্ক বাষ্পে 99°C পাঠ দেয়। থার্মোমিটারটি 52°C পাঠ দিলে ফারেনহাইট স্কেলে কত পাঠ পাওয়া যাবে ? [উত্তর ঃ 122°F]

১৩। একটি ত্রুটিপূর্ণ থার্মোমিটার প্রমাণ চাপে গলিত বরফে 1°C এবং শুষ্ক বাষ্পে 98°C পাঠ দেয়। থার্মোমিটারটি 30°C পাঠ দিলে প্রকৃত তাপমাত্রা কত ? [উত্তর ঃ 29·9°C]

১৪। এমন একটি তাপমাত্রা বের কর যার মান সেন্টিগ্রেড ও ফারেনহাইট থার্মোমিটারে 6° পার্থক্য থাকে।
[উঃ −32·5°C ও −26·5° F এবং −47·5°C ও 53·5° F]

১৫। এক মগ পানির তাপমাত্রা 100°C থেকে 40°C এ নামানো হল। ফারেনহাইট স্কেলে কত পরিবর্তন হবে ?
[উত্তর ঃ 108°F]

১৬। কোন তাপমান যন্ত্র 0°C তাপমাত্রায় 0·5°C পাঠ দেয় এবং 100°C তাপমাত্রায় 100·8°C পাঠ দেয়। 26°C তাপমাত্রায় তাপমান যন্ত্রটি কত পাঠ দিবে বের কর। [উঃ 26·56°C]

১৭। একটি পারদ থার্মোমিটারের পারদ দৈর্ঘ্য 0°C-এ 0·05 m ও 100°C-এ 0·25 m হলে কত তাপমাত্রায় ঐ পারদ দৈর্ঘ্য 0·09 m হবে ? [উঃ 20°C]

১৮। পানির ত্রৈধ বিন্দুতে একটি পারদ থার্মোমিটারে পারদ স্তম্ভের দৈর্ঘ্য 0·4 m এবং অন্য একটি তরলে এর দৈর্ঘ্য 0·5 m। উক্ত তরলের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [উঃ 341·45 K]

১৯। পানির ত্রৈধ বিন্দুতে কোন একটি রোধ থার্মোমিটারের রোধ 60 Ω এবং আর একটি তরলে রোধ 90 Ω। তরলের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [উঃ 409·74 K]

২০। একটি থার্মিস্টরে 150°C তাপমাত্রায় রোধ 2·5 Ω। যদি রোধের তাপমাত্রা গুণাঙ্ক $3·75 \times 10^{-3}$ হয়, তবে 200° C তাপমাত্রায় এর রোধ কত হবে ? [উঃ 2·75 Ω]

২১। একটি রোধ থার্মোমিটারের রোধ 0°C ও 100°C তাপমাত্রায় যথাক্রমে 10 ohm ও 20 ohm। থার্মোমিটারটি একটি চুল্লীতে স্থাপন করায় রোধ 30 ohm হয়। চুল্লীর তাপমাত্রা বের কর। [সি. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 200°C]

২২। একটি স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারে পানি ত্রৈধ বিন্দুতে গ্যাসের চাপ $2·5 \times 10^4$ Nm^{-2} এবং একটি উষ্ণ তরলে গ্যাসের চাপ 4×10^4 Nm^{-2} প্রদর্শন করে। ঐ তরলটির তাপমাত্রা কত ? [উত্তর ঃ 437·06 K]

২৩। 0°C এবং 100°C তাপমাত্রায় একটি প্লাটিনাম থার্মোমিটারের রোধ যথাক্রমে 6·28 Ω এবং 7·32 Ω। তাপমান যন্ত্রের রোধ 5·56 Ω হলে প্লাটিনাম তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [উঃ −69·23°C]

২৪। একটি স্থির আয়তন গ্যাস থার্মোমিটারে 0°C এবং 100°C তাপমাত্রায় বায়ুর চাপ যথাক্রমে 0·75 m এবং 1·15 m পারদস্তম্ভ। বাল্বটিকে উষ্ণ পানিতে ডুবালে বায়ুর চাপ 1·0 m পারদস্তম্ভ হয়। পানির তাপমাত্রা কেলভিনে (K) বের কর। [উঃ 335·5 K]

১৩

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র

FIRST LAW OF THERMODYNAMICS

১৩.১ সূচনা
Introduction

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র আলোচনা করার আগে আমাদের জানা দরকার **তাপগতিবিদ্যা কি ?** আমরা জানি কাজ করার সামর্থ্যকে শক্তি বলে। বিভিন্ন প্রকার শক্তির সাথে আমরা পরিচিত। যেমন **যান্ত্রিক শক্তি, তাপশক্তি, শব্দ শক্তি** ইত্যাদি। এ সব শক্তির মধ্যে পারস্পরিক রূপান্তর ঘটে। সব রূপান্তরের মধ্যেই দেখা যায় যে সব রকম শক্তি অতি সহজেই তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। বিজ্ঞানী **কাউন্ট রামফোর্ড, হ্যামফ্রে ডেভী** এবং **জেমস্ প্রেসকট জুল** পরীক্ষা-নিরীক্ষার সাহায্যে প্রমাণ করেন যে কাজ তথা যান্ত্রিক শক্তি হতে তাপ উৎপন্ন হয় এবং তাপ গতিরই একটি রূপ। তাদের এই মতবাদ হতেই বস্তুত তাপগতিবিদ্যার সূত্রপাত।

পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখা তাপ ও যান্ত্রিক শক্তির পরস্পর রূপান্তর ও সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করে তাকে তাপ গতিবিদ্যা (Thermodynamic) বলে। পদার্থবিজ্ঞান ছাড়াও বিজ্ঞান ও ইঞ্জিনিয়ারিং-এর বিভিন্ন শাখায় তাপগতিবিদ্যার ব্যবহার ও প্রয়োগ রয়েছে। এ অধ্যায়ে তাপগতিবিদ্যার কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ রাশি, তাপ ও অন্তস্থ শক্তি, তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র, সমোষ্ণ ও রূদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়া, গ্যাসের প্রসারণে সম্পাদিত কাজ ও গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ আলোচনা করব।

১৩.২ তাপগতীয় কয়েকটি রাশি
Some terms of thermodynamics

তাপগতিবিদ্যার সূত্রাবলি আলোচনার পূর্বে তাপগতি সম্পর্কীয় কয়েকটি রাশির সংজ্ঞা নিম্নে দেয়া হল ঃ

(ক) তাপগতীয় ব্যবস্থা বা সিস্টেম (Thermodynamic system) ঃ তাপগতীয় ব্যবস্থা বলতে **তল বা বেষ্টনী দ্বারা সীমাবদ্ধ কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ বস্তুকে বুঝায়।** যেমন একটি পিস্টনযুক্ত সিলিণ্ডারে অথবা একটি বেলুনে আবদ্ধ গ্যাস।

(খ) পরিপার্শ্ব (Surroundings) ঃ একটি ব্যবস্থার আশে পাশের সব কিছুকে বলা হয় পরিপার্শ্ব। যেমন পিস্টন ও সিলিণ্ডারের আশেপাশের বায়ু হল এর পরিবেশ। অন্যভাবে বলা যায়, **কোন নির্দিষ্ট ব্যবস্থার সাথে শক্তি বিনিময়ে সক্ষম যে কোন ব্যবস্থাকে ঐ ব্যবস্থার পরিপার্শ্ব বলে।**

কোন ব্যবস্থা যান্ত্রিক কাজ সম্পাদন বা তাপ প্রবাহের মাধ্যমে তার পরিপার্শ্বের সাথে শক্তি বিনিময় করতে পারে।

(গ) ব্যবস্থা বা সিস্টেমের অবস্থা (State of a system) ঃ যে সকল রাশির মান কোন ব্যবস্থার অবস্থা নির্ধারণ করে সেগুলোকে ব্যবস্থার তাপগতীয় স্থানাঙ্ক (co-ordinates) বা অবস্থা পরিবর্তী (variables) বলে।

যেমন, সিলিণ্ডারে আবদ্ধ গ্যাস হল ব্যবস্থা এবং গ্যাসের অবস্থার বৈশিষ্ট্য নির্দেশ করে এর চাপ, আয়তন ও পরম তাপমাত্রা। তাই চাপ, আয়তন ও পরম তাপমাত্রাকে তাপগতীয় স্থানাঙ্ক বলে।

(ঘ) সাম্যাবস্থা (Equilibrium) ঃ কোন বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থার চূড়ান্ত অবিচল (steady) অবস্থাকে তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বলে। সাম্যাবস্থায় ব্যবস্থার সকল বিন্দুতে তাপগতীয় স্থানাঙ্ক অর্থাৎ চাপ, আয়তন, তাপমাত্রার মান সমান।

(ঙ) তাপগতীয় প্রক্রিয়া (Therodynamic process) ঃ কোন ব্যবস্থার তাপগতীয় স্থানাঙ্কসমূহের যে কোন পরিবর্তনকে তাপগতীয় প্রক্রিয়া বলা হয়।

১৩.৩ তাপ ও অন্তস্থ বা অভ্যন্তরীণ শক্তি
Internal energy

আমরা জানি, তাপ এক প্রকার শক্তি যা তাপমাত্রার পার্থক্যের জন্য উচ্চ তাপমাত্রার স্থান হতে নিম্ন তাপমাত্রার স্থানে সঞ্চালিত হয়। প্রত্যেক ব্যবস্থা (system)-এর মধ্যে এমন একটি নির্দিস্ট পরিমাণ শক্তি সুপ্ত অবস্থায় থাকে যার ফলে ব্যবস্থাটি পরিবেশ ও পরিস্থিতি অনুযায়ী বিভিন্ন প্রকার শক্তি উৎপন্ন করতে সক্ষম। এই শক্তিকে অন্তস্থ বা অভ্যন্তরীণ শক্তি বলে। অন্তস্থ বা অভ্যন্তরীণ শক্তিকে নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সংজ্ঞা ঃ প্রত্যেক বস্তুর মধ্যে অন্তর্নিহিত শক্তি রয়েছে যা কাজ সম্পাদন করতে পারে এবং অন্য শক্তিতে রূপান্তরিত হতে পারে। বস্তুর মধ্যস্থ অণু পরমাণুর গতিশক্তি এবং এদের মধ্যকার আন্তঃআণবিক বলের কারণে সৃষ্ট শক্তিকে অন্তস্থ বা অভ্যন্তরীণ শক্তি বলে। অন্তস্থ শক্তি নিম্নোক্ত দুই ধরনের শক্তির যোগফল।

(ক) তাপীয় শক্তি যা এলোমেলোভাবে (randomly) বিচরণশীল অণুগুলোর গতিশক্তি এবং

(খ) আণবিক স্থিতিশক্তি। অণুর মধ্যে যে সকল পরমাণু থাকে তাদের মধ্যে ক্রিয়াশীল বল এবং আন্তঃআণবিক বলের কারণে আণবিক স্থিতিশক্তির উৎপত্তি হয়।

মোট অন্তস্থ শক্তি $E = K.E. + P.E.$

তাপ যা গরম বস্তু থেকে শীতল বস্তুতে প্রবাহিত হয় তা গরম বস্তুর অন্তস্থ শক্তির মধ্যে উৎপন্ন হয়। তাপমাত্রার পার্থক্যের কারণে গরম ও শীতল বস্তুর মধ্যে যখন তাপ প্রবাহিত হয় তখন গরম বস্তুর অন্তঃস্থ শক্তি কমে। পক্ষান্তরে শীতল বস্তুর অন্তস্থ শক্তি বৃদ্ধি পায়। প্রকৃতপক্ষে গরম বস্তু থেকে শীতল বস্তুতে শক্তি গমনকে নির্দেশ করার জন্য তাপ শব্দটি ব্যবহার করা হয়। এটা বলা সঠিক নয় যে একটি বস্তু তার অভ্যন্তরে তাপ ধারণ করে। বস্তুত একটি বস্তু অন্তস্থ শক্তি ধারণ করে, তাপ নয়।

কোন বস্তুর মোট অভ্যন্তরীণ শক্তি কোনভাবেই পরিমাপ করা সম্ভব নয়। তবে তাপ প্রয়োগে বস্তুর অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন সঠিকভাবে পরিমাপ করা যায়।

গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তির নির্ভরতা ঃ কোন গ্যাসের অবস্থা তার চাপ, আয়তন ও তাপমাত্রা দ্বারা নির্ধারিত হয়। সুতরাং, মনে করা স্বাভাবিক যে গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি এই তিনটি রাশির উপর নির্ভর করে। প্রকৃতপক্ষে তা নয়। অনেক পরীক্ষা-নিরীক্ষার পর জুল নিম্নোক্ত সিদ্ধান্তে উপনীত হন—

কোন নির্দিস্ট পরিমাণ গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি শুধুমাত্র এর তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে, এর চাপ বা আয়তনের উপর নির্ভর করে না। একে মেয়ারের প্রকল্প (Mayers' hypothesis) বলা হয়।

অতএব, তাপমাত্রার পরিবর্তন হতে নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন পরিমাপ করা যায়। স্পষ্টত চাপ বা আয়তন পরিবর্তিত হলেও তাপমাত্রা যদি স্থির থাকে তবে গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তিও অপরিবর্তিত থাকবে। অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন কোন ব্যবস্থার প্রাথমিক ও চূড়ান্ত অবস্থার উপর নির্ভর করে। কোন্ পথে চূড়ান্ত অবস্থায় পৌছল তার উপর নির্ভর করে না।

১৩.৪ তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র
First law of thermodynamics

বিজ্ঞানী জুল সর্বপ্রথম কাজ ও তাপের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করেন এবং সম্পর্কটি সূত্রাকারে প্রকাশ করেন। সূত্রটি নিম্নরূপ ঃ

সূত্র ঃ যখন কাজ সম্পূর্ণভাবে তাপে বা তাপ সম্পূর্ণভাবে কাজে রূপান্তরিত হয় তখন কাজ ও তাপ পরস্পরের সমানুপাতিক হয়।

ব্যাখ্যা ঃ যদি W পরিমাণ কাজ সম্পূর্ণরূপে তাপে পরিণত হওয়ায় Q পরিমাণ তাপ উৎপন্ন হয়, তবে তাপ গতিবিদ্যার প্রথম সূত্রানুসারে $W \propto Q$

বা, $W = JH$ (1)

এখানে J একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক। একে **তাপের যান্ত্রিক সমতা** (mechanical equivalent of heat) বা **জুল তুল্যাঙ্ক** (Joule's equivalent) বলে। এই সূত্র শক্তির নিত্যতা সূত্রেরই একটি বিশেষ রূপ।

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের সাধারণ রূপ ঃ বিজ্ঞানী ক্লসিয়াস তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রটিকে আরও সাধারণভাবে প্রকাশ করেন। ক্লসিয়াস সূত্রটি নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করেন।

সূত্র ঃ যখন কোন ব্যবস্থায় (system) তাপ সরবরাহ করা হয় বা ব্যবস্থা কর্তৃক তাপ গৃহীত হয়, তখন এর কিয়দংশ অভ্যন্তরীণ শক্তি বৃদ্ধি করতে অর্থাৎ তাপমাত্রা বৃদ্ধি করতে এবং অবশিষ্ট অংশ বাহ্যিক কাজ সম্পাদনে ব্যয় হয়।

ব্যাখ্যা ঃ কোন সংস্থা dQ তাপ শোষণ করার জন্য এর অন্তর্নিহিত শক্তির পরিবর্তন du এবং কৃতকার্য dW হলে ব্যবকলনীয় সমীকরণের সাহায্যে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রকে লেখা যায়–

$$dQ = du + dW \qquad (2)$$

এই সমীকরণটি শক্তির নিত্যতার সূত্রেরই একটি বিশেষ রূপ। সমীকরণ (2) হল তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের গাণিতিক রূপ। এটি সকল বস্তুর ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

সমীকরণ (2)-এ dQ, du এবং dW রাশিগুলো ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক হতে পারে।

(i) dQ ধনাত্মক হবে যদি সিস্টেমে তাপ সরবরাহ করা হয় বা সিস্টেম তাপ গ্রহণ করে এবং ঋণাত্মক হবে যদি সিস্টেম তাপ হারায় বা সিস্টেম হতে তাপ পরিপার্শ্বে গমন করে।

(ii) সিস্টেমের অভ্যন্তরীণ শক্তি বৃদ্ধি পেলে du ধনাত্মক এবং শক্তি হ্রাস পেলে du ঋণাত্মক হবে।

(iii) সিস্টেমের দ্বারা পরিপার্শ্বের উপর কাজ সম্পাদিত হলে dW ধনাত্মক এবং পরিপার্শ্ব সিস্টেমের উপর কাজ করলে dW ঋণাত্মক হবে।

১৩'৪'১ সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের রূপ

Form of the first law of thermodynamics in isothernal and adiabatic processes

(i) সমোষ্ণ প্রক্রিয়া ঃ

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রকে গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$dQ = du + dW \qquad (2)$$

সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় তাপমাত্রা স্থির থাকে, ফলে অন্তর্নিহিত বা অন্তস্থ শক্তি অপরিবর্তিত থাকে।

সুতরাং $du = 0$

অতএব, সমীকরণ (2)-কে লেখা যায়,

$$dQ = 0 + dW = dW \qquad 2(a)$$

অর্থাৎ, সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় সিস্টেম বা ব্যবস্থা কর্তৃক সম্পাদিত কাজ সিস্টেমে সরবরাহকৃত বা গৃহীত তাপশক্তির সমান। **সমীকরণ 2(a) সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের গাণিতিক রূপ।**

(ii) রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়া ঃ আমরা জানি, রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ায় তাপের আদান-প্রদান হয় না। কোন গ্যাসের রুদ্ধতাপ প্রসারণের ক্ষেত্রে, $dQ = 0$

সমীকরণ (2) হতে পাই,

$$dQ = 0 = du + dW$$

$$\text{বা, } du = -dW \qquad 2(b)$$

কোন গ্যাসের প্রাথমিক অন্তর্নিহিত শক্তি u_1 এবং চূড়ান্ত অন্তর্নিহিত শক্তি u_2 হলে, সমীকরণ 2(b)-কে লেখা যায়,

$$du = u_2 - u_1 = -dW$$

$$u_2 < u_1$$

অর্থাৎ রুদ্ধতাপীয় প্রসারণের সময় বাহ্যিক কাজ করার জন্য অন্তর্নিহিত শক্তি হ্রাস পায়, ফলে তাপমাত্রাও হ্রাস পায়।

অনুরূপভাবে, রুদ্ধতাপ সংকোচন বা সংরক্ষণের ক্ষেত্রেও $dQ = 0$ হয়। সংকোচনের ক্ষেত্রে সিস্টেমের উপর কাজ করা হয় বলে W ঋণাত্মক। সুতরাং সমীকরণ 2(b) হতে পাই,

$$du = -(-dW) = dW \qquad 2(c)$$

বা, $u_2 - u_1 = dW$, এখানে u_2 ও u_1 যথাক্রমে সিস্টেমের প্রাথমিক ও চূড়ান্ত অন্তর্নিহিত শক্তি।

$$u_2 > u_1$$

অর্থাৎ রুদ্ধতাপ সংকোচনের সময় গ্যাসের অভ্যন্তরীণ শক্তি বৃদ্ধি পায়, ফলে গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায়। **সমীকরণ 2(b) ও 2(c) রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ায় তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের গাণিতিক রূপ।**

১৩.৫ তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের তাৎপর্য
Significance of the first law of thermodynamics

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রের নিম্নলিখিত তাৎপর্য রয়েছে ঃ

(১) এটি তাপ ও কাজের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে।

(২) এই সূত্র অনুযায়ী নির্দিষ্ট পরিমাণ কাজ পেতে গেলে নির্দিষ্ট পরিমাণ তাপের প্রয়োজন অথবা নির্দিষ্ট পরিমাণ তাপ পেতে গেলে নির্দিষ্ট পরিমাণ কাজ সম্পাদন করা প্রয়োজন।

(৩) কোন কিছু ব্যয় না করে কাজ বা শক্তি পাওয়া অসম্ভব।

(৪) কাজ ও তাপ একে অপরের তুল্য মূল্য।

(৫) এটি শক্তির সংরক্ষণ সূত্র ছাড়া আর কিছুই নয়। যে কোন ব্যবস্থায় সম্পন্ন কাজ ও অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তনের সমষ্টি সর্বদা প্রযুক্ত তাপের সমান।

(৬) এমন কোন যন্ত্রের উদ্ভাবন হয় নি যা জ্বালানি বা শক্তি ব্যতিরেকে কাজ করতে সক্ষম অর্থাৎ অনন্ত গতিযুক্ত যন্ত্র (perpetual motion machine) উদ্ভাবন সম্ভব নয় বা শক্তি ব্যয় না করে কোন কাজ পাওয়া সম্ভব নয়।

১৩.৬ তাপের যান্ত্রিক সমতার সংজ্ঞা ও একক
Definition and unit of mechanical equivalent of heat

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রানুসারে, $W \propto H$

বা, $W =$ ধ্রুবসংখ্যা $\times H = JH$

এখানে J একটি ধ্রুবসংখ্যা। একে **তাপের যান্ত্রিক সমতা** বলে। J-কে সংজ্ঞায়িত করার জন্য উপরোক্ত সমীকরণে $H = 1$ বসালে আমরা পাই,

$W = J$

অতএব তাপের যান্ত্রিক সমতার সংজ্ঞা হল ঃ **'এক একক তাপ উৎপন্ন করতে যে পরিমাণ কাজ সম্পাদিত হয় অথবা যে পরিমাণ কাজ সম্পাদিত হলে এক একক তাপ উৎপন্ন হয়, তাকে তাপের যান্ত্রিক সমতা বলে।'** তাপের যান্ত্রিক ক্ষমতা 4.186 জুল/ক্যালরি অর্থাৎ J = 4.2 (প্রায়) জুল/ক্যালরি। এই উক্তি দ্বারা বুঝি যে এক ক্যালরি তাপ উৎপন্ন করতে 4.2 J কাজ করতে হবে।

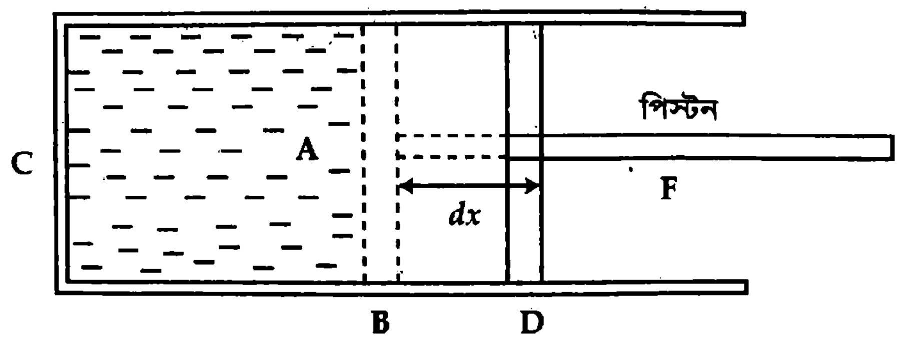
এম. কে. এস. একক ঃ এই পদ্ধতিতে তাপের একক কিলোক্যালরি (k cal) এবং কাজের একক জুল (J)। অতএব এই পদ্ধতিতে J-এর একক জুল / কিলোক্যালরি (J / k cal) এবং J এর মান J = 4186 J / k cal।

এস. আই. একক ঃ এই পদ্ধতিতে তাপের একক জুল (J) এবং কাজের এককও জুল (J)। অতএব J এর একক জুল/জুল (J / J) = 1 ; **অর্থাৎ এই পদ্ধতিতে J-এর কোন একক নেই। J একটি সংখ্যা জ্ঞাপক রাশি এবং J = 1।**

১৩.৭ গ্যাসের প্রসারণে সম্পাদিত কাজ
Work done in expansion of a gas

আমরা জানি যখন কোন গ্যাস প্রসারিত হয়, তখন গ্যাস নিজে কিছু বাহ্যিক কাজ সম্পন্ন করে। গ্যাস যখন সঙ্কুচিত হয়, তখন গ্যাসের ওপর কিছু কাজ সম্পাদিত হয়। এখানে আমরা গ্যাসের প্রসারণে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় করব।

মনে করি C কুপরিবাহী পদার্থের তৈরি একটি ধাতব চোঙ। চোঙের মধ্যে কিছু পরিমাণ গ্যাস ভরি এবং এর মুখ হালকা, ঘর্ষণ মুক্ত ও বায়ু নিরুদ্ধ পিস্টন দ্বারা বন্ধ করি। ফলে পিস্টন বিনা বাধায় চলাচল করতে পারে। উল্লেখ্য, পিস্টনও কুপরিবাহী পদার্থের তৈরি।



চিত্র ১৩.১

যদি আবদ্ধ গ্যাসের চাপ P এবং পিস্টন কিংবা চোঙের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল A হয়, তবে পিস্টনের ওপর গ্যাস কর্তৃক প্রযুক্ত বল

$F =$ চাপ $\times$ ক্ষেত্রফল

বা $F = P \times A$

মনে করি গ্যাস স্থির চাপে প্রসারিত হল, ফলে পিস্টনটি B স্থান হতে D স্থানে সরে গিয়ে dx দূরত্ব অতিক্রম করল। অতএব সম্পাদিত কাজ

$dW =$ বল $\times$ সরণ

বা, $dW = F \times dx = PA\, dx$

বা, $\mathbf{dW = P.\, dV}$ (3)

[এখানে $A.\, dx = dV =$ গ্যাসের প্রসারণজনিত আয়তন বৃদ্ধি]

অর্থাৎ কাজ = চাপ × আয়তন পরিবর্তন

এই কাজকে বাহ্যিক কাজ (external work) বলে।

[**বিঃ দ্রঃ** গ্যাসের সম্প্রসারণে কৃত কাজ ধনাত্মক এবং সংকোচনে কৃত কাজ ঋণাত্মক]

যদি গ্যাসের প্রাথমিক আয়তন V_1 এবং প্রসারণের পর শেষ আয়তন V_2 হয়, তবে গ্যাস কর্তৃক সম্পাদিত কাজ

$dW = P\,(V_2 - V_1)$ (4)

যদি গ্যাসের আয়তন প্রসারণের সময় চাপও পরিবর্তিত হয়, তবে

$dW = dP.\, dV = (P_1 - P_2)\,(V_2 - V_1)$ (5)

এখানে, P_1 = গ্যাসের আদি চাপ এবং P_2 = প্রসারণের পর শেষ চাপ। চাপ Nm^{-2} এবং আয়তন m^3-এ প্রকাশ করা হলে কাজের একক হবে J (জুল)।

বিভিন্ন তাপগতীয় পরিবর্তন (Different thermodynamical changes)

তাপগতিবিদ্যায় বিভিন্ন প্রকারের পরিবর্তন ঘটে। এই পরিবর্তন মোট চার প্রকারের; যথা—

(১) **সমোষ্ণ পরিবর্তন** (Isothermal change)
(২) **রুদ্ধতাপীয় পরিবর্তন** (Adiabatic change)
(৩) **সমআয়তন পরিবর্তন** (Isochronic change) এবং
(৪) **সমচাপ পরিবর্তন** (Isobaric change)

এখানে আমরা সমোষ্ণ পরিবর্তন এবং রুদ্ধতাপ পরিবর্তন আলোচনা করব।

BG & JEWEL

১৩.৮ সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপ পরিবর্তন
Isothermal and adiabatic changes

১৩.৮.১ সমোষ্ণ পরিবর্তন
Isothermal change

এটি একটি পরীক্ষিত ঘটনা যে, কোন গ্যাসে চাপ প্রয়োগ করে হঠাৎ সংকুচিত করলে কিছু তাপ উৎপন্ন হয়। ফলে গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায়। কিন্তু উৎপন্ন তাপকে তৎক্ষণাৎ অপসারণ করে ধীরে ধীরে চাপ বৃদ্ধি করলে তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন ঘটবে না।

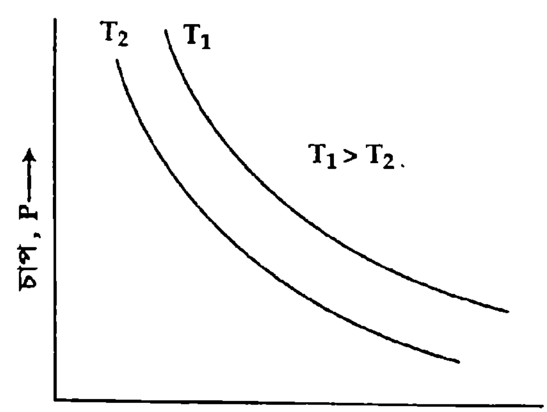
আবার গ্যাসকে হঠাৎ প্রসারিত করলে তা বাহ্যিক চাপের বিরুদ্ধে কিছু কাজ করার সময় কিছু পরিমাণ তাপ হারাবে। ফলে এর তাপমাত্রা হ্রাস পাবে। কিন্তু গ্যাসকে যদি ধীরে ধীরে প্রসারিত করা হয় এবং বাইরে থেকে প্রয়োজনীয় তাপ সরবরাহ করা হয়, তবে গ্যাসের তাপমাত্রা স্থির থাকবে। এরূপ পরিবর্তনকে **সমোষ্ণ পরিবর্তন** বলা হয়। তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, সমোষ্ণ পরিবর্তনে গ্যাসে কখনও তাপ সরবরাহ করে আবার কখনও গ্যাস হতে তাপ অপসারণ করে এর তাপমাত্রা সর্বদা স্থির রাখা যায়।

সংজ্ঞা : যে পরিবর্তনে কোন গ্যাসের চাপের ও আয়তনের পরিবর্তন হয়, কিন্তু তাপমাত্রা স্থির থাকে সেই পরিবর্তনকে সমোষ্ণ পরিবর্তন বলে এবং যে পদ্ধতিতে এই পরিবর্তন সংঘটিত হয় তাকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়া (isothermal process) বলে।

সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় গ্যাসের চাপ ও আয়তনের সম্পর্ক বয়েলের সূত্র মেনে চলে। অর্থাৎ $P \propto \frac{1}{V}$

বা $PV =$ ধ্রুবক।

স্থির তাপমাত্রায় কোন আদর্শ গ্যাসের আয়তনকে X-অক্ষ বরাবর এবং চাপকে Y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করে লেখ অঙ্কন করলে লেখটি আয়তাকার পরাবৃত্ত (rectangular hyperbola) হবে [চিত্র ১৩.২]। ভিন্ন তাপমাত্রায় একই আকৃতির ভিন্ন লেখ পাওয়া যায়। এই লেখগুলোকে সমোষ্ণ (isothermal) লেখ বলা হয়।



চিত্র ১৩.২

সমোষ্ণ পরিবর্তনের শর্তসমূহ (Conditions for isothermal change)

সমোষ্ণ পরিবর্তনের জন্য নিম্নলিখিত শর্তসমূহের প্রয়োজন :

(ক) গ্যাসকে একটি সুপরিবাহী পাত্রে রাখতে হবে।
(খ) পাত্রের চতুষ্পার্শ্বস্থ মাধ্যমের তাপগ্রাহীতা বা তাপ ধারণ ক্ষমতা উচ্চ হতে হবে।
(গ) চাপের পরিবর্তন ধীরে ধীরে সংঘটিত করতে হবে।
(ঘ) প্রয়োজনীয় তাপ গ্রহণ বা বর্জনের দ্বারা তাপমাত্রা স্থির থাকবে।

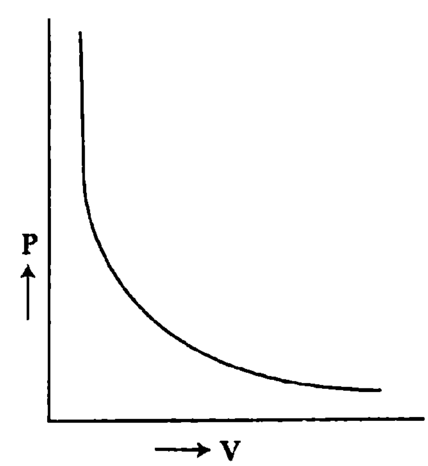
১৩.৮.২ রুদ্ধতাপ পরিবর্তন
Adiabatic change

কোন গ্যাসকে হঠাৎ চাপ দিয়ে সঙ্কুচিত করলে কিছু পরিমাণ তাপ উৎপন্ন হয় যদি এই উৎপন্ন তাপ অপসারণ করা না হয়, তবে গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাবে। আবার কোন গ্যাসকে হঠাৎ প্রসারিত হতে দিলে গ্যাসটি কিছু পরিমাণ তাপ হারাবে এবং বাইরে থেকে যদি সমপরিমাণ তাপ সরবরাহ করা না হয়, তবে গ্যাসের তাপমাত্রা হ্রাস পাবে। সুতরাং এই পরিবর্তনে তাপমাত্রা কখনও স্থির থাকে না। আরও উল্লেখ থাকে যে, এই ক্ষেত্রে গ্যাস তাপ গ্রহণ করে না বা বর্জন করে না বটে, তবে গ্যাসের **অন্তর্নিহিত শক্তি** স্থির থাকে না— অন্তর্নিহিত শক্তির হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটে। এরূপ পরিবর্তনকে **রুদ্ধতাপ পরিবর্তন** বলা হয়। 'a' অর্থ 'না', 'dia' অর্থ 'বরাবর' এবং 'bates' অর্থ 'তাপ'। এক কথায় 'adiabatic'—অর্থ 'heat not passing through' অর্থাৎ তাপ সিস্টেমে প্রবেশ করে না বা সিস্টেম তাপ ত্যাগ করে না।

সংজ্ঞা : যে প্রক্রিয়ায় সিস্টেম তাপ গ্রহণ করে না কিংবা তাপ বর্জন করে না তাকে রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়া বলে। যে পরিবর্তনে কোন তাপ বাহির হতে সরবরাহ করা হয় না বা গ্যাস হতে অপসারণ করা হয় না অথচ গ্যাসের চাপ এবং আয়তনের পরিবর্তন ঘটে তাকে রুদ্ধতাপ পরিবর্তন বলা হয়।

অথবা, যে প্রক্রিয়ায় গ্যাসের চাপ ও আয়তন পরিবর্তনকালে তাপের পরিমাণ পরিবর্তন হয় না অর্থাৎ সিস্টেম (প্রক্রিয়াধীন গ্যাস) তাপ গ্রহণ বা বর্জন করে না, কিন্তু তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটে তাকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া বলে। এ পরিবর্তনকে রুদ্ধতাপ পরিবর্তন বলে।

গ্যাসের রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে বয়েলের সূত্র প্রযোজ্য নয়। এক্ষেত্রে গ্যাসের চাপ ও আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক হচ্ছে, PV^{γ} = ধ্রুবক [অনুচ্ছেদ ১৩.১০ দ্রষ্টব্য]। রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে P এবং V-এর লেখকে রুদ্ধতাপ লেখ (adiabatic curve) বলে। চিত্র ১৩.৩-এ একটি রুদ্ধতাপ লেখ দেখানো হয়েছে। রুদ্ধতাপ লেখ সমোষ্ণ লেখ-এর তুলনায় বেশি খাড়া হয়।



চিত্র ১৩.৩

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের শর্তসমূহ (Conditions for adiabatic change)

রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের জন্য নিম্নলিখিত শর্তসমূহ প্রয়োজন :

(ক) গ্যাসকে একটি কুপরিবাহী পাত্রে রাখতে হবে।

(খ) পাত্রের চতুষ্পার্শ্বস্থ মাধ্যমের তাপগ্রাহীতা কম হতে হবে।

(গ) চাপ পরিবর্তন খুব দ্রুত সংঘটিত করতে হবে যাতে বাইরের সাথে তাপ আদান-প্রদানের কোন সুযোগ না থাকে।

১৩.৯. সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between isothermal and adiabtic changes

সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের মধ্যে পার্থক্য রয়েছে। এটি নিম্নে প্রদত্ত হল :

সমোষ্ণ পরিবর্তন	রুদ্ধতাপ পরিবর্তন
(১) তাপমাত্রা স্থির রেখে কোন গ্যাসের চাপ ও আয়তনের পরিবর্তনকে সমোষ্ণ পরিবর্তন বলে।	(১) মোট তাপের পরিমাণ স্থির রেখে কোন গ্যাসের চাপ ও আয়তনের পরিবর্তনকে রুদ্ধতাপ পরিবর্তন বলে।
(২) এই পরিবর্তনে প্রয়োজনমত তাপ সরবরাহ অথবা গ্রহণ করতে হয়।	(২) এই পরিবর্তনে তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটে।
(৩) এটি একটি ধীর প্রক্রিয়া।	(৩) এটি একটি অতি দ্রুত প্রক্রিয়া।
(৪) এই পরিবর্তনে পাত্রটি তাপের সুপরিবাহী হওয়া প্রয়োজন।	(৪) এই পরিবর্তনে পাত্রটি তাপের কু-পরিবাহী হওয়া প্রয়োজন।
(৫) এই পরিবর্তনে পাত্রের চতুষ্পার্শ্বস্থ মাধ্যমের তাপগ্রাহীতা উচ্চ হতে হয়।	(৫) এই পরিবর্তনে পাত্রের চতুষ্পার্শ্বস্থ মাধ্যমের তাপগ্রাহীতা নিম্ন হতে হয়।
(৬) সমোষ্ণ পরিবর্তন বয়েল-এর সূত্র মেনে চলে অর্থাৎ PV = ধ্রুবক।	(৬) আদর্শ গ্যাসের রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের সমীকরণ হল, PV^{γ} = ধ্রুবক।
(৭) সমোষ্ণ লেখ অপেক্ষাকৃত কম খাড়া।	(৭) রুদ্ধতাপ লেখ সমোষ্ণ লেখ হতে অধিক খাড়া।

১৩.১০ রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে চাপ ও আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between pressure and volume of a gas in adiabatic change

মনে করি এক মোল আদর্শ গ্যাস আছে। এই গ্যাসে dQ পরিমাণ তাপ প্রয়োগ করি। এতে গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাবে এবং সেই সংগে গ্যাস কিছু কাজ করবে অর্থাৎ প্রদত্ত তাপ দু'ভাবে ব্যয়িত হবে। ধরি আয়তনের পরিবর্তন dV এবং তাপমাত্রার পরিবর্তন dT.

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র হতে পাই,

$$dQ = C_v dT + PdV \qquad (6)$$

এখানে, C_v = স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ এবং PdV = নির্দিষ্ট চাপে গ্যাসের প্রসারণের জন্য কৃত কাজের পরিমাণ।

আমরা জানি, রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় বাইরের সাথে গ্যাসের তাপের কোন আদান প্রদান ঘটে না।

অতএব, $dQ = 0$

সমীকরণ (6) হতে পাই,

$$C_v dT + PdV = 0 \qquad (7)$$

পুনঃ, আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে, $PV = RT$, এখানে R মোলার গ্যাস ধ্রুবক।

উক্ত সমীকরণকে ব্যবকলন করে পাই,

$$PdV + VdP = RdT$$

বা, $dT = \dfrac{PdV + VdP}{R}$

সমীকরণ (7) হতে পাই,

$$C_v\left(\frac{PdV + VdP}{R}\right) + PdV = 0$$

বা, $C_vPdV + C_vVdP + RPdV = 0$

বা, $C_vPdV + C_vVdP + (C_p - C_v)\,PdV = 0$ $\quad [\because R = C_p - C_v]$

বা, $C_vPdV + C_vVdP + C_pPdV - C_vPdV = 0$

বা, $C_vVdP + C_pPdV = 0$

বা, $VdP + \dfrac{C_p}{C_v}PdV = 0$ $\quad$ [C_v দ্বারা ভাগ করে]

বা, $VdP + \gamma PdV = 0$ $\quad \left[\because \dfrac{C_p}{C_v} = \gamma\right]$

বা, $\dfrac{dP}{P} + \gamma\dfrac{dV}{V} = 0$ $\quad$ [PV দ্বারা ভাগ করে]

এখন সমাকলন করে পাই,

$\log_e P + \gamma \log_e V$ = ধ্রুবক $= \log_e K$, এখানে K = ধ্রুবক।

বা, $\log_e P + \log_e V^\gamma = \log_e K$

বা, ~~$\log_e PV^\gamma = \log_e K$~~

$\therefore$ $PV^\gamma = K$ = ধ্রুবক $\qquad (8)$

এটিই হল চাপ ও আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক।

যদি আদি চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_1 ও V_1 এবং চূড়ান্ত চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_2 ও V_2 হয়, তাহলে

$P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$ = ধ্রুবক $\qquad (9)$

১৩.১১ রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে আয়তন ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক

Relation between volume and temperature in adiabatic change

আমরা জানি, আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে, $PV = RT$

$$P = \frac{RT}{V}$$

পুনঃ, আমরা পাই, $P.V^{\gamma} =$ ধ্রুবক।

উক্ত সমীকরণে P-এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{RT}{V} \times V^{\gamma} = \text{ধ্রুবক} \quad \text{বা,} \quad RTV^{\gamma - 1} = \text{ধ্রুবক}$$

$$\text{বা,} \quad T \times V^{\gamma - 1} = \text{ধ্রুবক} \quad [\because \; R = \text{ধ্রুবক}]$$

এটিই হল রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় আয়তন ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক।

১৩.১২ আপেক্ষিক তাপ

Specific heat

সংজ্ঞা : কোন একটি বস্তুর একক ভরের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বৃদ্ধি করতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে ঐ বস্তুর আপেক্ষিক তাপ বলে। একে 's' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন পানির আপেক্ষিক তাপ হল 4186 J / kg°C। এর অর্থ হল যে 1 kg ভরের পানির তাপমাত্রা 1°C বৃদ্ধি করতে 4186 J শক্তি পানিতে প্রয়োগ করতে হবে। আমরা যদি একটি বস্তুর আপেক্ষিক তাপের মান জানি, তবে m ভরের বস্তুর তাপমাত্রা ΔT পরিমাণ বৃদ্ধি বা হ্রাস করার জন্য যথাক্রমে কি পরিমাণ তাপ প্রয়োগ বা সরাতে হবে তা নির্ণয় করতে পারি।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক একজন মানুষের গোসল করার জন্য কক্ষ তাপমাত্রার চেয়ে 10°C বেশি তাপমাত্রার 60 kg গরম পানির প্রয়োজন। এর জন্য পানিতে কি পরিমাণ তাপ প্রয়োগ করতে হবে তা নিম্নোক্তভাবে বের করা যায় :

আমরা জানি 1 kg পানিকে 1°C তাপমাত্রায় গরম করার জন্য 4186 J তাপ প্রয়োজন। সুতরাং 60 kg পানি 1°C তাপমাত্রায় গরম করার জন্য দরকার 60×4186 J তাপ। অতএব 10°C তাপমাত্রায় গরম করতে প্রয়োজন হবে $60 \times 10 \times 4186 \text{ J} = 2{\cdot}5 \times 10^{6}$ J।

উপরের উদাহরণ থেকে এটা স্পষ্ট যে s আপেক্ষিক তাপবিশিষ্ট m ভরের কোন বস্তুর তাপমাত্রা ΔT বৃদ্ধি করতে তাপের পরিমাণ Q হবে।

ভর $\times$ আপেক্ষিক তাপ $\times$ তাপমাত্রার পার্থক্য

$$\text{অর্থাৎ} \quad Q = ms\,\Delta T = ms\,(T - T_0) \tag{10}$$

$$\text{বা,} \quad s = \frac{1}{m}\frac{Q}{(T - T_0)} \tag{11}$$

এখানে T এবং T_0 যথাক্রমে বস্তুর চূড়ান্ত এবং আদি তাপমাত্রা। তাপমাত্রা বৃদ্ধির ক্ষেত্রে ΔT এবং Q ধনাত্মক। আবার তাপমাত্রা কমানোর ক্ষেত্রে ΔT এবং Q ঋণাত্মক হবে।

আপেক্ষিক তাপের একক : এস. আই. পদ্ধতিতে Q-এর একক J, m-এর একক kg এবং ΔT-এর একক K (কেলভিন)। অতএব সমীকরণ (11) হতে s-এর এস. আই. একক পাওয়া যায় $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$।

তাপগ্রাহীতা বা তাপধারণ ক্ষমতা (Thermal capacity or heat capacity)

বস্তুর ভর ও আপেক্ষিক তাপের গুণফলকে **তাপগ্রাহীতা** বা **তাপধারণ ক্ষমতা** বলে।

সুতরাং তাপগ্রাহীতা, $C = ms$

সমীকরণ (11) হতে s-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$C = m \times \frac{1}{m}\frac{Q}{(T - T_0)} = \frac{Q}{(T - T_0)} = \frac{Q}{\Delta T}$$

এখন $\Delta T = 1°$ হলে, $C = Q$ হয়।

অতএব, তাপগ্রাহীতার নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ কোন বস্তুর তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বাড়াতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয় তাকে তাপগ্রাহীতা বা তাপ ধারণ ক্ষমতা বলে। এর এস. আই. একক Cal $(°C)^{-1}$, J K^{-1} তবে অনেক ক্ষেত্রে Cal $(°C)^{-1}$ একক ও ব্যবহৃত হয়।

১৩.১৩ গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ
Specific heat of gases

আমরা জানি গ্যাসে তাপ প্রয়োগ করলে তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে সাথে এর আয়তন ও চাপ বৃদ্ধি পায়। কিন্তু কঠিন ও তরল পদার্থের ক্ষেত্রে এরূপ হয় না বললেই চলে। সুতরাং গ্যাসের আপেক্ষিক তাপের সংজ্ঞায় আয়তন ও চাপের উল্লেখ থাকা একান্ত প্রয়োজন। আয়তন ও চাপের মধ্যে কখনও আয়তনকে আবার কখনও চাপকে স্থির রাখা হয় বলে গ্যাসের দুটি আপেক্ষিক তাপ আছে ; যথা—

(১) **স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ** এবং

(২) **স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ।**

এখন আমরা গ্যাসের এই দুটি আপেক্ষিক তাপ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করব।

স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ (Specific heat of gas at constant volume)

আয়তন স্থির রেখে একক ভরের কোন একটি গ্যাসের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বৃদ্ধিতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে স্থির আয়তনে ঐ গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ বলে। একে s_v দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ (Specific heat of gas at constant pressure)

স্থির চাপে একক ভরের কোন একটি গ্যাসের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বৃদ্ধিতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে স্থির চাপে ঐ গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ বলে। একে s_p দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

১৩.১৪ মোলার আপেক্ষিক তাপ বা মোলার তাপধারণ ক্ষমতা
Molar specific heat or molar heat capacity

আমরা জানি, বস্তু অতি ক্ষুদ্র অণু, পরমাণু সমন্বয়ে গঠিত এবং একটি বস্তুর মধ্যে অণু-পরমাণুর সংখ্যা অত্যন্ত বেশি। যেমন মাত্র 12 gm কার্বনের মধ্যে $6{\cdot}02 \times 10^{23}$ টি পরমাণু থাকে। এত বড় সংখ্যাকে ছোট ধরনের এককে প্রকাশ করা হয়। এই ছোট এককেক গ্রাম-মোল (gm-mole) বা সংক্ষেপে মোল (mole) বলে।[১] গ্যাসের ক্ষেত্রে আপেক্ষিক তাপ সংজ্ঞায়িত করার জন্য gm বা kg ব্যবহার না করে মোল ব্যবহার করা হয় এবং সংশ্লিষ্ট আপেক্ষিক তাপকে মোলার আপেক্ষিক তাপ বলে।

---

১ কোন বস্তুর পারমাণবিক বা আণবিক ওজন (atomic weight) কিলোগ্রামে প্রকাশ করলে তাকে 1 মোল বলা হয়।

মোলার তাপধারণ ক্ষমতা বা মোলার আপেক্ষিক তাপ : 1 মোল গ্যাসের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বাড়াতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয় তাকে ঐ গ্যাসের মোলার তাপধারণ ক্ষমতা বা মোলার আপেক্ষিক তাপ বলে। একে C দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

কোন গ্যাসের m মোলের তাপমাত্রা ΔT বৃদ্ধি করতে যদি ΔQ পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয় তবে,

মোলার তাপ ধারণ ক্ষমতা,

$$C = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \qquad (12)$$

একক : ΔQ এর একক জুল (joule), m এর একক মোল (mol) এবং ΔT-এর একক কেলভিন (K)। সুতরাং সমীকরণ (12) হতে C-এর একক $J(mol)^{-1} K^{-1}$।

গ্যাসের দুটি আপেক্ষিক তাপ রয়েছে। সুতরাং এর দুটি মোলার আপেক্ষিক তাপও রয়েছে। যথা— (i) স্থির চাপে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ এবং (ii) স্থির আয়তনে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ।

(i) স্থির চাপে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ C_p : স্থির চাপে 1 mole গ্যাসের তাপমাত্রা 1K বৃদ্ধি করতে যে তাপের প্রয়োজন তাকে স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ বলে। একে C_p দ্বারা প্রকাশ করা হয়। চাপ স্থির রেখে m মোল গ্যাসের তাপমাত্রা ΔT বাড়াতে যদি ΔQ জুল তাপের প্রয়োজন হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে,

$$C_p = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \qquad (13)$$

(ii) স্থির আয়তনে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ, C_v : স্থির আয়তনে 1 mole গ্যাসের তাপমাত্রা 1K বৃদ্ধি করতে যে তাপের প্রয়োজন তাকে স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ বলে। একে C_v দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আয়তন স্থির রেখে m মোল গ্যাসের তাপমাত্রা ΔT বাড়াতে যদি ΔQ তাপের প্রয়োজন হয়, তবে সংজ্ঞানুসারে,

$$C_v = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \qquad (14)$$

পরীক্ষায় দেখা গেছে C_p এর মান C_v অপেক্ষা বেশি হয়। এর ভৌত কারণ নিম্নে আলোচনা করা হল।

১৩.১৫ C_p এবং C_v-এর পার্থক্যের ভৌতিক ব্যাখ্যা

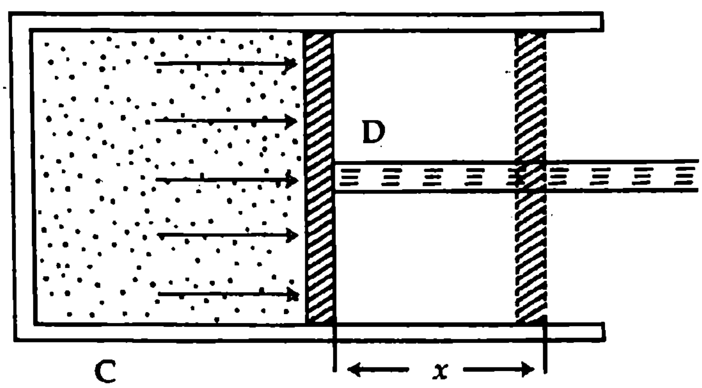
Physical explanation of the difference between C_p and C_v

একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের আয়তন স্থির রেখে তাকে উত্তপ্ত করতে থাকলে তার চাপ ও তাপমাত্রা উভয়ই বৃদ্ধি পায়। কিন্তু আয়তন স্থির থাকায় ঐ গ্যাস বাহ্যিক কোন কাজ করে না। ফলে সম্পূর্ণ তাপ গ্যাসের চাপ ও তাপমাত্রা পরিবর্তনেই ব্যয় হয়। আবার চাপ স্থির রেখে গ্যাসটিকে উত্তপ্ত করতে থাকলে তার আয়তন ও তাপমাত্রা উভয়ই বৃদ্ধি পায়। ফলে প্রযুক্ত তাপ একদিকে গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধি করে এবং অপরদিকে বাহ্যিক চাপের বিরুদ্ধে গ্যাসের আয়তন বৃদ্ধি করে কিছু কাজ সম্পন্ন করে। সুতরাং স্থির অয়তনে 1 মোল গ্যাসের তাপমাত্রা 1K পর্যন্ত বৃদ্ধি করতে যে তাপের প্রয়োজন হবে স্থির চাপে ঐ গ্যাসের তাপমাত্রা 1K বৃদ্ধি করতে তা অপেক্ষা কিছু বেশি তাপের প্রয়োজন হবে। কেননা দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বাহ্যিক চাপের বিরুদ্ধে কাজ করে আয়তন বৃদ্ধি করতে কিছু অতিরিক্ত তাপ লাগবে। অর্থাৎ $C_p = C_v +$ বাহ্যিক চাপের বিরুদ্ধে কাজের সমতুল তাপ। সুতরাং $C_p > C_v$।

১৩.১৬ একটি আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে C_p ও C_v-এর মধ্যে পার্থক্য
Difference between C_p and C_v for an ideal gas

আমরা জানি গ্যাসের দুটি আপেক্ষিক তাপ আছে, একটি C_p এবং অপরটি C_v। এদের মধ্যে পার্থক্য বের করতে হবে।

একটি আদর্শ গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের মধ্যে পার্থক্য করতে গিয়ে তাপ কুপরিবাহী পদার্থের একটি আবদ্ধ চোঙ লই। মনে করি চোঙ C। চোঙের মধ্যে একটি হালকা ঘর্ষণ শূন্য ও বায়ু নিরুদ্ধ পিস্টন বিনা বাধায় চলাচল করতে পারে। মনে করি পিস্টনটি D। পিস্টনটিও কুপরিবাহী পদার্থের তৈরি।



চিত্র ১৩.৪

এই আবদ্ধ চোঙে 1 মোল পরিমাণ গ্যাস লই। এখন গ্যাসটির আয়তন স্থির রেখে এর তাপমাত্রা dT পরিমাণ বৃদ্ধি করি। যদি স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ c_v হয়, তবে গ্যাস কর্তৃক গৃহীত তাপ

= ভর × আপেক্ষিক তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= 1 \times C_v \times dT$

$= C_v \ dT$

গ্যাসের তাপমাত্রা বৃদ্ধির পরিমাণ এক কেলভিন হলে গ্যাস কর্তৃক গৃহীত তাপ

$= C_v \times 1$

$= C_v$ জুল (J)

মনে করি স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ C_p অর্থাৎ স্থির চাপে 1 মোল গ্যাসের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বাড়াতে C_p পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হবে। গ্যাসে সরবরাহকৃত এই তাপ দুই ভাগে ব্যয়িত হবে। এর একটি অংশ C_v গ্যাসের তাপমাত্রা বাড়াবে এবং অপর অংশ বাহ্যিক চাপ P-এর বিরুদ্ধে গ্যাসের আয়তন বৃদ্ধিতে কাজ করে। ধরি চাপের বিরুদ্ধে গ্যাসের আয়তন বৃদ্ধির ফলে পিস্টনটি x পরিমাণ দূরত্ব বাইরে সরে গেল। অতএব কাজের পরিমাণ

= বল × সরণ

= চাপ × ক্ষেত্রফল × সরণ [বল = চাপ × আয়তন]

$= P \times A \times x$; এখানে A = পিস্টন বা চোঙের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল

কাজ $= P.dV$ জুল (J); এখানে dV = গ্যাসের প্রসারিত আয়তন $= A.\ x$.

অতএব,

$C_p = C_v +$ কাজের পরিমাণ

বা, $$C_p = C_v + P.dV \tag{15}$$

আমরা জানি আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে

$$PV = RT \tag{16}$$

যদি চাপ স্থির থাকে, তবে সমীকরণ (16)-কে ব্যবকলন করে পাই,

$$P\,dV + V \times 0 = R\,dT + T \times 0$$

বা, $P\,dV = R\,dT = R$ [∵ তাপমাত্রা বৃদ্ধি $dT = 1$ K]

সমীকরণ (15) হতে পাই,

$$C_p = C_v + R$$

বা, $C_p - C_v = R$ (17)

অর্থাৎ গ্যাসের দুই আপেক্ষিক তাপের পার্থক্য বা অন্তরফল গ্যাস ধ্রুবক R-এর সমান।

যেহেতু R ধনাত্মক, সুতরাং $C_p > C_v$। R-এর মান $8\text{·}314\ J\ K^{-1} mol^{-1}$ বসিয়ে সমীকরণ (17) হতে পাওয়া যায়, $C_p - C_v = 8\text{·}314\ J\ k^{-1}\ mol$

১৩·৭ γ-এর মানের ভিন্নতা ও গুরুত্ব
Variation in the value of γ and its importance

আমরা জানি,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\text{স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ}}{\text{স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ}}$$

পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হতে দেখা যায় সকল এক পরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে [যেমন He, Ar] γ-এর মান 1·66। সকল দ্বিপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে [যেমন H_2, O_2, N_2, Cl_2] γ-এর মান 1·40 এবং সকল ত্রিপরমাণুক গ্যাসের ক্ষেত্রে [যেমন CO_2, C_2H_6, NH_3] γ-এর মান 1·33। অতএব একই প্রকার আণবিক গঠনের জন্য γ-এর মান নির্দিষ্ট এবং বিভিন্ন গঠনের গ্যাসের জন্য γ-এর মান ভিন্ন ভিন্ন হয়।

γ-এর গুরুত্ব ঃ

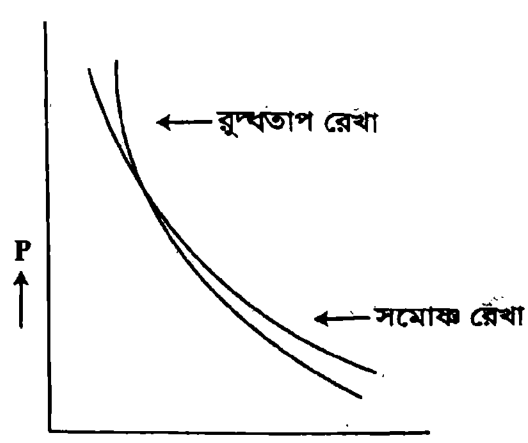
(ক) কোন গ্যাসের γ-এর মান জানা থাকলে ঐ গ্যাসের আণবিক বিন্যাস জানা যায় অর্থাৎ ঐ গ্যাসের প্রতিটি অণুর মধ্যে কয়টি পরমাণু আছে তা জানা যায়।

(খ) গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ γ–এর মানের উপর নির্ভর করে। তাই শব্দের বেগ নির্ণয়ের জন্য এর প্রয়োজন হয়।

(গ) গ্যাসের রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়া পর্যালোচনার জন্য γ-এর মান জানা দরকার।

১৩·৮ রুদ্ধতাপীয় রেখা বা লেখ সমোষ্ণ রেখা বা লেখ-এর চেয়ে অধিকতর খাড়া
Adiabatic curve is steeper than isothermal curve

P —V লেখচিত্রের সাহায্যে সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়া নির্দেশ করা যায়। লেখচিত্রের কোন বিন্দুতে স্পর্শক টানলে ঐ বিন্দুতে ঢাল বা নতি হবে $\frac{dP}{dV}$। দেখা যায় যে, যেকোন বিন্দুতে রুদ্ধতাপ রেখার ঢাল সমোষ্ণ রেখার ঢালের γ গুণ হয়।



চিত্র ১৩·৫

সমোষ্ণীয় ও রুদ্ধতাপীয় সমীকরণদ্বয়কে ব্যবকলন করে সহজেই প্রমাণ করা যায় যে রুদ্ধতাপীয় রেখা সমোষ্ণ রেখা অপেক্ষা γ-গুণ খাড়া।

সমোষ্ণ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে

PV = ধ্রুবক

উভয় পক্ষকে ব্যবকলন করে পাই,

$$PdV + VdP = 0$$

$$\text{বা, } \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{সমোষ্ণ}} = -\frac{P}{V} \qquad (18)$$

অপরপক্ষে, রুদ্ধতাপ পরিবর্তনের ক্ষেত্রে,

PV^{γ} = ধ্রুবক

উভয় পক্ষকে ব্যবকলন করে পাই,

$$\gamma PV^{\gamma-1}dV + V^{\gamma}dP = 0$$

$$\text{বা, } \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{রুদ্ধতাপ}} = -\frac{\gamma PV^{\gamma-1}}{V^{\gamma}}$$

$$= -\gamma PV^{\gamma-1}V^{-\gamma}$$

$$= -\gamma PV^{-1} = -\gamma\frac{P}{V} \qquad (19)$$

সমীকরণ (18) ও (19) তুলনা করলে দেখা যায় যে,

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{রুদ্ধতাপ}} = -\gamma\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{সমোষ্ণ}}$$

$$\text{বা, } \frac{\frac{dP}{dV}_{\text{রুদ্ধতাপ}}}{\left(\frac{dV}{dV}\right)_{\text{সমোষ্ণ}}} = -\gamma$$

সুতরাং, যে কোন বিন্দুতে রুদ্ধতাপ রেখার ঢাল ঐ বিন্দুতে সমোষ্ণ রেখার ঢাল অপেক্ষা γ গুণ বেশি। যেহেতু যে কোন গ্যাসের ক্ষেত্রে $\gamma > 1$, সুতরাং রুদ্ধতাপীয় রেখা সমোষ্ণ রেখার চেয়ে γ গুণ খাড়া।

স্মরণিকা

তাপগতিবিদ্যা : পদার্থবিজ্ঞানের যে শাখা তাপ ও যান্ত্রিক শক্তি নিয়ে আলোচনা করে তাকে তাপগতিবিদ্যা বলে।

তাপগতীয় ব্যবস্থা বা সিস্টেম : তল বা বেষ্টনী দ্বারা সীমাবদ্ধ কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ বস্তুকে তাপগতীয় ব্যবস্থা বা সিস্টেম বলে।

পরিপার্শ্ব : কোন নির্দিষ্ট ব্যবস্থার সাথে শক্তি বিনিময়ে সক্ষম যে কোন ব্যবস্থাকে ঐ ব্যবস্থার পরিপার্শ্ব বলে।

সাম্যাবস্থা : কোন বিচ্ছিন্ন ব্যবস্থার চূড়ান্ত অবিচল অবস্থাকে তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বলে।

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র : যখনই কাজ সম্পূর্ণভাবে তাপে বা তাপ সম্পূর্ণরূপে কাজে রূপান্তরিত হয়, তখন কাজ ও তাপ পরস্পরের সমানুপাতিক হবে।

অভ্যন্তরীণ বা অন্তর্নিহিত শক্তি : প্রত্যেকে সংস্থার মধ্যে এমন একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ শক্তি সুপ্ত অবস্থায় বর্তমান থাকে যার ফলে সংস্থাটি পরিবেশ ও পরিস্থিতি অনুযায়ী বিভিন্ন প্রকার শক্তি উৎপন্ন করতে সক্ষম হয়। সংস্থার এই শক্তিকে অভ্যন্তরীণ বা অন্তর্নিহিত শক্তি বলে।

তাপের যান্ত্রিক সমতা : এক একক তাপ উৎপন্ন করতে যে পরিমাণ কাজ সম্পাদিত হয় অথবা যে পরিমাণ কাজ সম্পাদিত হলে এক একক তাপ উৎপন্ন হয় তাকে তাপের যান্ত্রিক সমতা বলে।

সমোষ্ণ পরিবর্তন : যে পরিবর্তনে কোন গ্যাসের চাপের ও আয়তনের পরিবর্তন ঘটে কিন্তু তাপমাত্রা স্থির থাকে তাবে সমোষ্ণ পরিবর্তন বলে।

রুদ্ধতাপ পরিবর্তন : যে পরিবর্তনে কোন তাপ বাইরে থেকে সরবরাহ করা হয় না বা গ্যাস হতে অপসারণ করা হয় ন কিন্তু গ্যাসের চাপ ও আয়তনের পরিবর্তন ঘটে তাকে রুদ্ধতাপ পরিবর্তন বলে।

আপেক্ষিক তাপ : কোন বস্তুর একক ভরের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বৃদ্ধি বা হ্রাস করতে যে তাপের প্রয়োজন হয় তাকেই বস্তুর আপেক্ষিক তাপ বলে।

তাপগ্রাহীতা বা তাপধারণ ক্ষমতা : কোন বস্তুর তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বাড়াতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয় তাকে তাপগ্রাহীতা বা তাপ ধারণ ক্ষমতা বলে।

স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ : আয়তন স্থির রেখে একক ভরের কোন একটি গ্যাসের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বৃদ্ধিতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে স্থির আয়তনে ঐ গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ বলে।

স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ : স্থির চাপে একক ভরের একটি গ্যাসের তাপমাত্রা 1 ডিগ্রী বৃদ্ধিতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে স্থির চাপে ঐ গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ বলে।

স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ : স্থির চাপে এক মোল গ্যাসের তাপমাত্রা 1 কেলভিন বৃদ্ধি করতে যে তাপের প্রয়োজন হয় তাকে ঐ গ্যাসের স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ বলে।

স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ : স্থির আয়তনে এক মোল গ্যাসের তাপমাত্রা 1 কেলভিন বৃদ্ধি করতে যে তাপের প্রয়োজন তাকে ঐ গ্যাসের স্থির আয়তনে মোলার আপেক্ষিক তাপ বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র :

(ক) তাপ ও যান্ত্রিক শক্তির সম্পর্ক, $W = JH$ (1)

(খ) প্রথম সূত্রের সাধারণ রূপ, $dQ = du + dW$ (2)

$= du + PdV$ (3)

C_p ও C_v এর মধ্যে সম্পর্ক, $C_p - C_v = R$ (4)

রুদ্ধতাপে চাপ ও আয়তন-এর মধ্যে সম্পর্ক, PV^{γ} = ধ্রুবক (5)

রুদ্ধতাপে আয়তন ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক, $TV^{\gamma-1}$ = ধ্রুবক (6)

আপেক্ষিক তাপ, $s = \frac{Q}{m(T - T_0)}$ (7)

তাপধারণ ক্ষমতা বা তাপগ্রাহীতা, $C = \frac{Q}{\Delta T}$ (8)

স্থির চাপে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ, $C_p = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$ (9)

স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ, $C_v = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}$ (10)

সমাধানকৃত উদাহরণ

$P_1 = 1.103 \times 10^5$

১। বায়ুকে রুদ্ধতাপে প্রসারিত করে এর আয়তন তিনগুণ করা হল। যদি প্রাথমিক চাপ 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ হয় তাহলে চূড়ান্ত চাপ কত হবে ? ($\gamma = 1.4$) [ব. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৪]

এখানে,

প্রাথমিক চাপ = 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ, $P_1 = 0.76$ m পারদ

স্তম্ভের চাপ $= 0.76\text{ m} \times (13.6 \times 10^3\text{ kgm}^{-3}) \times 9.8\text{ ms}^{-2}$

$= 1.013 \times 10^5\text{ Nm}^{-2}$

প্রাথমিক আয়তন, $= V_1$

চূড়ান্ত আয়তন, $V_2 = 3V_1$

$\gamma = 1.4$

চূড়ান্ত চাপ, $P_2 = ?$

আমরা জানি, P_2

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

বা, $\left(\frac{3V_1}{V_1}\right)^{\gamma} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)$

$$(3)^{1.4} = \frac{1.013 \times 10^5}{P_2}$$

বা, $P_2 = \frac{1.013 \times 10^5}{(3)^{1.4}} = 2.176 \times 10^4$

২। কোন সংস্থা পরিবেশ থেকে 800 J তাপশক্তি শোষণ করায় এর অন্তস্থ শক্তি 500 J বৃদ্ধি পেল। সংস্থা কর্তৃক পরিবেশের উপর সম্পাদিত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৫]

ΔQ Δu

$\Delta u = 500$ J

$\Delta Q = 800$ J

$\Delta W = ?$

এখানে, ΔW

$$\Delta Q = \Delta u + \Delta W$$

$$\Delta W = \Delta Q - \Delta u$$

$= 800 - 500$

$= 300$ J

Q. V_1 V_2

৩। স্বাভাবিক চাপে 100 m^3 আয়তনের একটি গ্যাস 5×10^3 J তাপ দিলে গ্যাসের আয়তন $100{\cdot}2$ m^3 হয়। ঐ গ্যাসের কৃত কাজের মান নির্ণয় কর। [চি. বো. ২০০২]

ΔQ

আমরা জানি,

$\Delta Q = \Delta u + \Delta W$

আবার, $\Delta W = P\Delta V$

$= P(V_2 - V_1)$

$\Delta W = 1{\cdot}013 \times 10^5\,(100{\cdot}2 - 100)$

$= 1{\cdot}013 \times 10^5 \times 0{\cdot}2$

$= 20260$ J

এখানে,

চাপ, $P = 1{\cdot}013 \times 10^5\ Nm^{-2}$

প্রাথমিক আয়তন, $V_1 = 100\ m^3$

চূড়ান্ত আয়তন, $V_2 = 100{\cdot}2\ m^3$

গৃহীত তাপ, $\Delta Q = 5 \times 10^3$ J

কৃত কাজ, $\Delta W = ?$

P.

৪। একটি সীসার গুলি কত বেগে একটি অনমনীয় লক্ষ্যবস্তুতে আঘাত করলে গুলির তাপমাত্রা $1{\cdot}12°C$ বৃদ্ধি পাবে ? ধরে লও যে, আঘাতে উৎপন্ন তাপ শুধু গুলি দ্বারা শোষিত হয়েছে। [সীসার আপেক্ষিক তাপ = 30 cal kg^{-1} $°C^{-1}$ এবং $J = 0{\cdot}2\ J\ cal^{-1}$]

মনে করি গুলির ভর = m kg এবং নির্ণেয় বেগ = $v\ ms^{-1}$

আমরা পাই, কৃত কাজ, $W = \frac{1}{2}mv^2$ আর্গ ও উৎপন্ন তাপ, $H = mSt = m \times 30 \times 1{\cdot}12$ ক্যালরি।

কিন্তু $W = JH$

$$\frac{1}{2}mv^2 = 4{\cdot}2 \times m \times 30 \times 1{\cdot}12\ J$$

অর্থাৎ $v = \sqrt{2 \times 4{\cdot}2 \times 30 \times 1{\cdot}12}$

$= 16{\cdot}8\ ms^{-1}$

P.

৫। 200 ms^{-1} বেগ প্রাপ্ত একটি সীসার বুলেট কোথাও থামিয়ে দেয়ার ফলে সমস্ত গতিশক্তি তাপে পরিণত হল। বুলেটের তাপমাত্রা কত বৃদ্ধি পাবে ? (সীসার আপেক্ষিক তাপ 126 $Jkg^{-1}K^{-1}$) । [য. বো. ২০০৬]

$\Delta\theta$

মনে করি, বুলেটির ভর = m kg

সুতরাং বুলেটের গতিশক্তি = $\frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}m \times (200)^2$

উৎপন্ন তাপ = $ms\,\Delta T$

এখানে,

বুলেটের বেগ, $v = 200\ ms^{-1}$

আপেক্ষিক তাপ, $s = 126\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$

তাপমাত্রা বৃদ্ধি, $\Delta T = ?$

প্রশ্নানুসারে বুলেট কর্তৃক কৃতকাজ = বুলেটের গতিশক্তি = উৎপন্ন তাপ

$$\frac{1}{2}m \times (200)^2 = m \times 126 \times \Delta T.$$

বা, $\Delta T = \frac{(200)^2}{2 \times 126} = 158{\cdot}7K$

৬। একটি জলপ্রপাত 100 মিটার উপর হতে পানি নিচে পতিত হয়। উপরের ও নিচের পানির তাপমাত্রার পার্থক্য নির্ণয় কর। [$J = 4{\cdot}2 \times J\ cal^{-1}$]

ধরা যাক চূড়া হতে তলদেশে m kg পানি পতিত হলে ঐ পানির তাপমাত্রা = $t°C$ বৃদ্ধি পায় এবং পর্যবেক্ষণ স্থানে $g = 9{\cdot}81\ ms^{-2}$

এখানে কৃত কাজ, W = চূড়ায় পানিতে সঞ্চিত স্থিতি শক্তি

$= mgh = m \times 9{\cdot}81 \times 100$ J [$\because h = 100\ m$]

উৎপন্ন তাপ, $H = mSt = m \times 1000 \times t$ ক্যালরি। [পানির আ. তাপ = 1000 cal $kg^{-1}\ °C^{-1}$]

কিন্তু, $W = JH$

কাজেই, $m \times 9{\cdot}81 \times 100 = 4{\cdot}2 \times m \times 1000 \times t$

$$\boxed{mgh = mS\Delta\theta}$$

$\therefore t = \frac{9{\cdot}81 \times 100}{4{\cdot}2 \times 1000} = 0{\cdot}234°C$

৭। এক খণ্ড বরফ উপর হতে ভূমিতে পতিত হল। এতে পতন শক্তির 50% তাপে রূপান্তরিত হওয়ায় বরফ খণ্ডটির এক-চতুর্থাংশ গলে গেল। বরফ খণ্ডটি কত উচ্চতা হতে পতিত হয়েছিল নির্ণয় কর। [বরফ গলনের সুপ্ত তাপ 80000 cal kg^{-1} এবং তাপের যান্ত্রিক সমতা = $4{\cdot}2\ J\ cal^{-1}$]

ধরি বরফ খণ্ডটির ভর = m kg ও নির্ণেয় উচ্চতা = h m

তাহলে পতনে কৃত কাজ = mgh

তাপ উৎপন্নে ব্যয়িত পতন শক্তি, $W = \frac{1}{2}mgh$ $\left[\ 50\% = \frac{1}{2}\ \right]$

উৎপন্ন তাপ, $H = \frac{W}{J} = \frac{mgh}{2J}$

আবার বরফ খণ্ডটির এক-চতুর্থাংশ গলতে প্রয়োজনীয় তাপ = $\frac{m}{4} \times L$

কিন্তু উৎপন্ন তাপেই বরফ খণ্ডটি গলেছে।

$\frac{m}{4} \times L = \frac{mgh}{2J}$

$\therefore$ বা, $h = \frac{JL}{2g}$

কাজেই, $h = \frac{4.2 \times 80000}{2 \times 9.80}$ m

$= 17.14$ km

৮। $-5°C$ তাপমাত্রার 0.01 kg বরফকে $100°C$ তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে কত কাজ সম্পন্ন করে তাপ সরবরাহ করতে হবে ? (বরফের আ. তাপ= $500\ cal\ kg^{-1}\ (°C)^{-1}$, বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = $80000\ cal\ kg^{-1}$]

বরফকে $-5°C$ হতে $0°C$ পর্যন্ত উত্তপ্ত করতে প্রয়োজনীয় তাপ

$= mS(t_2 - t_1) = 0.01\ kg \times 500\ cal\ kg^{-1}\ (°C)^{-1} \times 5°C = 25\ cal$

$0°C$ তাপমাত্রার বরফকে $0°C$ তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ

$= mL = 0.01 kg \times 80000\ cal\ kg^{-1} = 800\ cal$

বরফ গলা পানির তাপমাত্রা $0°C$ হতে $100°C$ উঠতে প্রয়োজনীয় তাপ

$= 0.01 kg \times 1000\ cal\ kg^{-1} \times 100°C = 1000\ cal$

$100°C$ তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ

$= mL = 0.1\ kg \times 53700\ cal\ kg^{-1}$

$= 5370\ cal$

মোট প্রয়োজনীয় তাপ, $H = (25 + 800 + 1000 + 5370)\ cal = 7195\ cal$

কিন্তু, $W = JH$ এবং $J = 4.2\ J\ cal^{-1}$

$\therefore$ নির্ণেয় কাজ, $W = 4.2\ J\ cal^{-1} \times 7195\ cal = 3.0219 \times 10^4\ J$

P.√

৯। পিস্টনযুক্ত একটি সিলিন্ডারে কিছু গ্যাস আবদ্ধ আছে। গ্যাসের চাপ 400 Pa-এ স্থির রেখে সিস্টেমে ধীরে ধীরে 800 J তাপশক্তি সরবরাহ করায় 1200 J কাজ সম্পাদিত হয়। গ্যাসের আয়তন এবং অন্তস্থ শক্তির পরিবর্তন নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০১]

আমরা পাই, $\Delta W = P(V_2 - V_1)$

$1200 = 400\ (V_2 - V_1)$

$\therefore (V_2 - V_1) = \frac{1200}{400}$

$= 3\ m^3$

আবার, $\Delta Q = \Delta u + P\Delta V$

$800 = \Delta u + 1200$

$\Delta u = -1200 + 800$

$= -400\ J$

এখানে,
$P = 400\ Pa$
$\Delta W = 1200\ J$
$\Delta V = (V_2 - V_1) = ?$
$\Delta u = ?$
$\Delta Q = 800\ J$

P.√

১০। $25°C$ তাপমাত্রা ও $1 \times 10^5\ Nm^{-2}$ চাপে একটি আদর্শ গ্যাসের আয়তন $0.05 m^3$। স্থির চাপে গ্যাসটি উত্তপ্ত করায় এর আয়তন $0.06 m^3$ হল। (ক) বাহ্যিক সম্পাদিত কাজ ও (খ) গ্যাসের নতুন তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

(ক) আমরা জানি,

বাহ্যিক সম্পাদিত কাজ, $W = P\Delta V$

বা, $W = 1 \times 10^5 \times 0.01$

$= 1000 J$

এখানে,
চাপ, $P = 1 \times 10^5\ Nm^{-2}$
আয়তন পরিবর্তন, $\Delta V = (0.06 - 0.05)\ m^3 = 0.01 m^3$

(খ) আমরা জানি,

$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

বা, $T_2 = \frac{V_2 T_1}{V_1}$

$T_2 = \frac{0.06 \times 298}{0.05} = 357.6\ K$

এখানে,
আদি আয়তন, $V_1 = 0.05 m^3$
চূড়ান্ত আয়তন, $V_2 = 0.06 m^3$
আদি তাপমাত্রা, $T_1 = 25°C = (273 + 25)\ K = 298\ K$
নতুন তাপমাত্রা, $T_2 = ?$

BG & JEWEL

১১। 25°C তাপমাত্রায় ও বায়ুমণ্ডলীয় চাপে আবদ্ধ শুষ্ক বায়ুকে হঠাৎ বা রুদ্ধতাপে সংনমিত করে আয়তন অর্ধেক করা হল। চূড়ান্ত (ক) তাপমাত্রা (খ) চাপ নির্ণয় কর। [$\gamma = 1.4$] [য. বো. ২০০৪]

মনে করি চূড়ান্ত তাপমাত্রা = T_2K ও চাপ = P_2

আমরা পাই, $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ (1)

$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$ (2)

এখানে,

$T_1 = 25°C = (25 + 273)\text{ K} = 298\text{ K}$

$V_1 = 2V_2$

$\gamma = 1.4$

$P_1 = 1$ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ

(ক) সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \times T_1 = 2^{1.4-1} \times 298\text{ K} = 393.18\text{ K} = (393.18 - 273)°C = 120.18°C$$

(খ) $P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \times P_1$

$= 2^{1.4} \times 1$ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ $= 2.64$ বায়ুমণ্ডলীয় চাপ

১২। 27°C তাপমাত্রায় কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাস হঠাৎ প্রসারিত হয়ে দ্বিগুণ আয়তন লাভ করে। চূড়ান্ত তাপমাত্রা কত ? ($\gamma = 1.4$) [চ. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০১]

মনে করি, চূড়ান্ত তাপমাত্রা = T_2K

আমরা পাই,

$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$

$300 \times V_1^{1.4-1} = T_2 \times (2V_1)^{1.4-1}$

বা, $300 \times V_1^{0.4} = T_2 \times (2V_1)^{0.4}$

বা, $300 \times V_1^{0.4} = T_2 \times 2^{0.4} \times V_1^{0.4}$

বা, $300 = T_2 \times 2^{0.4}$

$T_2 = \frac{300}{2 \times 10^{0.4}} = \boxed{59.72\text{ K}}$

এখানে,

$\gamma = 1.4$

$T_1 = 27°C = (27 + 273)\text{ K} = 300\text{ K}$

V_1 = আদি আয়তন

V_2 = শেষ আয়তন = $2V_1$

T_2 = ?

১৩। স্বাভাবিক তাপমাত্রা ও চাপের কিছু পরিমাণ গ্যাসকে হঠাৎ সংকুচিত করে তার আয়তন এক-তৃতীয়াংশ করা হল। চূড়ান্ত তাপমাত্রা কত ? [$\gamma = 1.41$] [ব. বো. ২০০৩]

আমরা জানি, $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$

$\therefore T_2 = \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} \times T_1$

$= \left(\frac{V_1}{\frac{1}{3}V_1}\right)^{1.41-1} \times 273$

$= (3)^{0.41} \times 273 = 428.33\text{ K}$

$T = (428.33 - 273)°C = 155.33°C$

এখানে,

$T_1 = 273\text{ K}$

$V_1 = V$

$V_2 = \frac{1}{3}V_1$

$\gamma = 1.41$

T_2 = ?

১৪। 1 kg পানিকে 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে বাষ্পে পরিণত করতে অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন নির্ণয় কর। [জলীয় বাষ্পের সুপ্ত তাপ = 2.268×10^6 J/kg ও 1 kg জলীয় বাষ্পের আয়তন = 1.671 m^3]।

আমরা পাই, $du = dQ - dW$ (1)

আয়তন পরিবর্তনে কৃতকাজ, $dW = P.dV$

$\therefore dW = P.dV = 1.013 \times 10^5\text{ Nm}^{-2} \times 1.67\text{ m}^3$

$= 0.169 \times 10^6$ J

আবার অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন, $du = dQ - dW$

$du = (2.268 \times 10^6 - 0.169 \times 10^6)$ J

$= 2.099 \times 10^6$ J

এখানে,

dV = জলীয় বাষ্পের আয়তন — পানির আয়তন

$= (1.671 - 0.001)\text{ m}^3 = 1.67\text{ m}^3$

[1 kg পানির আয়তন $= 0.001\text{ m}^3$]

P = 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ

= 0.76 m উল্লম্ব পারদ স্তম্ভের চাপ

$= 0.76\text{ m} \times (13.6 \times 10^3\text{ kgm}^{-3}) \times 9.8\text{ ms}^{-2}$

$= 1.013 \times 10^5\text{ N.m}^{-2}$ ($\because P = h\rho g$)

$dQ = 2.268 \times 10^6$ J

১৫। একটি সিলিন্ডারের মধ্যে রাখা কিছু পরিমাণ গ্যাস পরিবেশের উপর 200 J কাজ সম্পাদনের সময় পরিবেশ থেকে 500 J তাপশক্তি শোষণ করে। গ্যাসের অন্তস্থ শক্তির পরিবর্তন কত হবে ? সিস্টেমের অন্তস্থ শক্তি হ্রাস পাবে না বৃদ্ধি পাবে ? [রা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$\Delta Q = \Delta u + \Delta W$

বা, $500 = \Delta u + 200$

বা, $\Delta u = 500 - 200$

$= 300\ J$

এখানে,

$\Delta W = 200J$

$\Delta Q = 500J$

$\Delta u = ?$

সিস্টেমের অন্তস্থ শক্তি বৃদ্ধি পাবে কারণ অন্তস্থ শক্তির পরিবর্তন ধনাত্মক।

১৬। অক্সিজেনের ক্ষেত্রে C_p ও C_v নির্ণয় কর। ধর $C_p = 1{\cdot}4\, c_v$, স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় অক্সিজেনের ঘনত্ব $= 1{\cdot}428\ kg\ m^{-3}$, স্বাভাবিক চাপ $= 1{\cdot}013 \times 10^5\ Pa$ ও অক্সিজেনের আণবিক ভর $= 32\ kg\ k\ mol^{-1}$।

আমরা পাই, $R = \frac{PV}{T} = \frac{P}{T} \quad \frac{M}{\rho}$

প্রশ্নানুযায়ী, $R = \frac{1{\cdot}013 \times 10^5\ Pa}{273K} \times \frac{32\ kg\ k\ mol^{-1}}{1{\cdot}428\ kg\ m^{-3}}$

$= 8315\ J\ k\ mol^{-1} K^{-1}$

আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে $(C_p - C_v) = R$ অনুযায়ী

$C_p - C_v = R = 8315\ J\ k\ mol^{-1}\ K^{-1}$

কিন্তু $C_p = 1{\cdot}4\ C_v$

কাজেই $1{\cdot}4\ C_v - C_v = 8315\ k\ mol^{-1}K^{-1}$

$C_v = \frac{8315}{0{\cdot}4} J\ k\ mol\ K^{-1}$

$= 20787{\cdot}5\ J\ k\ mol^{-1}\ K^{-1}$

ও $C_p = 1{\cdot}4\ C_v = 1{\cdot}4 \times 20787{\cdot}5\ J\ k\ mol^{-1}\ K^{-1} = 29102{\cdot}5\ J\ k\ mol\ K^{-1}$

P.V

১৭। এক পারমাণবিক আদর্শ গ্যাসের জন্য জন্য C_p এবং C_v-এর মান নির্ণয় কর।

$[R = 8{\cdot}31\ J\ mol^{-1}K^{-1}]$

আমরা জানি, $C_v = \frac{3}{2} R$

বা, $C_v = \frac{3}{2} \times 8{\cdot}31 = 12{\cdot}5\ J\ mol^{-1}K^{-1}$

পুনঃ $C_p = C_v + R$

বা, $C_p = (12{\cdot}5 + 8{\cdot}31)\ J\ mol^{-1}K^{-1}$

বা, $C_p = 20{\cdot}81\ J\ mol^{-1}K^{-1}$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন :

১। সিস্টেম বলতে কি বুঝ ? [কু. বো. ২০০৩]

২। অভ্যন্তরীণ শক্তি বলতে কি বুঝ ? [রা. বো. ২০০৬]

৩। তাপের যান্ত্রিক সমতার সংজ্ঞা দাও। [ঢা. বো. ২০০২]

৪। তাপের যান্ত্রিক সমতা $4{\cdot}2\ J\ cal^{-1}$ বলতে কি বুঝ ?

৫। আপেক্ষিক তাপ কাকে বলে ? [সি. বো. ২০০৩]

৬। তাপধারণ ক্ষমতা ও আপেক্ষিক তাপের মধ্যে সম্পর্ক কি ? এদের একক কি ?

৭। কোন গ্যাসের দুই প্রকারের আপেক্ষিক তাপ থাকে কেন ? ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০৪]

৮। মোলার তাপ ধারণ ক্ষমতা কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৪, ২০০১ ; চ. বো. ২০০১]

৯। C_p ও C_v-এর সংজ্ঞা দাও। [চ. বো. ২০০৫]

১০। সংজ্ঞা দাও ঃ

সিস্টেম [চ. বো. ২০০৩]

রুদ্ধতাপীয় পরিবর্তন [চ. বো. ২০০২]

মোলার তাপ ধারণ ক্ষমতা [ব. বো. ২০০২; সি. বো. ২০০৩]

রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়া [ঢা. বো. ২০০২]

সমোষ্ণ প্রক্রিয়া [ঢা. বো. ২০০২]

১১। γ-এর গুরুত্ব উল্লেখ কর। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০১; কু. বো. ২০০২]

১২। রুদ্ধতাপীয় পরিবর্তন বলতে কি বুঝ ? [ঢা. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৩, ২০০০ ; চ. বো. ২০০১]

১৩। সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়া কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০১, ২০০০]

১৪। স্থির আয়তনে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপের সংজ্ঞা দাও। [চ. বো. ২০০১]

১৫। C_p-এর মান C_v-এর মান অপেক্ষা বড় কেন ? ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০২, ২০০২]

১৬। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রটি বিবৃত কর। [কু. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩]

১৭। সমোষ্ণ পরিবর্তন কি ? [রা. বো. ২০০২]

১৮। স্থির চাপে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপের সংজ্ঞা দাও।

১৯। কৃত কাজ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হয় কখন ?

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রটি বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৪, ২০০২ ; চ. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০৩, ২০০১ ; কু. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]

২। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্রটি কি? এটি কিরূপে অভ্যন্তরীণ শক্তির সাথে সম্পর্কিত ? [য. বো. ২০০৪]

৩। একটি আদর্শ গ্যাসের রুদ্ধতাপীয় পরিবর্তনের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, PV^{γ} = ধ্রুবক ; এখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [চ. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০২ ; সি. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০২; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০১ ; রা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৪]

৪। দেখাও যে, সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় কোন ব্যবস্থা কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ এতে সরবরাহকৃত তাপশক্তির সমান। [চ. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০১]

৫। রুদ্ধতাপ পরিবর্তনে চাপ ও আয়তনের মধ্যে সম্পর্ক নিরূপণ কর। [সি. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৪, ২০০২]

৬। রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ায় গ্যাসের আয়তন ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন কর। [রা. বো. ২০০৬]

৭। দেখাও যে, রুদ্ধতাপ রেখা সমোষ্ণ রেখা অপেক্ষা অধিকতর খাড়া। [রা. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০৪]

৮। দেখাও যে, স্থির চাপে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপ ও স্থির আয়তনে গ্যাসের মোলার আপেক্ষিক তাপের বিয়োগফল $8{\cdot}31\ JK^{-1}$ এর সমান। [য. বো. ২০০৩]

৯। সমোষ্ণ প্রক্রিয়া ও রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ার মধ্যে পার্থক্য দেখাও। [য. বো. ২০০৩]

১০। এক মোল আদর্শ গ্যাসের ক্ষেত্রে দেখাও যে, $C_P - C_V = R$; সেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থবহন করে। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০২, ২০০০ ; কু. বো. ২০০৫, ২০০১ ; চ. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৫, ২০০৩, ২০০১ ; ব. বো. ২০০৫, ২০০২ ; য. বো. ২০০৫, ২০০১]

১১। গাণিতিভাবে প্রমাণ কর যে, রুদ্ধতাপীয় লেখ সমোষ্ণ লেখের চেয়ে γ গুণ খাড়া। [সি. বো. ২০০৬, ২০০২ ; কু. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২]

১২। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র থেকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় PV^{γ} = ধ্রুবক, সমীকরণটি প্রতিপাদন কর। [য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০২]

১৩। সমচাপ প্রক্রিয়ায় প্রসারণশীল গ্যাস দ্বারা কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০২]

১৪। একটি আদর্শ গ্যাসের জন্য দেখাও যে C_P সর্বদা C_V অপেক্ষা বড়। [চ. বো. ২০০১]

১৫। স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ ও স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপের সংজ্ঞা দাও। এদের প্রথমটি দ্বিতীয়টি অপেক্ষা কেন বড় হয় তা ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০০১]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। (ক) 6 cal তাপ সম্পূর্ণরূপে কাজে পরিণত হলে কত জুল কাজ সম্পন্ন হবে ?

(খ) 30 J কাজ সম্পূর্ণরূপে তাপে রূপান্তরিত হলে কত ক্যালরি তাপ পাওয়া যাবে? [উত্তর ঃ (ক) 25·2 J (খ) 7·14 cal]

২। 15°C তাপমাত্রায় হিলিয়ামকে হঠাৎ এর আয়তনের 8 গুণ বৃদ্ধি করলে এর তাপমাত্রার পরিবর্তন বের কর। ($\gamma = 1·66$) [রা. বো. ২০০৬ ; উত্তর ঃ 216·5 K]

৩। 0°C তাপমাত্রা এবং 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে কিছু পরিমাণ গ্যাসকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করায় এর আয়তন প্রাথমিক আয়তনের $\frac{1}{5}$ গুণ হল। গ্যাসটির (ক) চূড়ান্ত চাপ এবং (খ) চূড়ান্ত তাপমাত্রা নির্ণয় কর। (গ) প্রক্রিয়াটি সমোষ্ণ হলে গ্যাসটির চূড়ান্ত চাপ কত হবে ? (গ্যাসের $\gamma = 1·4$) [উত্তর ঃ (ক) 9·52 বায়ুচাপ ; (খ) 247°C ; (গ) 5 বায়ুচাপ]

৪। আদর্শ চাপের কিছু পরিমাণ গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় সঙ্কুচিত করে তার আয়তনের এক পঞ্চমাংশ করা হল। শেষ চাপ কত হবে নির্ণয় কর। [উঃ 3·8 m]

৫। 30°C তাপমাত্রার কোন গ্যাসের উপর রূদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় চাপ দ্বিগুণ করা হল। তাপমাত্রা বৃদ্ধি নির্ণয় কর। [$\gamma = 1·4$] [উঃ 6·36 K]

৬। 27°C তাপমাত্রায় 0·02 kg হাইড্রোজেন গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করে প্রাথমিক আয়তনের এক-চতুর্থাংশ করা হল। কৃতকাজের মান বের কর। [উঃ 34576·95 J]

৭। চূড়ান্ত তাপমাত্রা নির্ণয় কর যখন 0°C তাপমাত্রার নির্দিষ্ট পরিমাণ গ্যাসকে হঠাৎ তার প্রাথমিক চাপের 20 গুণ চাপে সংনমিত করা হয়। [$\gamma = 1·42$] [উঃ 662·17 K বা, 369·2°C]

৮। 27°C তাপমাত্রায় এবং 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের কোন গ্যাসকে সংকুচিত করে আয়তন এক তৃতীয়াংশ করা হল। তাপমাত্রা ও চাপ কত হবে ? [$\gamma = 1·4$] [উঃ 192·6°C ; 4·654 বায়ু চাপ]

৯। 15°C তাপমাত্রার বায়ুকে রুদ্ধতাপে প্রসারিত করে তার আয়তন দ্বিগুণ করা হল। যদি প্রাথমিক চাপ 1 বায়ুমণ্ডলীয় চাপ হয়, তবে চূড়ান্ত চাপ নির্ণয় কর। [$\gamma = 1·4$] [উঃ 0·3789 বায়ু চাপ]

১০। 10 kg ভরের একটি বস্তুর বেগ 100 ms^{-1} হতে 40 ms^{-1} করতে কত কাজ করতে হবে ? কৃতকাজের সমতুল্য তাপ কত হবে ? [উঃ $4·2 \times 10^4$ J ও 10^4 cal]

১১। কত কাজের রূপান্তরিত তাপে 0°C তাপমাত্রার 0·01 kg বরফকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করা যাবে? [J = 4·2 জুল/ক্যালরি] [উঃ $30·11 \times 10^3$ জুল]

১২। 127°C তাপমাত্রায় কোন নির্দিষ্ট গ্যাস হঠাৎ প্রসারিত হয়ে দ্বিগুণ আয়তন লাভ করে। চূড়ান্ত তাপমাত্রা কত ? [$\gamma = 1·4$]। [ঢা. বো. ২০০৪] [উত্তর ঃ 303·14 K]

১৩। 0°C তাপমাত্রার এক খণ্ড বরফ কত উচ্চতা হতে অভিকর্ষের টানে পড়লে তা সম্পূর্ণরূপে গলে যাবে ? [ধর সমস্ত শক্তি তাপে পরিণত হয়েছে ও $L = 3·36 \times 10^5$ J kg^{-1}, $g = 9·8$ ms^{-2}] [উঃ $3·4 \times 10^4$ m]

১৪। কত উচ্চতা হতে একটি বরফের টুকরা অভিকর্ষের টানে পড়লে যে তাপ উৎপন্ন হবে তাতে বরফের 10% গলে যাবে ? এখানে ধর সমস্ত যান্ত্রিক শক্তি তাপে পরিণত হয়েছে। [উঃ 3428·57 m]

১৫। কোন সিস্টেম 1800J তাপ গ্রহণ করে 350 J কাজ সম্পাদন করে। সিস্টেমের অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 1450 J]

১৬। কোন একটি সিস্টেমে 6000 J তাপ দেওয়ায় সিস্টেমটি 400 J কাজ সম্পন্ন করে। এ প্রক্রিয়ায় সিস্টেমের অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন নির্ণয় কর। [উঃ 5·6 kJ]

১৭। 0·1 kg পানির তাপমাত্রা 20°C হতে বৃদ্ধি পেয়ে 36°C হওয়াতে পানির অভ্যন্তরীণ শক্তির পরিবর্তন কত হবে? [আয়তনের পরিবর্তন নগণ্য বিবেচনা কর। পানির আ. তাপ = 4200 J kg^{-1} K^{-1}] [উঃ 6·72 kJ]

১৮। 0°C-এর 0·01 kg বরফ 0°C এর পানিতে পরিণত হওয়ায় অভ্যন্তরীণ শক্তি কি পরিমাণ বৃদ্ধি পায় নির্ণয় কর। [আয়তনের পরিবর্তন খুবই নগণ্য বিবেচনা কর। বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = 336 kJ kg^{-1}] [উঃ 3·36 kJ]

১৯। একটি আদর্শ গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় সংনমিত করতে 42 J কাজ সম্পন্ন হয়। সংনমনকালে গ্যাস কত ক্যালরি তাপ হারায় ? [উঃ 10 cal]

২০। কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের জন্য স্থির আয়তনে ও স্থির চাপে মোলার আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। ($\gamma = 1·33$ এবং $R = 8·31$ J mol^{-1} K^{-1}) [উত্তর ঃ 25·18 J mol^{-1} K^{-1} ; 33·49 J mol^{-1} K^{-1}]

১৪

তাপ বিকিরণ

HEAT RADIATION

১৪.১ সূচনা

Introduction

তাপ এক প্রকার শক্তি যা গরম বা ঠাণ্ডার অনুভূতি জন্মায়।

তাপ উষ্ণতম স্থান হতে শীতলতম স্থানে গমন করে। একে তাপ সঞ্চালন বলে। তাপ সঞ্চালনের তিনটি পদ্ধতি রয়েছে। পদ্ধতিগুলো হল—

(১) **পরিবহণ** (Conduction), (২) **পরিচলন** (Convection) এবং (৩) **বিকিরণ** (Radiation)

যে প্রক্রিয়ায় তাপ কোন পদার্থের অপেক্ষাকৃত উষ্ণতম স্থান হতে শীতলতম স্থানে সঞ্চালিত হয়, অথচ পদার্থের উত্তপ্ত কণাগুলোর কোন স্থান পরিবর্তন হয় না, তাকে তাপের **পরিবহণ** বলে। কঠিন পদার্থের ক্ষেত্রে এটি সংঘটিত হয়। যে প্রক্রিয়ায় তাপ উত্তপ্ত কণাসমূহের স্থান পরিবর্তন দ্বারা বস্তুর উষ্ণতম স্থান হতে শীতলতম স্থানে সঞ্চালিত হয় তাকে তাপের **পরিচলন** বলে। তরল ও বায়বীয় পদার্থের ক্ষেত্রে এটা সংঘটিত হয়। পরিচলন ও পরিবহণ পদ্ধতিতে তাপ একস্থান হতে অন্যস্থানে গমনের জন্য মাধ্যমের প্রয়োজন হয় কিন্তু বিকিরণ প্রক্রিয়ায় তাপ সঞ্চালনে কোন মাধ্যমের প্রয়োজন হয় না। এ অধ্যায়ে আমরা বিকিরণ ও তার বৈশিষ্ট্য, কৃষ্ণবস্তু, বিকিরণের বিভিন্ন সূত্র, আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়, সবুজ ঘর ইত্যাদি আলোচনা করব।

১৪.২ তাপ বিকিরণ

আগুনের পাশে দাঁড়ালে অথবা উত্তপ্ত বস্তুর খানিকটা নিচে হাত রাখলে গরম অনুভূত হয়। এ স্থলে পরিচলন প্রক্রিয়ায় তাপ সঞ্চালিত হয় না। কারণ বায়ু উত্তপ্ত হলে হাল্কা হয়ে উপরে উঠে যাবে, নিচে নামবে না। অথচ আমরা গরম অনুভব করি। সুতরাং এখানে তাপ বিকিরণ প্রক্রিয়ায় সঞ্চালিত হচ্ছে। বিকিরণের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ যে প্রক্রিয়ায় তাপ কোন জড় পদার্থের সাহায্য ছাড়াই অপেক্ষাকৃত উষ্ণতম স্থান হতে শীতলতম স্থানে সঞ্চালিত হয়, তাকে বিকিরণ বলে। এই প্রক্রিয়ায় জড় মাধ্যম থাকলেও তাপ ঐ মাধ্যমের তাপমাত্রায় কোন পরিবর্তন ঘটায় না। বিকিরণ পদ্ধতিতে যে তাপ এক স্থান হতে অন্য স্থানে সঞ্চালিত হয়, তাকে **বিকীর্ণ তাপ** বলে।

সূর্য পৃথিবী হতে 1.5×10^8 কিলোমিটার দূরে অবস্থিত। এই বিশাল ব্যবধানের অধিকাংশ স্থানই ফাঁকা অর্থাৎ জড় মাধ্যমের কোন অস্তিত্ব নেই। অথচ সূর্য হতে সোয়া আট মিনিটে সৌর শক্তি পৃথিবীতে আসছে। বিকিরণ প্রক্রিয়ায় এটা সম্ভব হচ্ছে। বিকীর্ণ তাপ শক্তি ও আলোক শক্তির মধ্যে সাদৃশ্য রয়েছে। আর এই কারণেই সূর্য হতে তাপ ও আলোক একই সঙ্গে পৃথিবীতে পৌঁছায়। এই বিকীর্ণ শক্তির বেগ 3×10^8 মিটার/সে. বা 186000 মাইল/সে.। এটি বিদ্যুৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ (electro-magnetic wave)। এই মহাবিশ্বে বহু প্রকারের ও প্রকৃতির বিকীর্ণ শক্তি বিদ্যমান। এর মধ্যে **গামা রশ্মি** (γ-রশ্মি), **রঞ্জন রশ্মি** (x-রশ্মি), **অতিবেগুনি** (Ultra-violet) **রশ্মি**, **মহাজাগতিক রশ্মি** (Cosmic ray)—সবই বিকীর্ণ শক্তির অন্তর্ভুক্ত এবং এরা সকলেই বিদ্যুৎ চুম্বকীয় তরঙ্গ। এদের বৈশিষ্ট্যের পার্থক্য হল শুধু তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের।

বিকীর্ণ তাপ শক্তির বৈশিষ্ট্য (Characteristics of radiant heat energy)

বিকীর্ণ তাপ শক্তির নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য রয়েছে ঃ

১। বিকীর্ণ তাপ শক্তি শূন্য স্থানের মধ্য দিয়ে চলাচল করতে পারবে।

২। এটি আলোকের বেগে গমন করে।

৩। এটি কোন মাধ্যমের মধ্য দিয়ে গমন করলে মাধ্যমের তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটায় না, তবে কোন মাধ্যম বিকীর্ণ শক্তি শোষণ করলে এর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায়।

৪। বিকীর্ণ তাপ শক্তি বিপরীত বর্গীয় সূত্র মেনে চলে।

৫। আলোকের ন্যায় এটা প্রতিফলন ও প্রতিসরণের সূত্র মেনে চলে।

৬। এটা আলোকের ন্যায় ব্যতিচার, অপবর্তন ও সমবর্তন প্রভৃতি ঘটনা প্রদর্শন করে।

৭। বিকীর্ণ তাপ শক্তির পরিমাণ পারিপার্শ্বিক বস্তুর উপস্থিতি দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

৮। সূর্য গ্রহণের সময় বিকীর্ণ তাপ শক্তি পৃথিবীতে পৌঁছতে পারে না। এ কারণে সূর্যগ্রহণের সময় পৃথিবীর তাপমাত্রা হ্রাস পায়।

১৪·৩ আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু ও কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ
Perfect black body and black body radiation

আমরা জানি, বিকীর্ণ শক্তি যে কোন বস্তুর উপর আপতিত হলে তার কিছু অংশ বস্তু কর্তৃক প্রতিফলিত, কিছু অংশ শোষিত এবং অবশিষ্ট অংশ অপসৃত বা সংবাহিত হয়। যদি মোট আপতিত বিকীর্ণ শক্তির প্রতিফলিত (reflected) অংশকে 'r' দ্বারা, শোষিত (absorbed) অংশকে 'a' দ্বারা এবং অপসৃত (transmitted) অংশকে 't' দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে শক্তির নিত্যতা সূত্র হতে মোট বিকীর্ণ শক্তির ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি $r + a + t = 1$

যদি $r = 0$ এবং $t = 0$ হয়, তবে $a = 1$ অর্থাৎ আপতিত বিকীর্ণ শক্তির মোট অংশই বস্তু কর্তৃক শোষিত হয়েছে। অতএব আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর সংজ্ঞা হল নিম্নরূপ ঃ

সংজ্ঞা ঃ যে বস্তুর উপর আপতিত মোট বিকীর্ণ তাপ শক্তির সব অংশই বস্তু কর্তৃক শোষিত হয়, কোন অংশই প্রতিফলিত, অপসৃত বা সংবাহিত হয় না তাকে আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু বলে।

আবার তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের আলোকে বলা যায়—

যে বস্তু সকল তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকীর্ণ তাপ শক্তি শোষণ করে তাকে আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু বলে। যেহেতু আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু সব তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকীর্ণ তাপ শক্তিকে শোষণ করে সেহেতু তাকে উত্তপ্ত করলে তা সকল তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের তাপ শক্তিকে বিকিরণ করে। আলোকের মধ্যে রাখলে একে কালো দেখায়। কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতাকে E_λ দ্বারা সূচিত করা হয়।

কোন একটি আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুকে উত্তপ্ত করলে তা হতে সকল তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণ নিঃসৃত হয়। একে কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ বলে। এই নিঃসৃত বিকিরণ শক্তির প্রকৃতি কৃষ্ণ বস্তুর কোন বিশেষ ধর্মের উপর নির্ভর করে না। কেবল এবং কেবলমাত্র কৃষ্ণ বস্তুর তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে। কিন্তু বাস্তবে কোন বস্তুই সব তাপমাত্রায় সকল তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সমস্ত আপতিত বিকীর্ণ শক্তিকে সম্পূর্ণরূপে শোষণ করতে পারে না। সুতরাং **আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু কাল্পনিক। বাস্তবে এর কোন অস্তিত্ব নেই। আমরা কৃষ্ণ বস্তু হিসেবে যে সব বস্তুর কথা বিবেচনা করি তাদের কোনটিই আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু নয়। কিন্তু তাদের শোষণ ক্ষমতা 100%-এর কাছাকাছি বলে তাদেরকে কৃষ্ণ বস্তু বলে বিবেচনা করা হয়।** যেমন, ভূষাকালি (Lamp black) এবং কালো প্লাটিনাম (Platinum black) যথাক্রমে 96% এবং 90% আপতিত বিকিরণ শোষণ করতে পারে। 100% শোষণ ক্ষমতাবিশিষ্ট কোন কৃষ্ণ বস্তু অর্থাৎ আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু বাস্তবে পাওয়া সম্ভব নয়। বিভিন্ন পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গেছে যে, স্থির তাপমাত্রায় উত্তপ্ত কোন বেষ্টনীর অভ্যন্তরস্থ বিকিরণও কেবল তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে। সুতরাং বলা যায় যে, আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ স্থির তাপমাত্রায় উত্তপ্ত কোন বেষ্টনীর অভ্যন্তরস্থ বিকিরণের সদৃশ। এই কারণে স্থির তাপমাত্রায় উত্তপ্ত কোন বেষ্টনীর অভ্যন্তরস্থ বিকিরণকে কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ বলা হয়।

যে কোন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে কৃষ্ণ বস্তুর শোষণ করার ক্ষমতা যেমন সর্বাধিক তেমনি কোন নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় এবং যে কোন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রে তার বিকিরণ নিঃসরণ করার ক্ষমতাও সর্বাধিক। কাজেই কৃষ্ণ বস্তু কর্তৃক বিকিরণ বা স্থির তাপমাত্রায় উত্তপ্ত বেষ্টনীর অভ্যন্তরস্থ বিকিরণকে অনেক সময় পূর্ণ বিকিরণও (full or total radiation) বলা হয়।

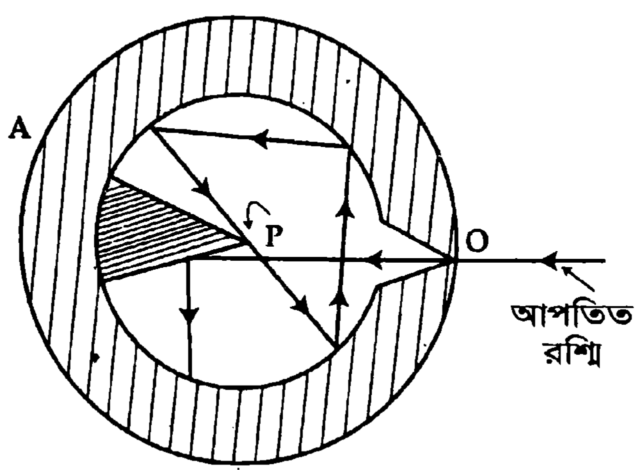
কৃষ্ণ বস্তুর প্রকারভেদ (Kinds of black body)

গঠন অনুসারে কৃষ্ণ বস্তু দুই প্রকারের ; যথা—

(১) **ফেরীর কৃষ্ণ বস্তু** (Ferry's black body) এবং (২) **উীন-এর কৃষ্ণ বস্তু** (Wien's black body)

মূলনীতির দিক হতে উভয়েই একই। তবে কর্ম দক্ষতার দিক দিয়ে উয়েন-এর কৃষ্ণ বস্তু উন্নত ধরনের। আধুনিক কালে এর ব্যবহার অধিক। তবে এখানে ফেরীর কৃষ্ণ বস্তু আলোচনা করা হল।

ফেরীর কৃষ্ণ বস্তু (Ferry's black body) : ফেরীর কৃষ্ণ বস্তুর বর্ণনা নিম্নে দেয়া হল। এটা দুই দেয়ালবিশিষ্ট একটি ফাঁপা গোলক। মনে করি গোলকটি A [চিত্র ১৪.১]। গোলকের ভিতরের দেয়ালে ভুষা কালির প্রলেপ থাকে এবং বাইরের দেয়ালটি নিকেল পালিশ করা থাকে। দুই দেয়ালের মধ্যবর্তী স্থান বায়ুশূন্য থাকে। ফলে পরিবহণ ও পরিচলন পদ্ধতিতে তাপ নষ্ট হতে পারে না। গোলকের একদিকে একটি সরু ছিদ্র আছে। মনে করি ছিদ্রটি O। ছিদ্রের ঠিক বিপরীত দিকের দেয়ালের কিছুটা অংশ শঙ্কু আকৃতির করা হয়। মনে করি এটি P। এতে আগত বিকীর্ণ তাপ সরাসরি প্রতিফলিত হয়ে বাইরে যেতে পারে না। O ছিদ্র পথে বিকিরণ সরাসরি গোলকের ভেতরে প্রবেশ করে। এই বিকিরণ ভেতরের দেয়ালে বার বার প্রতিফলিত হয় এবং অবশেষে শোষিত হয়। গোলকটিকে নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় উত্তপ্ত করলে ছিদ্র দিয়ে বিকিরণ নির্গত হয়। এই বিকিরণকে কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ বলে। এখানে উল্লেখ্য, কেবল ছিদ্র আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর ন্যায় আচরণ করে, গোলকের দেয়াল নয়।



চিত্র ১৪.১

১৪.৪ বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতা
Emissive power and absorptive power

কোন বস্তুকে উত্তপ্ত করা হলে, উক্ত বস্তু হতে তাপ বিকিরিত হয়। এই বিকিরিত তাপের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য সব ধরনের হতে পারে। বিকীর্ণ বা বিকিরিত তাপের প্রকৃতি নির্ভর করে বস্তুটির ভৌতিক অবস্থার উপর। বিভিন্ন পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হতে জানা গেছে যে, বিকীর্ণ তাপের পরিমাণ পাঁচটি শর্তের উপর নির্ভর করে, যথা—

(ক) উত্তপ্ত বস্তুর তাপমাত্রা, (খ) পারিপার্শ্বিক তাপমাত্রা, (গ) তরঙ্গ দৈর্ঘ্য, (ঘ) বিকিরণ তলের প্রকৃতি ও ক্ষেত্রফল এবং **(ঙ) সময়**

এখন আমরা বিকিরণ ক্ষমতা এবং শোষণ ক্ষমতার সংজ্ঞা দিব।

বিকিরণ ক্ষমতা :-নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন বিকিরক বস্তুর একক ক্ষেত্রফল একক সময়ে যে পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে এবং একই তাপমাত্রায় ও একই সময়ে একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু যে পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে, তাদের অনুপাতকে বিকিরণ ক্ষমতা বলে। একে E_λ দ্বারা সূচিত করা হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন বিকিরক একক সময়ের একক ক্ষেত্রফল হতে δH_1 পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে এবং ঐ তাপমাত্রায় একটি আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু একক সময়ে একক ক্ষেত্রফল হতে δH_2 পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে।

অতএব বিকিরণ ক্ষমতা

$$E_\lambda = \frac{\delta H_1}{\delta H_2} \tag{1}$$

শোষণ ক্ষমতা ঃ কোন নির্দিষ্ট সময়ে কোন বস্তু বিকীর্ণ তাপের যে পরিমাণ শোষণ করে এবং ঐ সময়ে বস্তুর উপর যে পরিমাণ বিকীর্ণ তাপ আপতিত হয়, তাদের অনুপাতকে শোষণ ক্ষমতা বলে। একে a_λ দ্বারা সূচিত করা হয়।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি নির্দিষ্ট সময়ে কোন বস্তু বিকীর্ণ তাপের δH_1 অংশ শোষণ করে এবং ঐ সময়ে বস্তুর উপর মোট δH_2 পরিমাণ বিকীর্ণ তাপ আপতিত হয়। অতএব শোষণ ক্ষমতা

$$a_\lambda = \frac{\delta H_1}{\delta H_2} \tag{2}$$

১৪.৫ স্টেফান-বোলজম্যান-এর সূত্র
Stefan-Boltzmann's law

1879 খ্রিস্টাব্দে অস্ট্রেলিয়ার পদার্থবিদ জোসেফ স্টেফান, ডুলং ও পেটিট, টিণ্ডাল প্রমুখ বিজ্ঞানীদের পরীক্ষালব্ধ ফলাফলের উপর ভিত্তি করে বিকিরণের একটি সূত্র প্রমাণ করেন। সূত্রটি নিম্নরূপ ঃ

"কোন উত্তপ্ত বস্তু হতে নিঃসৃত বিকীর্ণ তাপশক্তি বস্তুটির পরম তাপমাত্রা T-এর চতুর্থ ঘাতের সমানুপাতিক।"

1884 খ্রিস্টাব্দে বোলজম্যান তাপগতিবিদ্যার সাহায্যে স্টেফান সূত্রের তত্ত্বীয় প্রমাণ দেন এবং দেখান যে উপরোক্ত সূত্র একমাত্র আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু কর্তৃক নিঃসৃত বিকিরণের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য। এজন্য সূত্রটিকে স্টেফান-বোলজম্যান সূত্র বলা হয়। সূত্রটি নিম্নে বিবৃত হল ঃ

সূত্র ঃ কোন আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর একক ক্ষেত্রফল হতে প্রতি সেকেণ্ডে বিকীর্ণ তাপের পরিমাণ ঐ বস্তুর পরম তাপমাত্রার চতুর্থ ঘাতের সমানুপাতিক।

ব্যাখ্যা ঃ T পরম তাপমাত্রায় কোন আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর একক ক্ষেত্রফল হতে প্রতি সেকেণ্ডে বিকীর্ণ তাপের পরিমাণ E হলে, এই সূত্র অনুসারে,

$$E \propto T^4$$

বা $$E = \sigma T^4 \tag{3}$$

এখানে σ = সমানুপাতিক ধ্রুবক। একে স্টেফান-বোলজম্যান ধ্রুবক বলা হয়। এর মান $5{\cdot}67 \times 10^{-8}$ $Wm^{-2} K^{-4}$।

অনেক সময় এই সূত্রকে স্টেফান-এর সূত্র এবং ধ্রুবক σ-কে স্টেফানের ধ্রুবক বলা হয়।

আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর ক্ষেত্রফল যদি A হয়, তবে তা হতে প্রতি সেকেণ্ডে বিকীর্ণ তাপ শক্তির পরিমাণ হবে

$$E = A\sigma T^4 \tag{3a}$$

যদি T_1 K তাপমাত্রার কোন আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু T_2K তাপমাত্রার অপর একটি আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু দ্বারা আবৃত থাকে যেখানে $T_1 > T_2$, তবে প্রথম বস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফল হতে প্রতি সেকেণ্ডে হারান বিকীর্ণ শক্তির পরিমাণ

$$E = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \tag{4}$$

যদি আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর ক্ষেত্রফল A হয়, তবে প্রতি সেকেণ্ডে হারান বিকীর্ণ শক্তির পরিমাণ

$$E = A\sigma (T_1^4 - T_2^4) \qquad 4\,(a)$$

যদি বস্তুটি আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু না হয়, তবে সমীকরণ (3) এবং (4)-কে যথাক্রমে লেখা যায়

$$E = e\sigma T^4 \tag{5}$$

এবং $$E = e\sigma (T_1^4 - T_2^4) \tag{6}$$

এখানে e = আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর সাপেক্ষে বস্তুটির আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা। e-এর মান 0 (শূন্য) হতে 1 পর্যন্ত হতে পারে। কৃষ্ণ বস্তুর জন্য $e = 1$ এবং অন্য যে কোন বস্তুর ক্ষেত্রে e-এর মান 1 এর কম হবে।

আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা ঃ কোন বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা এবং একটি কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতার অনুপাতকে ঐ বস্তুর আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা বলে।

যদি বস্তুটির ক্ষেত্রফল A হয়, তবে সমীকরণ (5) এবং (6)-কে লেখা যায়,

$$E = eA\sigma T^4 \quad (7)$$

এবং $$E = eA\sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (8)$$

সৌর ধ্রুবক (Solar constant) : পৃথিবী পৃষ্ঠে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে প্রতি মিনিটে এবং তলের অভিলম্বভাবে যে পরিমাণ সৌরশক্তি আপতিত হয় তাকে সৌর ধ্রুবক বলে।

সূর্যের কেন্দ্রস্থলে অত্যন্ত উত্তপ্ত আলোকমণ্ডল রয়েছে। এই আলোকমণ্ডলের তাপমাত্রাকে সৌর তাপমাত্রা বলে। আলোকমণ্ডলকে যদি কৃষ্ণ বস্তু কল্পনা করা হয় এবং ব্যাসার্ধ R ও তাপমাত্রা T ধরা হয়, তবে স্টেফানের সূত্রানুসারে প্রতি মিনিটে বিকীর্ণ শক্তি,

$$E = A\sigma T^4 \times 60$$
$$= 4\pi R^2 \sigma T^4 \times 60$$

সূর্য হতে পৃথিবীর গড় দূরত্বকে ব্যাসার্ধ r ধরে একটি গোলক বিবেচনা করলে গোলকের ক্ষেত্রফল $4\pi r^2$ হবে এবং ঐ বিকীর্ণ শক্তি গোলকে লম্বভাবে আপতিত হবে। সুতরাং গোলকের একক ক্ষেত্রফলে আপতিত বিকীর্ণ শক্তি,

$$\boxed{S} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4 \times 60}{4\pi r^2}$$
$$= \sigma T^4 \times \left(\frac{R}{r}\right)^2 \times 60$$

S-ই হল সৌর ধ্রুবক।

১৪·৬ নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র
Newton's law of cooling

পরিপার্শ্বের তুলনায় উত্তপ্ত বস্তু ক্রমাগত তাপ বিকিরণ করে পরিপার্শ্বের তাপমাত্রার সমান হয়। নিউটন প্রথম উত্তপ্ত বস্তুর তাপ হ্রাসের হার এবং বস্তুর তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করেন। এটি নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র নামে পরিচিত।

সূত্র : বিকিরণের ফলে কোন উত্তপ্ত বস্তু যে হারে তাপ হারায় তা ঐ বস্তুর তাপমাত্রা ও পরিপার্শ্বের তাপমাত্রার পার্থক্যের সমানুপাতিক। নিউটনের সূত্রটি অল্প তাপমাত্রার পার্থক্যের জন্য প্রযোজ্য।

নিউটনের সূত্র অনুসারে উত্তপ্ত বস্তু হতে তাপ হ্রাসের হার $\frac{dQ}{dt}$ হলে লেখা যায়,

$$-\frac{dQ}{dt} \propto (\theta_1 - \theta_2)$$

বা, $$-\frac{dQ}{dt} = K(\theta_1 - \theta_2) \quad (9)$$

সমীকরণ (9)-এ θ_1 ও θ_2 হল যথাক্রমে বস্তুর ও পরিপার্শ্বের তাপমাত্রা এবং K সমানুপাতিক ধ্রুবক। K-এর মান বস্তুর পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল এবং প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। সমীকরণে বাম পার্শ্বের ঋণাত্মক চিহ্ন বস্তু তাপ হারায় নির্দেশ করে।

সমীকরণ (9) হতে বস্তুর তাপমাত্রা হ্রাসের হার নির্ধারণ করা যায়। ধরা যাক, বস্তুর ভর m এবং আপেক্ষিক তাপ s এবং dt সময়ে বস্তুর তাপমাত্রা $d\theta$ হ্রাস পায়, তাহলে বস্তু কর্তৃক বর্জিত তাপ,

$$\frac{dQ}{dt} = ms\frac{d\theta}{dt}$$

সুতরাং, সমীকরণ (9)-এর পরিবর্তে লেখা যায়,

$$-ms\frac{d\theta}{dt} = K(\theta_1 - \theta_2)$$

বা, $-\frac{d\theta}{dt} = \frac{K}{ms}(\theta_1 - \theta_2)$

এখন, m ও s উভয়ই ধ্রুবক। সুতরাং $\frac{K}{ms}$ = ধ্রুবক। নিউটনের শীতলীকরণের সূত্র

অতএব, $\boxed{-\frac{d\theta}{dt} \propto (\theta_1 - \theta_2)}$ নিউটনের ... (10)

অর্থাৎ, ক্রমাগত বিকিরণের ফলে কোন উত্তপ্ত বস্তুর তাপমাত্রা হ্রাসের হার অর্থাৎ শীতলীকরণের হার বস্তু এবং পরিপার্শ্বের তাপমাত্রার পার্থক্যের সমানুপাতিক। এ কারণেই এই সূত্রকে নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র বলা হয়।

১৪.৭ স্টেফানের সূত্র হতে নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র প্রতিপাদন

Derivation of Newtons' law of cooling from Stefan's law

স্টেফানের সূত্র হতে নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র পাওয়া যায়। স্টেফানের সূত্র থেকে আমরা জানি, T_1 পরম তাপমাত্রার একটি উত্তপ্ত বস্তু T_2 তাপমাত্রার একটি বেষ্টনীর দ্বারা বেষ্টিত হলে বস্তু হতে বিকিরণের জন্য প্রতি সেকেন্ডে তাপ হ্রাসের পরিমাণ,

$$E = \sigma(T_1^4 - T_2^4) = \sigma(T_1^2 - T_2^2)(T_1^2 + T_2^2)$$

$$= \sigma(T_1 - T_2)(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2)$$

$$= \sigma(T_1 - T_2)(T_1^3 + T_1T_2^2 + T_2T_1^2 + T_2^3)$$

তাপমাত্রার পার্থক্য $(T_1 - T_2)$ খুব সামান্য হলে আমরা T_1 ও T_2-এর মান প্রায় সমান ধরতে পারি। সেক্ষেত্রে $T_1T_2^2 = T_2^3$; $T_2T_1^2 = T_2^3$ এবং $T_1^3 = T_2^3$ লেখা যায়। সুতরাং,

$$E = \sigma(T_1 - T_2)\,4T_2^3$$

$$= 4\sigma T_2^3(T_1 - T_2)$$

যদি বেষ্টনীর তাপমাত্রা T_2 স্থির রাখা হয়, তবে $4\sigma T_2^3 = A$ ধরে উপরের সমীকরণ লেখা যায়,

$E = A(T_1 - T_2)$ [$\because A$ = ধ্রুবক]

$\boxed{\therefore E \propto (T_1 - T_2)}$ (11)

সমীকরণ (11) হতে দেখা যায় যে, তাপমাত্রার পার্থক্য সামান্য হলে বস্তুর তাপ বর্জনের হার অর্থাৎ শীতলীকরণের হার উষ্ণ বস্তু ও পরিপার্শ্বের (বেষ্টনীর) তাপমাত্রার পার্থক্যের সমানুপাতিক।

এটিই নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র।

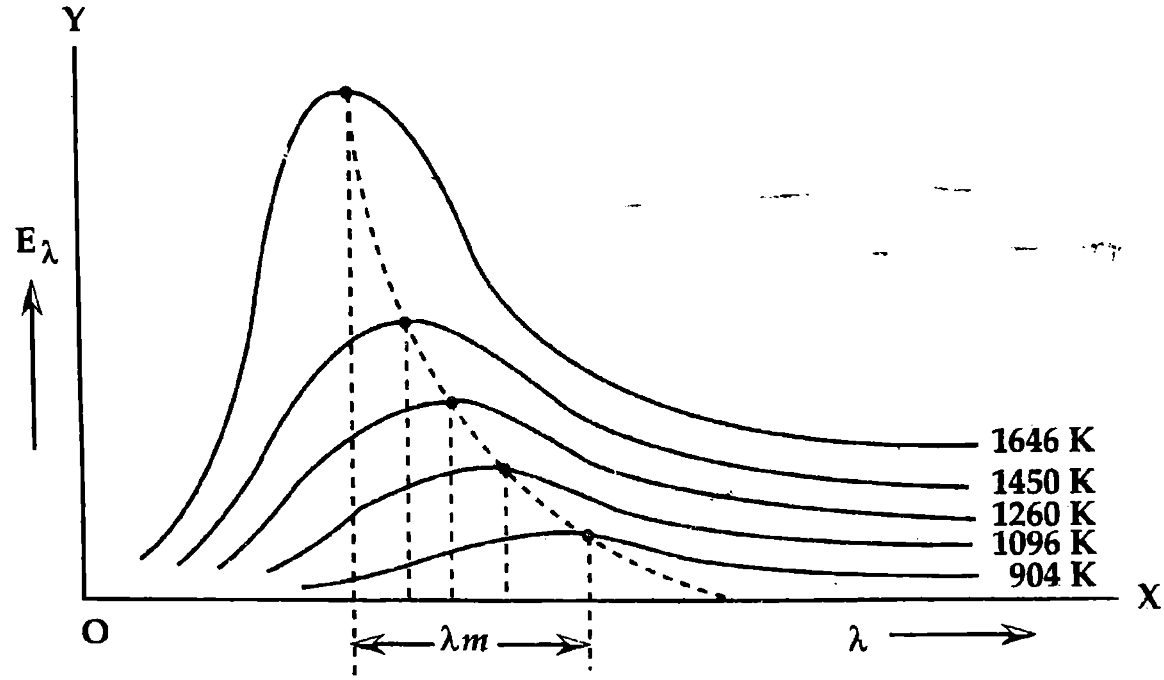
১৪.৮ আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুর বিকীর্ণ বর্ণালীতে শক্তির বণ্টন

Energy distribution in the spectrum of black body radiation

বিজ্ঞানী ~~লুমার (Lummer)~~ এবং প্রিঙসিম (Pringsheim) কৃষ্ণ বস্তুর বর্ণালীতে বিভিন্ন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের জন্য শক্তি বণ্টন সম্পর্কিত অনেক পরীক্ষা-নিরীক্ষা করেন। তাঁরা দেখান যে, বিকীর্ণ শক্তির পরিমাণ সব তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সমান নয়। এরূপ একটি কৃষ্ণ বস্তুকে উত্তপ্ত করলে দেখা যায় তা প্রথমে লাল, তারপর কমলা, হলুদ, বেগুনী (violet) এবং শেষে সাদা রঙের আলোক নির্গত করে। অর্থাৎ তাপমাত্রা যতই বাড়তে থাকে সর্বাধিক বিকীর্ণ তাপের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য ততই ক্ষুদ্র তরঙ্গ দৈর্ঘ্য প্রাপ্তির দিকে অগ্রসর হয়। এই নিয়মকে কাজে লাগিয়ে পরবর্তীতে বিজ্ঞানী উইন (Wien) দুটি মূল্যবান সূত্র প্রদান করেন। লুমার ও প্রিঙসিমের পরীক্ষালব্ধ ফলাফল $(\lambda - E_\lambda)$ লেখচিত্রের

BG & JEWEL

সাহায্যে দেখানো হল [চিত্র ১৪'২]। চিত্রে X অক্ষে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ এবং Y অক্ষে বিকিরণ ক্ষমতা E_λ নির্দেশ করা হয়েছে।



চিত্র ১৪'২

উপরের লেখচিত্র হতে নিম্নের সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় ঃ

(i) একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় বিকিরণ বর্ণালীতে শক্তি বণ্টন সুষম হয় না।

(ii) তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সাথে সাথে E_λ বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং একটি চরম মান প্রাপ্ত হয়। তরঙ্গ দৈর্ঘ্য আরও বৃদ্ধি পেলে E_λ ক্রমশ কমতে থাকে।

(iii) সব তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের জন্য তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে সাথে E_λ বৃদ্ধি পায়।

(iv) তাপমাত্রা বৃদ্ধির সাথে সাথে সর্বাধিক শক্তি নিঃসরণের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (λ_m) হ্রাস পায়।

(v) λ_m এবং পরম তাপমাত্রা T এর মধ্যে নিম্নরূপ সম্পর্ক পাওয়া যায় ঃ

$\lambda_m T =$ ধ্রুব সংখ্যা

১৪'৯ ভীন-এর সূত্র
Wien's law

বিশিষ্ট জার্মান পদার্থবিদ ভীন 1896 খ্রিস্টাব্দে তাপগতিবিদ্যার তত্ত্ব প্রয়োগ করে কৃষ্ণ বস্তুর বর্ণালীতে বিভিন্ন তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের জন্য শক্তি বণ্টন বিষয়ক দুটি সূত্র প্রদান করেন। তাদের প্রথমটিকে **ভীন-এর সরণ সূত্র** (Wien's displacement law) এবং দ্বিতীয়টিকে **ভীন-এর পঞ্চঘাত সূত্র** (Wien's fifth power law) বলা হয়।

সরণ সূত্র ঃ কৃষ্ণ বস্তু থেকে সর্বাধিক বিকীর্ণ শক্তির জন্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্য কৃষ্ণ বস্তুর পরম তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক।

ব্যাখ্যা ঃ যদি কৃষ্ণ বস্তু থেকে সর্বাধিক বিকীর্ণ শক্তির জন্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_m এবং পরম তাপমাত্রা TK হয় তবে,

$$\lambda_m \propto \frac{1}{T}$$

বা, $\lambda_m \times T =$ ধ্রুব সংখ্যা (12)

এখানে, $\lambda_m =$ সর্বাধিক শক্তির জন্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্য। এই ধ্রুবক সংখ্যার মান 28.98×10^{-4} mK

ভীন-এর সূত্রানুসারে তাপমাত্রা T বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_m হ্রাস পায় অর্থাৎ নিঃসৃত বিকীর্ণ শক্তির পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। সুতরাং কৃষ্ণ বস্তুর শক্তির নিঃসরণ সর্বাধিক মানের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য হতে সর্বনিম্ন মানের তরঙ্গ

দৈর্ঘ্যের অভিমুখে সংঘটিত হয় [চিত্র ১৪.২]। শক্তির সরণ দীর্ঘতর তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের দিক হতে ক্ষুদ্রতর তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের দিকে ঘটে ; এজন্য এই সূত্রটিকে ভীন-এর সরণ সূত্র বলে। এই সূত্র লুমার ও প্রিঙসিম-এর পরীক্ষালব্ধ ফলাফলের সংগে সংগতিপূর্ণ [চিত্র ১৪.২]

বণ্টন সূত্র বা পঞ্চঘাত সূত্র ঃ সর্বাধিক শক্তি ঘনত্ব বা কৃষ্ণ বস্তুর সর্বাধিক বিকিরণ ক্ষমতা তার পরম তাপমাত্রার পঞ্চঘাতের সমানুপাতিক। অর্থাৎ ভীনের সূত্র

$$E_m \propto T^5$$

বা, $\frac{E_m}{T^5}$ = ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যার মান $\boxed{28.98 \times 10^{-4}\ \mathrm{mK}}$ 2.898×10^{-3} mK

১৪.১০ গ্রীন হাউজ বা সবুজ ঘর
Green house

গ্রীন হাউজ বা সবুজ ঘর এক ধরনের কাচের তৈরি ঘর যেখানে একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রা বজায় রেখে শাক-সব্জি, উদ্ভিদ ইত্যাদি উৎপাদন ও সংরক্ষণ করা হয়। এরূপ ঘরকে গ্রীন হাউজ বা সবুজ ঘর বলে। নিচে ভীনের সূত্রের সাহায্যে গ্রীন হাউজ প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা করা হল।

ভীনের সূত্র অনুসারে আমরা জানি $\lambda_m \propto \frac{1}{T}$, অর্থাৎ তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে উত্তপ্ত বস্তু হতে নিঃসৃত তরঙ্গদৈর্ঘ্য হ্রাস পায়; আবার তাপমাত্রা হ্রাস পেলে নিঃসৃত তরঙ্গদৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায়। কাচের ধর্ম হল এর ভেতর দিয়ে অপেক্ষাকৃত ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্যের তাপ সহজে চলাচল করতে পারে ; কিন্তু দীর্ঘ দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ বাধাপ্রাপ্ত হয়। সূর্য উত্তপ্ত অবস্থায় তাপ বিকিরণ করে, ফলে T বেশি হওয়ায় λ_m ক্ষুদ্র হয়। ফলে ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ কাচের ভিতর দিয়ে প্রবেশ করে ভিতরের গাছপালা, শাক-সবজি ইত্যাদিকে গরম করে। কিন্তু কাচের ঘরের ভিতরের গাছপালা, মাটি ইত্যাদি যখন তাপ বিকিরণ করে তখন ভিতরের তাপমাত্রা কম থাকায় নিঃসৃত তরঙ্গ দৈর্ঘ্য দীর্ঘ হয়, ফলে কাচের ভিতর দিয়ে বেরিয়ে আসতে পারে না বলে গ্রীন হাউজের ভিতর যথেষ্ট গরম থাকে। এই কারণে গ্রীন হাউজের ভিতর গাছপালা, উদ্ভিদ, শাক-সব্জি ইত্যাদি উৎপাদন ও সংরক্ষণ সহজ হয়।

আমাদের এই পৃথিবীতে গ্রীন হাউজ ক্রিয়া সংঘটিত হচ্ছে বলে পৃথিবীর তাপমাত্রা খুবই ধীরে ধীরে বৃদ্ধি পাচ্ছে। এর কারণ নিম্নরূপ ঃ

প্রতিদিন কল-কারখানা থেকে প্রচুর পরিমাণে কার্বন ডাই-অক্সাইড নির্গত হচ্ছে এবং গাছপালা নির্বিচারে নিধনের ফলে প্রকৃতিতে কার্বন ডাই-অক্সাইডের পরিমাণ বেড়ে যাচ্ছে। এই CO_2 অনেকটা গ্রীন হাউজের কাচের মত কাজ করে। কার্বন ডাই-অক্সাইড (CO_2)-এর ধর্ম হল এর ভিতর দিয়ে ক্ষুদ্র তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণ সহজে চলাচল করতে পারে ; কিন্তু দীর্ঘ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণ তা পারে না। এখন সূর্যের তাপমাত্রা বেশি থাকায় ক্ষুদ্র দৈর্ঘ্যের বিকিরণ বায়ুমণ্ডলে পৃথিবী দ্বারা শোষিত হয়, ফলে পৃথিবী উত্তপ্ত হয়। পৃথিবী যখন পুনরায় তাপ বিকিরণ করে তখন তাপমাত্রা কম থাকায় নিঃসৃত বিকিরণের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (ভীনের সূত্র অনুসারে) দীর্ঘ হয় যা কার্বন ডাই-অক্সাইড কর্তৃক বাধাপ্রাপ্ত হয়, ফলে গ্রীন হাউজ ক্রিয়া সংঘটিত হয় এবং পৃথিবীর তাপমাত্রা খুব সামান্য হলেও বৃদ্ধি পায়। এই ক্রিয়া অব্যাহত রয়েছে এবং পৃথিবীর দীর্ঘমেয়াদী উষ্ণায়ন চলছে। একে **উষ্ণায়নের তত্ত্ব** হিসেবে অভিহিত করা হয়েছে। পৃথিবীর তাপমাত্রা বৃদ্ধির ফলে মেরু অঞ্চলের জমাট বাধা বরফ আস্তে আস্তে গলতে শুরু করবে যা সমুদ্রের পানির উচ্চতা বৃদ্ধি করবে। এতে বাংলাদেশের মত অনেক দেশের বিরাট উপকূল অঞ্চল তলিয়ে যাওয়ার যথেষ্ট সম্ভাবনা রয়েছে। পৃথিবীর এই উষ্ণায়ন বন্ধ না হলে বাংলাদেশের সমূহ বিপদ হতে পারে।

১৪.১১ তরল পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়
Determination of specific heat of liquids

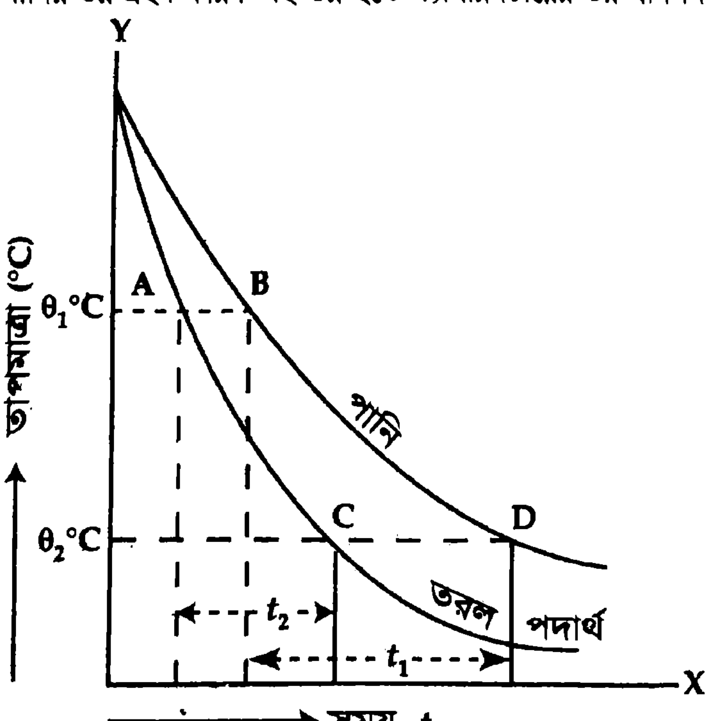
শীতলীকরণ প্রণালী (Method of cooling) : এই প্রণালী তরল পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য—কঠিন পদার্থ বা গ্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়। কারণ আলোড়ক দ্বারা নেড়ে কঠিন পদার্থ বা গ্যাসের তাপমাত্রা সর্বত্র সমান রাখা যায় না। প্রণালীটি নিউটনের শীতলীকরণ সূত্রের উপর প্রতিষ্ঠিত।

সূত্রটি হল, **"কোন বস্তুর তাপ বর্জনের হার বস্তু এবং তার পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রার পার্থক্যের সমানুপাতিক।"** যদি কোন গরম তরল পদার্থকে তার পরিপার্শ্বের সাপেক্ষে অধিক তাপমাত্রায় রাখা হয়, তা হলে উক্ত তরল পদার্থের তাপ হারানোর হার বা তাপ বর্জনের হার নিম্নলিখিত শর্তের উপর নির্ভর করে :

(১) তরল পদার্থের তাপমাত্রা
(২) পারিপার্শ্বিকের তাপমাত্রা
(৩) আধারের প্রকৃতি এবং আকৃতি
(৪) তরলের উন্মুক্ত তলের ক্ষেত্রফল এবং
(৫) পাত্রের দেয়ালের ক্ষেত্রফল।

তরল পদার্থের তাপ বর্জনের হার তার প্রকৃতির উপর নির্ভর করে না। কাজেই **একই পরিবেশে বিভিন্ন তরল পদার্থকে যদি একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রা হতে অপর একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রা পর্যন্ত শীতল হতে দেয়া হয় তা হলে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই তাপ বর্জনের হার সমান হবে। এটি শীতলীকরণ প্রণালীর মূলনীতি। তরলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ে এ নীতি প্রয়োগ করা হয়।**

কার্যপ্রণালী : প্রথমে আলোড়কসহ একটি পরিষ্কার ও শুষ্ক ক্যালরিমিটারের ভর নির্ণয় করি। অতঃপর ক্যালরিমিটারের একটি নির্দিষ্ট আয়তন পর্যন্ত ঘরের তাপমাত্রা হতে প্রায় 25°C অথবা 30°C উচ্চ তাপমাত্রার পানিতে ভর্তি করে তাকে রেনোর তাপক্ষয় নিরোধক প্রকোষ্ঠের ভেতর রাখি। এর পর আলোড়ক দ্বারা পানি আস্তে আস্তে নাড়তে থাকি ও এক মিনিট অন্তর অন্তর পানির তাপমাত্রা গ্রহণ করি। পানির তাপমাত্রা ঘরের তাপমাত্রা অপেক্ষা বেশি হওয়ায় তা ক্রমশ তাপ হারিয়ে শীতল হবে। শীতল হয়ে পানির তাপমাত্রা ঘরের তাপমাত্রায় পৌঁছলে ক্যালরিমিটারসহ পানির ভর গ্রহণ করি। এই ভর হতে ক্যালরিমিটারের ভর বাদ দিলে পানির ভর পাওয়া যায়।



চিত্র ১৪.৩

এখন ক্যালরিমিটার হতে পানি ফেলে দিয়ে তাকে পরিষ্কার ও শুষ্ক করে ঘরের তাপমাত্রা হতে 25°C অথবা 30°C উচ্চ তাপমাত্রার পরীক্ষাধীন তরল পদার্থ দ্বারা পূর্বের আয়তন পর্যন্ত পূর্ণ করি। এর পর ক্যালরিমিটারটিকে রেনোর তাপক্ষয় নিরোধক প্রকোষ্ঠে রেখে তরল পদার্থকে আস্তে আস্তে নাড়তে থাকি এবং এক মিনিট অন্তর অন্তর তাদের তাপমাত্রা গ্রহণ করি। পরিশেষে তরল পদার্থ ঘরের তাপমাত্রায় পৌঁছলে তাদের ভর নির্ণয় করি। এই ভর হতে ক্যালরিমিটারের ভর বাদ দিলে তরল পদার্থের ভর পাওয়া যায়।

এখন একটি ছক কাগজে তরল পদার্থ ও পানির জন্য দুটি সময়-তাপমাত্রা লেখচিত্র অঙ্কন করি [চিত্র ১৪.৩]। অঙ্কিত লেখচিত্র দুটি হতে তরল পদার্থ ও পানির কোন একটি তাপমাত্রা θ_1°C হতে অপর একটি তাপমাত্রা θ_2°C পর্যন্ত শীতল হতে কত সময় প্রয়োজন হয় তা নির্ণয় কর।

চিত্রে θ_1°C ও θ_2°C তাপমাত্রায় সময়-অক্ষের সমান্তরালে দুটি সরলরেখা AB ও CD টেনে দেখানো হয়েছে যে, θ_1°C হতে θ_2°C পর্যন্ত শীতল হতে পানির t_1 সেকেন্ড এবং তরল পদার্থের t_2 সেকেন্ড সময় প্রয়োজন হয়েছে।

হিসাব এবং গণনা ঃ ধরা যাক, আলোড়কসহ ক্যালরিমিটারের ভর $= m_1$ kg

ক্যালরিমিটারের আপেক্ষিক তাপ $= S_1 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

ব্যবহৃত পানির ভর $= m_2$ kg

ব্যবহৃত তরল পদার্থের ভর = M kg

পানির আপেক্ষিক তাপ $= S_2 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

এবং তরল পদার্থের আপেক্ষিক তাপ $= S \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

তা হলে, t_1 সেকেন্ডে পানি ও ক্যালরিমিটার কর্তৃক বর্জিত তাপ

$$= \{m_1 S_1 (\theta_1 - \theta_2) + m_2 S_2 (\theta_1 - \theta_2)\} \text{J} = (m_1 S_1 + m_2 S_2)(\theta_1 - \theta_2) \text{ J}$$

পানি ও ক্যালরিমিটারের শীতলতার হার

$$= \frac{(m_1 S_1 + m_2 S_2)(\theta_1 - \theta_2)}{t_1} \text{ J s}^{-1}$$

আবার t_2 সেকেন্ডে তরল পদার্থ ও ক্যালরিমিটার কর্তৃক বর্জিত তাপ

$$= \{\text{MS}(\theta_1 - \theta_2) + m_1 S_1 (\theta_1 - \theta_2)\} \text{ J} = (\text{MS} + m_1 S_1)(\theta_1 - \theta_2) \text{ J}$$

তরল পদার্থ ও ক্যালরিমিটারের শীতলতার হার

$$= \frac{(\text{MS} + m_1 S_1)(\theta_1 - \theta_2)}{t_2} \text{ Js}^{-1}$$

কিন্তু বর্ণনা অনুসারে শীতলতার হার দুটি সমান হবে।

$$\frac{(\text{MS} + m_1 S_1)(\theta_1 - \theta_2)}{t_2} = \frac{(m_1 S_1 + m_2 S_2)(\theta_1 - \theta_2)}{t_1}$$

অথবা, $\dfrac{\text{MS} + m_1 S_1}{t_2} = \dfrac{m_1 S_1 + m_2 S_2}{t_1}$

নির্ণেয় আপেক্ষিক তাপ, $S = \dfrac{1}{M}\left\{\dfrac{t_2}{t_1}(m_1 S_1 + m_2 S_2) - m_1 S_1\right\} \text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ (13)

১৪.১২ বিকিরণ ও শোষণজনিত কয়েকটি সাধারণ ঘটনা
Some common phenomena relating radiation and absorption

(ক) মরু অঞ্চলে দিনে তীব্র গরম এবং রাত্রিতে খুব ঠান্ডা পড়ে।

মরুভূমির বায়ু শুষ্ক হওয়ায় ঐ বায়ু স্বচ্ছ পদার্থের ন্যায় ক্রিয়া করে। এজন্য দিনের বেলা সূর্যের বিকীর্ণ তাপ অতি সহজে বায়ুমন্ডলের ভেতর দিয়ে ভূ-পৃষ্ঠে সঞ্চালিত হয় এবং এতে ভূ-পৃষ্ঠ খুব উত্তপ্ত হয়। রাত্রিতে ভূ-পৃষ্ঠ তাপ বিকিরণ করে। শুষ্ক বায়ুর মধ্য দিয়ে এই তাপ সহজেই বায়ুমন্ডল ভেদ করে চলে যেতে পারে। ফলে ভূ-পৃষ্ঠ অত্যধিক শীতল হয়। এজন্য মরু অঞ্চলে দিনে তীব্র গরম এবং রাত্রিতে ভীষণ শীত পড়ে।

(খ) মেঘলা রাত্রি মেঘহীন রাত্রি অপেক্ষা অধিকতর গরম।

দিবাভাগে ভূ-পৃষ্ঠ তাপ শোষণ করে এবং রাত্রিকালে বায়ুমন্ডল শীতল হলে ভূ-পৃষ্ঠ এই তাপ বিকিরণ করে।

মেঘলা রাত্রে ভূ-পৃষ্ঠের বিকীর্ণ তাপ মেঘের মধ্য দিয়ে ঊর্ধ্বাকাশে যেতে পারে না, উপরন্তু এই বিকীর্ণ তাপ মেঘে প্রতিফলিত হয়ে ভূ-পৃষ্ঠে ফিরে আসে, পক্ষান্তরে মেঘহীন রাত্রিতে ভূ-পৃষ্ঠ হতে বিকীর্ণ তাপ বাইরে চলে যায় এবং ভূ-পৃষ্ঠ শীতল হয়। এ কারণে মেঘলা রাত্রিতে মেঘহীন রাত্রি অপেক্ষা অধিকতর গরম অনুভূত হয়।

(গ) অগ্নিকুণ্ডের পার্শ্ববর্তী কোন স্থান অপেক্ষা অগ্নিকুণ্ড হতে একই দূরত্বে এর ঠিক উপরের কোন স্থান বেশি উত্তপ্ত হয়।

অগ্নিকুণ্ড হতে এর ঠিক উপরের কোন স্থানে অগ্নিকুণ্ডের তাপ পরিচলন ও বিকিরণ উভয় প্রক্রিয়ায় সঞ্চালিত হয়; কিন্তু অগ্নিকুণ্ডের পার্শ্ববর্তী স্থানে তাপ শুধু বিকিরণ প্রক্রিয়ায় সঞ্চালিত হয়ে থাকে। এজন্য অগ্নিকুণ্ডের পার্শ্ববর্তী কোন স্থান অপেক্ষা অগ্নিকুণ্ড হতে সমান দূরত্বে এর ঠিক উপরের কোন স্থানে বেশি তাপ সঞ্চালিত হয় এবং ঐ স্থান বেশি উত্তপ্ত হয়।

(ঘ) চায়ের কাপের বাইরের পৃষ্ঠ পালিশ করা থাকলে এতে চা অনেকক্ষণ গরম থাকে।

পালিশ করা পৃষ্ঠের তাপ বিকিরণ করার ক্ষমতা কম। এজন্য পালিশ করা কাপে চায়ের তাপ বিকীর্ণ হয় কম এবং চা অনেকক্ষণ গরম থাকে।

(ঙ) নতুন কালিশূন্য পাত্র অপেক্ষা কালিমাখা পুরাতন পাত্রে পানি তাড়াতাড়ি ফুটান যায়।

নতুন মসৃণ ও উজ্জ্বল কালিশূন্য পাত্র অপেক্ষা পুরাতন কালিমাখা পাত্রের তাপ শোষণ করার ক্ষমতা বেশি। ফলে কালিশূন্য পাত্র অপেক্ষা কালিমাখা পাত্র তাড়াতাড়ি গরম হয় এবং পাত্রের পানি তাড়াতাড়ি ফুটান যায়।

(চ) গ্রীষ্মকালের সাদা জামা ব্যবহার আরামপ্রদ।

সাদা বস্তুর তাপ শোষণ করার ক্ষমতা খুব কম। এজন্য সূর্য হতে যে তাপ জামার উপর পড়ে তার বেশির ভাগই প্রতিফলিত হয় এবং সামান্য অংশই শোষিত হয়ে জামার তাপমাত্রা সামান্যই বৃদ্ধি করে। এই কারণে গ্রীষ্মকালে সাদা জামা ব্যবহার করা আরামপ্রদ হয়।

স্মরণিকা

বিকিরণ ঃ যে প্রক্রিয়ায় তাপ কোন জড় পদার্থের সাহায্য ছাড়াই অপেক্ষাকৃত উষ্ণতর স্থান হতে শীতলতম স্থানে সঞ্চালিত হয় তাকে বিকিরণ বলে।

আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু ঃ যে বস্তুর উপর আপতিত মোট বিকীর্ণ তাপ শক্তির সব অংশই বস্তু কর্তৃক শোষিত হয়, কোন অংশই প্রতিফলিত হয় না, তাকে আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু বলে।

কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ ঃ কোন একটি আদর্শ কৃষ্ণ বস্তুকে উত্তপ্ত করলে বস্তু হতে সব তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের বিকিরণ নিঃসৃত হয়। একে কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ বলে।

বিকিরণ ক্ষমতা ঃ নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন বিকিরক বস্তুর একক ক্ষেত্রফল একক সময়ে যে পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে এবং একই তাপমাত্রায় ও একই সময়ে একক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু যে পরিমাণ তাপ বিকিরণ করে তাদের অনুপাতকে বিকিরণ ক্ষমতা বলে। একে E_λ দ্বারা সূচিত করা হয়।

শোষণ ক্ষমতা ঃ কোন নির্দিষ্ট সময়ে কোন বস্তু বিকীর্ণ তাপের যে পরিমাণ শোষণ করে এবং ঐ সময়ে বস্তুর উপর যে পরিমাণ বিকীর্ণ তাপ আপতিত হয় তাদের অনুপাতকে শোষণ ক্ষমতা বলে। একে a_λ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সৌর ধ্রুবক ঃ পৃথিবী পৃষ্ঠে প্রতি একক ক্ষেত্রফলে প্রতি মিনিটে এবং তলের অভিলম্বভাবে যে পরিমাণ সৌর শক্তি আপতিত হয় তাকে সৌর ধ্রুবক বলে।

নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র ঃ বিকিরণের ফলে কোন উত্তপ্ত বস্তু যে হারে তাপ হারায় তা ঐ বস্তুর তাপমাত্রা ও পরিপার্শ্বের তাপমাত্রার পার্থক্যের সমানুপাতিক। অল্প তাপমাত্রার পার্থক্যের জন্য এ সূত্র প্রযোজ্য।

ভীনের সূত্র ঃ

সরণ সূত্রঃ কৃষ্ণ বস্তু থেকে সর্বাধিক বিকীর্ণ শক্তির জন্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (λ_m) কৃষ্ণ বস্তুর পরম তাপমাত্রার ব্যস্তানুপাতিক।

$$\therefore \lambda_m \times T = \text{ধ্রুব}$$ $= 28.98 \times 10^{-4}$ Wm

পঞ্চঘাত সূত্র ঃ সর্বাধিক শক্তি ঘনত্ব (E_m) যা কৃষ্ণ বস্তুর সর্বাধিক বিকিরণ ক্ষমতা তার পরম তাপমাত্রার পঞ্চঘাতের সমানুপাতিক।

$$\therefore \frac{E_m}{T^5} = \text{ধ্রুবক।}$$ $= 28.98 \times 10^{-4}$ Wm

স্টেফান-বোল্‌জম্যান-এর সূত্র ঃ কৃষ্ণ বস্তুর পূর্ণ বিকিরণের শক্তি ঘনত্ব বস্তুর পরম তাপমাত্রার চতুর্থ ঘাতের সমানুপাতিক। সূত্রানুসারে, $E = \sigma T^4$

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

শক্তির নিত্যতা সূত্র হতে মোট বিকীর্ণ শক্তির ক্ষেত্রে $r + a + t = 1$ ... (1)

বিকিরণ ক্ষমতা, $E_\lambda = \frac{\delta H_1}{\delta H_2}$ (2)

শোষণ ক্ষমতা, $a_\lambda = \frac{\delta H_1}{\delta H_2}$ (3)

স্টেফান বোল্‌জম্যান এর সূত্র, $E = \sigma T^4$ (4)

স্টেফান বোল্‌জম্যান এর সূত্র, $E = A\sigma T^4$ (5)

স্টেফান বোল্‌জম্যান এর সূত্র, $E = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$ (6)

স্টেফান বোল্‌জম্যান এর সূত্র, $E = A\sigma(T_1^4 - T_2^4)$ (7)

সৌর ধ্রুবক, $S = \sigma T^4 \times \left(\frac{R}{r}\right)^2 \times 60$ (8)

নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র, $-\frac{d\theta}{dt} = K(\theta_1 - \theta_2)$ (9)

ভীন-এর সূত্র (i) $\lambda_m \times T =$ ধ্রুবক (10)

(ii) $E_m / T^5 =$ ধ্রুবক (11)

আপেক্ষিক তাপ, $S = \frac{1}{M}\left\{\frac{t_2}{t_1}(m_1s_1 + m_2s_2) - m_1s_1\right\} Jkg^{-1}K^{-1}$ (12)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১) একটি কৃষ্ণ বস্তুর ক্ষেত্রফল $3 \times 10^{-8}\ m^2$ এবং তাপমাত্রা 1000 K। (i) বস্তুটি কি হারে তাপ বিকিরণ করবে? (ii) কত তাপমাত্রায় এটি তিনগুণ শক্তি বিকিরণ করবে? $[\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}]$ [ঢা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

(i) $E = A\sigma T^4$
$= 5.67 \times 10^{-8} \times 3 \times 10^{-8} \times (10^3)^4$
$= 17.01 \times 10^{-4}$ W

এখানে,
বস্তুর ক্ষেত্রফল, $A = 3 \times 10^{-8}\ m^2$
তাপমাত্রা, $T = 1000\ K = 10^3 K$
স্টিফেন ধ্রুবক, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$
তাপ বিকিরণের হার, $E = ?$

(ii) $\frac{E_1}{E} = \frac{T_1^4}{T^4}$

$3 = \frac{T_1^4}{(10^3)^4}$

বা, $T_1^4 = 3 \times 10^{12}$

$T_1 = (3 \times 10^{12})^{1/4}$ K

$= 1.316 \times 10^3$ K

এখানে,
$E = 17.01 \times 10^{-4}$ W
শক্তি বিকিরণ, $E_1 = 3E$
তাপমাত্রা, $T_1 = ?$

২) $5 \times 10^{-5}\ m^2$ ক্ষেত্রফলের একটি কৃষ্ণকায়া 2000 K তাপমাত্রায় প্রতি সেকেন্ডে কতটা শক্তি বিকিরণ করবে? $[\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}]$ [ঢা. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৫, ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$E = A\sigma T^4$
$= 5 \times 10^{-5} \times 5.7 \times 10^{-8} \times (2000)^4$
$= 45.6$ W

দেয়া আছে,
$A = 5 \times 10^{-5}\ m^2$
$T = 2000$ K
$\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$
$E = ?$

৩। একটি গোলাকার কৃষ্ণ বস্তু 327°C তাপমাত্রায় রাখা আছে। কত তরঙ্গদৈর্ঘ্যে সর্বোচ্চ শক্তি বিকিরিত হবে ? [ভীনের ধ্রুবক 2.898×10^{-3} mK] [য. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

$$\lambda_m T = \text{ধ্রুবক}$$

$$\lambda_m = \frac{2.898 \times 10^{-3}}{600} = \frac{28.98 \times 10^{-6}}{6}$$

$$= 4.83 \times 10^{-6}\ \text{m}$$

এখানে,

তাপমাত্রা, $T = 327°\text{C} = (273 + 327)\text{K} = 600\text{K}$

ভীনের ধ্রুবক $= 2.898 \times 10^{-3}$ mK

সর্বোচ্চ তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda_m = ?$

৪। একটি কৃষ্ণ বস্তুর তাপমাত্রা কত হলে তা হতে 20 kWm^{-2} হারে তাপশক্তি বিকীর্ণ হবে ? ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}) T E

আমরা জানি,

$$E = \sigma T^4$$

বা, $$T = \left(\frac{E}{\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$T = \left(\frac{20 \times 10^3}{5.67 \times 10^{-8}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{K}$$

$$= \left(\frac{20 \times 10^{11}}{5.67}\right)^{\frac{1}{4}} \text{K}$$

$$= 770.65\text{K}$$

এখানে,

$E = 20\ \text{kWm}^{-2} = 20 \times 10^3\ \text{Wm}^{-2}$

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \text{Wm}^{-2}\ \text{K}^{-4}$

$T = ?$

৫। 259°C ও 352°C তাপমাত্রার দুটি আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু A ও B-কে একটি 27°C তাপমাত্রার বায়ুশূন্য বেষ্টনীর মধ্যে রাখা হয়েছে। A ও B কৃষ্ণ বস্তু হতে তাপ ক্ষয়ের হার নির্ণয় কর।

আমরা জানি, তাপ ক্ষয়ের হার

$$E = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

A বস্তুর তাপ ক্ষয়ের হার,

$$E_A = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$
$$= \sigma\{(532)^4 - (300)^4\}$$
$$= \sigma\{(5.32)^4 - (3)^4\} \times 10^8$$

এবং B বস্তুর তাপ ক্ষয়ের হার

$$E_B = \sigma(T_3^4 - T_2^4)$$
$$= \sigma\{(625)^4 - (300)^4\}$$
$$= \sigma\{(6.25)^4 - (3)^4\} \times 10^8$$

এখানে,

কৃষ্ণবস্তু A-এর তাপমাত্রা, $T_1 = 259°\text{C} = (259 + 273)\text{K} = 532\text{K}$

বায়ুশূন্য বেষ্টনীর তাপমাত্রা, $T_2 = 27°\text{C} = (27 + 273)\text{K} = 300\text{K}$

কৃষ্ণ বস্তু B-এর তাপমাত্রা, $T_3 = 352°\text{C} = (352 + 273)\text{K} = 625\text{K}$

অতএব,

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\sigma\{(5.32)^4 - (3)^4\} \times 10^8}{\sigma\{(6.25)^4 - (3)^4\} \times 10^8} = \frac{(5.32)^4 - (3)^4}{(6.25)^4 - (3)^4}$$

$$= \frac{801 - 81}{1525.88 - 81} = \frac{720}{1444.98}$$

$$= \frac{1}{2} = 1 : 2$$

৬। কোন বস্তু হতে সর্বোচ্চ বিকিরণের তরঙ্গদৈর্ঘ্য 20×10^{-6}m। বস্তুটির তাপমাত্রা নির্ণয় কর। (এক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট ধ্রুবকের মান $= 2.898 \times 10^{-3}$ mK) [কু. বো. ২০০৫]

আমরা পাই,

$$T = \frac{\text{ধ্রুব}}{\lambda_m}$$

$$= \frac{2.898 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 0.1449 \times 10^3$$

$$= 144.9\ \text{K}$$

$\lambda_m = 20 \times 10^{-6}$ m

ধ্রুবক $= 2.898 \times 10^{-3}$ mK

$T = ?$

P.V

৭। একটি কৃষ্ণবস্তু 800°C তাপমাত্রায় রাখা আছে। কৃষ্ণবস্তু হতে সর্বোচ্চ বিকীর্ণ শক্তির তরঙ্গদৈর্ঘ্য কত? (ভীনের ধ্রুবক = 28.98×10^{-4} mK)

আমরা জানি,

$$\lambda_m T = \text{ধ্রুবক}$$

$$\lambda_m = \frac{28.98 \times 10^{-4}}{1073} \text{ m}$$

$$= 2.701 \times 10^{-6} \text{ m}$$

এখানে,

কৃষ্ণবস্তুর তাপমাত্রা, $T = 800°C = (800 + 273)K = 1073K$

ভীনের ধ্রুবক $= 28.98 \times 10^{-4}$ mK

৮। একটি গোলাকার কৃষ্ণ বস্তুর ব্যাসার্ধ 0.02 m। এটি 427°C তাপমাত্রায় আছে। বস্তুটি 20 মিনিটে 1.026×10^4 J তাপ বিকিরণ করলে বস্তুটির আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা নির্ণয় কর। ($\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4})।

আমরা জানি,

$$E = Ae\sigma T^4$$

বা, $$e = \frac{E}{A\sigma T^4} = \frac{E}{\pi r^2 \sigma T^4}$$

$$e = \frac{1.026 \times 10^4}{20 \times 60 \times 3.14 \times (0.02)^2 \times 5.67 \times 10^{-8} \times (700)^4}$$

$$= \frac{1.026 \times 10^6}{12 \times 3.14 \times 4 \times 5.67 \times (7)^4} = 0.5$$

এখানে,

কৃষ্ণবস্তুর ব্যাসার্ধ, $r = 0.02$ m

তাপমাত্রা, $T = 427°C = (427 + 273)$ K = 700K

সময়, $t = 20$ মিনিট $= 20 \times 60$s

20 মিনিটে তাপ বিকিরণ $= 1.026 \times 10^4$ J

1 সেকেন্ডে তাপ বিকিরণ, $E = \frac{1.026 \times 10^4}{20 \times 60}$ W

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}

৯। দুটি কৃষ্ণ বস্তুর প্রতি একক ক্ষেত্রফল হতে নির্গত তাপ শক্তির অনুপাত 81 : 1। একটির তাপমাত্রা 1500 K হলে, অপরটির তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৬]

মনে করি, একটি হতে নির্গত তাপশক্তি $= E_1$

এবং অপরটি হতে নির্গত তাপশক্তি $= E_2$ এবং তাপমাত্রা $= T_2$

আমরা পাই,

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 \quad (1)$$

এখানে,

$\frac{E_1}{E_2} = \frac{81}{1}$

$T_1 = 1500$ K

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\frac{81}{1} = \left(\frac{1500}{T_2}\right)^4$$

বা, $$\left(\frac{3}{1}\right)^4 = \left(\frac{1500}{T_2}\right)^4$$

বা, $$\frac{1500}{T_2} = \frac{3}{1}$$

$$T_2 = \frac{1500}{3} = 500 \text{ K}$$

১০। কোন গ্রীন হাউসের মধ্যে 3200°C তাপমাত্রায় 8321×10^{-10}m তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সর্বোচ্চ পরিমাণ শক্তি বিকীর্ণ হলে ভীনের ধ্রুবক কত হবে ? [য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$\text{ভীনের ধ্রুবক} = \lambda_m \times T$$

$$= 8321 \times 10^{-10} \times 3473$$

$$= 28.90 \times 10^{-4} \text{ mK}$$

এখানে,

$T = 3200°C = (3200 + 273)$ K $= 3473$ K

$\lambda_m = 8321 \times 10^{-10}$ m

১১। সূর্য ও চন্দ্রের পৃষ্ঠ হতে নিঃসৃত বিকিরণের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সর্বাধিক মান যথাক্রমে 4753A ও 14μ হলে সূর্য ও চন্দ্রের পৃষ্ঠদেশের তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

ভীনের সরণ সূত্র হতে আমরা পাই, $\lambda_m \times T = \text{ধ্রুব} = 2.898 \times 10^{-3}$ mK

প্রশ্নানুসারে ঃ

(i) সূর্যের ক্ষেত্রে, $\lambda_m = 4753$A

$= 4753 \times 10^{-10}$ m [∵ 1A $= 10^{-10}$ m]

সূর্যের পৃষ্ঠের তাপমাত্রা, $T_s = \frac{\text{ধ্রুব}}{\lambda_m}$

$$= \frac{2.898 \times 10^{-3}\ mK}{4753 \times 10^{-10}\ m} = 6097\ K$$

(ii) চন্দ্রের ক্ষেত্রে, $\lambda_m = 14\mu = 14 \times 10^{-6}\ m$ [∵ $1\mu = 10^{-6}\ m$]

চন্দ্রের পৃষ্ঠের তাপমাত্রা, $T_m = \frac{\text{ধ্রুব}}{\lambda_m} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ mK}{14 \times 10^{-6}\ m} = 207K$

১২। 60 cm ব্যাসের একটি ধাতব গোলক 25 W ক্ষমতাবিশিষ্ট তাপ বিকিরণ করে। এর তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}\ K^{-4}$] [রা. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$E = A\sigma T^4$

বা, $25 = 1.1304 \times 5.67 \times 10^{-8} \times T^4$

বা, $T^4 = \frac{25}{1.1304 \times 5.67 \times 10^{-8}}$

বা, $T^4 = 390.05 \times 10^6$

$T = 140.53\ K$

এখানে,

$E = 25\ W$

$r = \frac{60\ cm}{2} = 30\ cm = 0.3\ m$

$A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (0.3)^2$
$= 1.1304$

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}\ K^{-4}$

$T = ?$

১৩। 400°C তাপমাত্রার একটি বস্তু 250°C তাপমাত্রার একটি কৃষ্ণবস্তু দ্বারা পরিবেষ্টিত। প্রথম বস্তুর প্রতি একক তল থেকে তাপ বিকিরণের হার নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$E = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$

$= 5.67 \times 10^{-8}\ \{(673)^4 - (523)^4\}$

$= 7389.51\ Wm^{-2}$

এখানে,

$T_1 = 400°C$
$= (273 + 400)\ K$
$= 673\ K$

$T_2 = 250°C = (250 + 273)\ K = 523\ K$

$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}\ K^{-4}$

১৪। একটি কৃষ্ণ বস্তুর ক্ষেত্রফল $5 \times 10^{-2} m^2$। 1000 K তাপমাত্রায় বস্তুটি কি হারে বিকিরণ করবে? [স্টিফানের ধ্রুবক $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ Wm–2 K^{-4}] [ব. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$E = A\sigma T^4$

$E = 5 \times 10^{-2} \times 5.7 \times 10^{-8} \times (1000)^4$

$= 2850\ W$

এখানে,

$A = 5 \times 10^{-2} m^2$

$T = 1000\ K$

$\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}\ K^{-4}$

১৫। 0.05m ব্যাসার্ধের একটি কৃষ্ণকায়া গোলককে 1027°C তাপমাত্রায় উত্তপ্ত করে 127°C তাপমাত্রার একটি পাত্রে বন্ধ করে রাখা হল। গোলকটির তাপ বিকিরণের হার নির্ণয় কর।

[$\sigma = 5.7 \times 10^{-8} W / m^{-2}/K^4$] [কু. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০৩

আমরা জানি,

$E = A\sigma (T_1^4 - T_2^4)$

$= 0.0314 \times 5.7 \times 10^{-8} \times \{(1300)^4 - (400)^4\}$

$= 5.07 \times 10^3\ Wm^{-2}$

এখানে,

$\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ W/m^{-2}\ /K^4$

$T_1 = (1027 + 273)\ K = 1300\ K$

$T_2 = (273 + 127)\ K = 400\ K$

$A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (0.05)^2$
$= 0.0314$

১৬। সম আয়তনের পানি ও একটি তরল পদার্থের ভর যথাক্রমে 0·3 kg ও 0·2 kg। তাদের একই ক্যালরিমিটারে পর পর রেখে 50°C হতে 30°C-এ শীতল করতে যথাক্রমে 600 s ও 300 s সময় লাগে। ক্যালরিমিটারের ধারকত্ব 42 J K^{-1} হলে তরলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। [পানির আপেক্ষিক তাপ = 4200 J kg^{-1} K^{-1}]

[কু. বো. ২০০১]

এখানে,
পানির ভর, $m_1 = 0·3$ kg
তরলের ভর, $m_2 = 0·2$ kg
পানির আপেক্ষিক তাপ, $s_1 = 4200$ J kg^{-1} K^{-1}
ক্যালরিমিটারের ধারকত্ব, $C = ms = 42$ JK^{-1}
তরলের আপেক্ষিক তাপ, $s_2 = ?$

আমরা পাই,
বর্জিত তাপ, $H = ms(t_2 - t_1)$
$= C(t_2 - t_1)$
প্রশ্নানুযায়ী 50°C হতে 30°C-এ শীতল হতে
(i) ক্যালরিমিটার কর্তৃক বর্জিত তাপ
$= C(t_2 - t_1) = 42\,(50 - 30)\text{ J} = 840\text{ J}$
(ii) পানি কর্তৃক বর্জিত তাপ
$= m_1s_1(t_2 - t_1) = 0·3 \times 4200 \times (50 - 30) = 25200\text{ J}$
(iii) তরল কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_2s_2(t_2 - t_1) = 0·2s_2\,(50 - 30) = 4\,s$

(ক্যালরিমিটার + পানি) কর্তৃক তাপ বর্জনের হার $= \dfrac{840 + 25200}{600}$

এবং (ক্যালরিমিটার ও তরল) কর্তৃক তাপ বর্জনের হার $= \dfrac{840 + 4s}{300}$

নিউটনের সূত্র অনুযায়ী সূত্রানুযায়ী তাপ বর্জনের হারদ্বয় সমান।

$$\frac{840 + 25200}{600} = \frac{840 + 4s_2}{300}$$

বা, $\dfrac{210 + 6300}{6} = \dfrac{210 + s_2}{3}$

বা, $\dfrac{6510}{2} = \dfrac{210 + s_2}{1}$

বা, $3255 = 210 + s_2$

$s_2 = 3255 - 210$
$= 3045$ J kg^{-1} K^{-1}

১৭। সমআয়তনের পানি ও একটি তরল পদার্থের ভর যথাক্রমে 0.5kg এবং 0.55kg। তাদের একই ক্যালরিমিটারে পর পর রেখে 50°C থেকে 30°C এ শীতল করতে যথাক্রমে 600s এবং 300s সময় লাগে। ক্যালরিমিটারের ভর 0.1kg, এর আপেক্ষিক তাপ 420 Jkg^{-1}K^{-1} হলে তরলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। (পানির আপেক্ষিক তাপ 4200 Jkg^{-1}K^{-1})

[রা. বো. ২০০৫]

এখানে,
পানির ভর, $m_1 = 0·5$ kg
তরলের ভর, $m_2 = 0·55$ kg
ক্যালরিমিটারের ভর, $m_3 = 0·1$ kg
ক্যালরিমিটারের আঃ তাপ, $s_3 = 420$ J kg^{-1} K^{-1}
পানির আঃ তাপ, $s_1 = 4200$ J kg^{-1} K^{-1}
তাপমাত্রার পার্থক্য, $\theta_2 - \theta_1 = 50°C - 30°C = 20°C = 20$ K
তরলের আঃ তাপ, $s_2 = ?$

আমরা পাই,
বর্জিত তাপ, $H = ms\,(\theta_2 - \theta_1)$
প্রশ্নানুযায়ী, 50°C থেকে 30°C এ শীতল হতে
(i) পানি কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_1s_1\,(\theta_2 - \theta_1)$
$= 0·5 \times 4200 \times 20$
$= 42000$
(ii) তরল কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_2s_2\,(\theta_2 - \theta_1)$
$= 0·55 \times s_2 \times 20$
$= 11\,s_2$
(iii) ক্যালরিমিটার কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_3s_3\,(\theta_2 - \theta_1)$
$= 0·1 \times 420 \times 20$
$= 840$

ক্যালরিমিটার ও পানি কর্তৃক তাপ বর্জনের হার $= \dfrac{840 + 42000}{600} = 71·4$

এবং ক্যালরিমিটার ও তরল কর্তৃক তাপ বর্জনের হার $= \dfrac{840 + 11s_2}{300}$

শীতলীকরণের নীতি থেকে পাই,

$$\frac{840 + 11s_2}{300} = 71·4$$

বা, $11s_2 = 71·4 \times 300 - 840 = 20580$

$s_2 = \dfrac{20580}{11} = 1870·91$ J kg^{-1} K^{-1}

১৮। 250 gm ভরের একটি তামার ক্যালরিমিটারে রাখা 5 gm পানি 60°C হতে 40°C তাপমাত্রায় শীতল হতে 80 সেকেন্ড সময় লাগে। একই ক্যালরিমিটারে সমান আয়তনের 6 gm ভরের কোন তরল পদার্থ 60°C থেকে 40°C তাপমাত্রায় শীতল হতে সময় লাগে 70 সেকেন্ড। তরল পদার্থটির আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। (তামার আ. তাপ 380 $Jkg^{-1} K^{-1}$; পানির আ. তাপ 4200 J $kg^{-1} K^{-1}$) [ঢা. বো. ২০০১]

আমরা পাই, $H = ms(t_2 - t_1)$

প্রশ্নানুযায়ী 60°C হতে 40°C-এ শীতল হতে

(i) ক্যালরিমিটার কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_1 s_1 (t_2 - t_1) = 250 \times 10^{-3} \times 380\,(60 - 40)$

(ii) পানি কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_2 s_2 (t_2 - t_1) = 5 \times 10^{-3} \times 4200 \times (60 - 40)$

(iii) তরল কর্তৃক বর্জিত তাপ $= m_3 s_3 (t_2 - t_1) = 6 \times 10^{-3}\, s\,(60 - 40)$

(ক্যালরিমিটার + পানি) কর্তৃক তাপ বর্জনের হার

$$= \frac{380 \times 250 \times 10^{-3}\,(60-40) + 5 \times 10^{-3} \times 4200(60-40)}{80}$$

$$= \frac{1900 + 420}{80} = 29\text{ J}$$

(ক্যালরিমিটার + তরল) কর্তৃক তাপ বর্জনের হার

$$= \frac{250 \times 10^{-3} \times 380 \times 20 + 6 \times 10^{-3} \times s_3 \times 20}{70} = \frac{190 + 12 \times 10^{-3} s_3}{7}$$

নিউটনের শীতলীকরণের সূত্র অনুযায়ী তাপ বর্জনের হারদ্বয় সমান

$$\frac{190 + 12 \times 10^{-3} s_3}{7} = 29$$

$$\frac{190 + 12 \times 10^{-3} s_3}{7} = 29$$

বা, $190 + 12 \times 10^{-3} s_3 = 203$

বা, $12 \times 10^{-3} s_3 = 13$

$$s_3 = \frac{13}{12 \times 10^{-3}} = 1083{\cdot}33\ Jkg^{-1} K^{-1}$$

১৯। একটি টাংস্টেন বাতির পৃষ্ঠ ক্ষেত্রফল 0·4 cm^2। এটি 3000 K তাপমাত্রায় আলো ছড়াচ্ছে। বিকিরিত শক্তির হার বের কর। [$\sigma = 5{\cdot}7 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$] [ব. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; চ. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$E = A\sigma T^4$$
$$= 0{\cdot}4 \times 10^{-4} \times 5{\cdot}7 \times 10^{-8} \times (3000)^4$$
$$= 184{\cdot}68\text{ W}$$

এখানে,
$A = 0{\cdot}4\ cm^2 = 0{\cdot}4 \times 10^{-4}\ m^2$
$T = 3000$ K
$\sigma = 5{\cdot}7 \times 10^{-8}\ Wm^{-2} K^{-4}$

২০। 0·625 m^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি গোলকের তাপমাত্রা 850°C। গোলকের আপেক্ষিক নিঃসরণ ক্ষমতা 0·60 হলে প্রতি সেকেন্ডে গোলকটি হতে বিকীর্ণ শক্তির ক্ষমতা নির্ণয় কর। [$\sigma = 5{\cdot}67 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$]

আমরা জানি,

$$E = \epsilon A \sigma T^4$$
$$E = 0{\cdot}60 \times 0{\cdot}625 \times 5{\cdot}67 \times 10^{-8} \times (1123)^4$$
$$= 0{\cdot}60 \times 0{\cdot}625 \times 5{\cdot}67 \times (11{\cdot}23)^4 \times 10^{-8} \times 10^8$$
$$\simeq 33817\text{ W} \simeq 3{\cdot}38 \times 10^4\text{ W}$$

এখানে, $\epsilon = 0{\cdot}60$
$A = 4\pi r^2 = 0{\cdot}625\ m^2$
$T = (850 + 273)$ K $= 1123$ K

২৫

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন :

১। তাপ বিকিরণ কাকে বলে ?

২। বিকীর্ণ তাপ শক্তির বৈশিষ্ট্য লিখ।

৩। আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু বলতে কি বুঝ ? [ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৩; য. বো. ২০০৬, ২০০৩; ২০০০ ; কু. বো. ২০০০]

৪। বিকিরণ ক্ষমতা কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৬, ২০০২ ; কু. বো. ২০০০]

৫। আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা কাকে বলে ?

৬। আদর্শ কৃষ্ণ বস্তু উত্তম শোষক এবং উত্তম বিকিরক—ব্যাখ্যা কর।

৭। কোন বস্তুর বিকিরণ ক্ষমতা ও শোষণ ক্ষমতা বলতে কি বুঝ ? [রা. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০২]

৮। স্টেফানের সূত্রটি বিবৃত কর। [ঢা. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০০]

৯। স্টিফানের সূত্রটি বর্ণনা কর। [সি. বো. ২০০১]

১০। নিউটনের শীতলীকরণ সূত্রটি বিবৃত কর। [কু. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০০ ; সি. বো. ২০০২]

১১। ভীনের সরণ সূত্র বিবৃত কর। [চ. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৪, ২০০০]

১২। ভীনের সরণ সূত্রটি লিখ এবং এই সূত্র সংশ্লিষ্ট ধ্রুবকের মান কত ? [রা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২]

১৩। গ্রীষ্মকালে সাদা জামাকাপড় আরামপ্রদ কেন ?

১৪। গ্রীণ হাউজ ক্রিয়া কি ? [ঢা. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০১ ; চ. বো. ২০০৪]

১৫। মেঘলা রাত্রি মেঘহীন রাত্রি অপেক্ষা অধিকতর গরম কেন ?

১৬। কৃষ্ণবস্তু বিকিরণ কি ? [কু. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৫]

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। কৃষ্ণ বস্তুর বিকিরণ ও সাধারণ বস্তুর বিকিরণের মধ্যে পার্থক্য কি ? [য. বো. ২০০৪]

২। স্টিফেনের সূত্রটি বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। [সি. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৫, ২০০৩]

৩। স্টিফানের সূত্রটি বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর এবং তা থেকে নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র কিভাবে পাওয়া যায় বর্ণনা কর। [চ. বো. ২০০৩, ২০০১ ; ব. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০১]

৪। স্টিফানের সূত্র থেকে নিউটনের শীতলীকরণ সূত্র প্রতিষ্ঠা কর। [চ. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৫, ২০০৩ ; য. বো. ২০০১ ; ব. বো. ২০০৫ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০০]

৫। ভীনের সূত্র বিবৃত কর এবং তা হতে গ্রীন হাউজ ক্রিয়া ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬, ২০০২; চ. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০২]

৬। গ্রীন হাউজ ক্রিয়া কি ? ভীনের সূত্রের সাহায্যে তা ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০৬, ২০০২ ; রা. বো. ২০০৩]

৭। ভীনের সূত্রটি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০০ ; কু. বো. ২০০৫, ২০০০ ; চ. বো. ২০০০]

৮। নিউটনের শীতলীকরণ সূত্রটি বর্ণনা ও ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০২]

৯। নিউটনের শীতলীকরণ পদ্ধতিতে তরল পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয়ের পরীক্ষাটি বর্ণনা কর। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; কু. বো. ২০০৬, ২০০২ ; য. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪]

১০। তরল পদার্থের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় প্রণালী বর্ণনা কর। [কু. বো. ২০০৩]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। একটি কৃষ্ণকায়ার ক্ষেত্রফল $4 \times 10^{-9}\ m^2$। এটি 1500K তাপমাত্রায় কি হারে শক্তি বিকিরণ করবে ? দেওয়া আছে, $\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}\ K^{-4}$ [উঃ 1.154 mW]

২। সূর্যের আলোক মণ্ডলের ব্যাসার্ধ $R = 6.923 \times 10^5$ Km এবং সূর্য থেকে পৃথিবীর গড় দূরত্ব $r = 14.94 \times 10^7$ Km হলে সূর্যের আলোকমণ্ডলের তাপমাত্রা নির্ণয় কর।[$\sigma = 5.7 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}\ K^{-4}$ এবং সৌর ধ্রুবক $S = 8.14 \times 10^4\ Jm^{-2}\ min^{-1}$) [উঃ 5770 K]

৩। একটি কৃষ্ণ বস্তু 527°C তাপমাত্রায় রাখা আছে। বস্তুটি কত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সর্বোচ্চ শক্তি বিকিরণ করবে ? (ভীনের ধ্রুবক $= 28.98 \times 10^{-4}$ mK) [উঃ 3.62×10^{-6} m]

৪। একটি তারকা থেকে সর্বোচ্চ বিকীর্ণ শক্তির জন্য তরঙ্গদৈর্ঘ্য 450 mm হলে তারকা পৃষ্ঠের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। (ভীনের ধ্রুবক $= 28.98 \times 10^{-4}$ mK) [উত্তর ঃ 6440K]

৫। 400K তাপমাত্রার একটি বস্তু 300K তাপমাত্রার একটি কৃষ্ণ বস্তু দ্বারা পরিবেষ্টিত। বস্তুদ্বয়ের মধ্যবর্তী স্থান বায়ুশূন্য। প্রথম বস্তুটির প্রতি একক ক্ষেত্রফল থেকে তাপ বিকিরণের হার নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২০০১] [উত্তর ঃ 992.25 Wm^{-2}]

৬। 0.06m ব্যাসের একটি কৃষ্ণকায়া গোলককে 1227°C তাপমাত্রায় উত্তপ্ত করে 227°C তাপমাত্রার অপর একটি পাত্রে বন্ধ করে রাখা হল। গোলকটির তাপ বিকিরণের হার নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ $3.256 \times 10^3 Wm^{-2}$]

৭। একটি কৃষ্ণ বস্তুর ক্ষেত্রফল 2×10^{-9} m^2। (i) 1000K তাপমাত্রায় বস্তুটি কি হারে শক্তি বিকিরণ করবে? (ii) কত তাপমাত্রায় এটি দ্বিগুণ হারে তাপ বিকিরণ করবে ? ($\sigma = 5.7 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}) [উঃ 1.14×10^{-4} W ; 1189.2 K]

৮। একটি গোলাকার বস্তুর ব্যাস 2 cm। এটি 600°C তাপমাত্রায় রাখা আছে। বস্তুটির আপেক্ষিক বিকিরণ ক্ষমতা 0.8 হলে বস্তুটি 30 মিনিটে কি পরিমাণ শক্তি বিকিরণ করবে ? [উঃ 5.99×10^4 J]

৯। একটি টাংস্টেনের বাতির পৃষ্ঠ ক্ষেত্রফল 0.3 cm^2। এটি 3000K তাপমাত্রায় আলো ছড়াচ্ছে। বিকিরিত শক্তির হার কত ? [$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}] [ব. বো. ২০০৬] [সি, বো. ২০০৩] [উঃ 137.8 W]

১০। একটি টাংস্টেন বাতির পৃষ্ঠ ক্ষেত্রফল 0.3 cm^2। এটি 3000K তাপমাত্রায় আলো ছড়াচ্ছে। বিকিরিত শক্তির হার কত ? [$\sigma = 5.6 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}] [ব. বো. ২০০৬ ; উঃ 136.08 W]

১১। 0.3 m ব্যাসার্ধের একটি কাল ধাতব গোলক 25W ক্ষমতাবিশিষ্ট তাপ বিকিরণ করে। এর তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

[$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}] [সি. বো. ২০০১] [উঃ 140.5 K]

১২। একটি কৃষ্ণ বস্তু 800 K তাপমাত্রায় কি পরিমাণ তাপ বিকিরণ করবে তা নির্ণয় কর।

[$\sigma = 5.672 \times 10^{-8}$ Wm^{-2} K^{-4}] [উঃ 2.3232×10^4 Wm^{-2}]

১৩। একটি নক্ষত্রের ঔজ্জ্বল্য সূর্যের ঔজ্জ্বল্যের 17000 গুণ। সূর্য পৃষ্ঠের তাপমাত্রা 6000k ধরে ঐ নক্ষত্র পৃষ্ঠের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 68511.5 K]

১৪। কোন বস্তু হতে সর্বোচ্চ বিকিরণের জন্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 18×10^{-6} m হলে বস্তুটির তাপমাত্রা নির্ণয় কর।

[উঃ 161 K]

১৫। একটি কৃষ্ণ বস্তুর ক্ষেত্রফল 3×10^{-6} m^2 এবং তাপমাত্রা 500 K। (ক) বস্তুটি কি হারে তাপ বিকিরণ করবে? (খ) কত তাপমাত্রায় এটি তিনগুণ হারে তাপশক্তি বিকিরণ করবে ? [$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}]

[উঃ (ক) $.06 \times 10^{-2}$ W ; (খ) 658 K]

১৬। সূর্য পৃষ্ঠ থেকে বিকিরণ নিঃসরণের বেলায় যে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বিকিরিত হচ্ছে তা 500 nm হলে সূর্য পৃষ্ঠের তাপমাত্রা বের কর। [1 nm = 10^{-9} m, ভীন ধ্রুবক = 2.898×10^{-3} mK] [উঃ 5796 K]

১৭। 0.08 m ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলক 1500 K তাপমাত্রায় আছে। গোলকের আপেক্ষিক নিঃসরণ ক্ষমতা 0.45 হলে এর পৃষ্ঠ হতে প্রতি সেকেন্ডে বিকীর্ণ শক্তির পরিমাণ বের কর। [$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}] [উঃ 1.037×10^4W]

১৮। দুটি সদৃশ তামার ক্যালরিমিটারের প্রত্যেকের ভর 0.1 kg। তারা যথাক্রমে 50×10^{-6}m^3 পানি ও 50×10^{-6}m^3 অ্যালকোহল ধারণ করে। তাদের 60°C হতে 40°C-এ শীতল হতে যথাক্রমে 600 s ও 330 s সময় লাগে। অ্যালকোহলের আপেক্ষিক তাপ নির্ণয় কর। [পানি ও তামার আপেক্ষিক তাপ যথাক্রমে 4200 Jkg^{-1}K^{-1} ও 378 Jkg^{-1}K^{-1} এবং অ্যালকোহলের ঘনত্ব = 810 kgm^{-3}] [উঃ — 2462 Jkg^{-1}K^{-1}]

১৯। একই পারিপার্শ্বিক অবস্থায় 0.152 kg ভরের একটি ক্যালরিমিটার প্রথমে 0.045 kg পানি ও পরে 0.060 kg কেরোসিন তেল 60°C হতে 50°C তাপমাত্রায় শীতল করতে যথাক্রমে 10 min ও 8 min সময় লাগে। কেরোসিন তেলের আপেক্ষিক তাপ কত ? [পানির আপেক্ষিক তাপ = 4200 Jkg^{-1}K^{-1} এবং ক্যালরিমিটারের উপাদানের আপেক্ষিক তাপ = 420 Jkg^{-1}K^{-1}] [উঃ 2305 Jkg^{-1}K^{-1}]

২০। 200g ভরের একটি তামার ক্যালরিমিটারে 6g পানি নিয়ে 50°C থেকে 40°C তাপমাত্রায় ঠান্ডা হতে সময় লাগে 75 সেকেন্ড এবং একই ক্যালরিমিটারে পানির সমান আয়তনের 8g তরল পদার্থ নিয়ে 50°C থেকে 40°C তাপমাত্রায় ঠান্ডা হতে সময় নেয় 65 সেকেন্ড। তামার আপেক্ষিক তাপ 380 Jkg^{-1}K^{-1} হলে তরল পদার্থের আপেক্ষিক তাপ কত ?

[রা. বো. ২০০২] [উত্তর ঃ 1463 Jkg^{-1}K^{-1}]

১৫

অবস্থার পরিবর্তন
CHANGE OF STATE

১৫.১ সূচনা
Introduction

পদার্থ সাধারণত তিন অবস্থায় থাকতে পারে। যথা–কঠিন, তরল ও গ্যাসীয় অবস্থা। এ অবস্থা নির্ভর করে তাপমাত্রা ও চাপের উপর। কঠিন পদার্থ তাপ শোষণ করে তরল পদার্থে এবং তরল পদার্থ তাপ শোষণ করে বায়বীয় বা গ্যাসীয় পদার্থে পরিণত হয়। আবার বায়বীয় বা গ্যাসীয় পদার্থ তাপ বর্জন করে প্রথমে তরল এবং আরও তাপ বর্জন করে কঠিন পদার্থে পরিণত হতে পারে। পদার্থের এ তিনটি অবস্থাকে অনেক সময় দশা হিসেবে চিহ্নিত করা হয়। এ অধ্যায়ে পদার্থের অবস্থা বা দশার পরিবর্তন আলোচনা করব।

১৫.২ পদার্থের অবস্থার পরিবর্তন
Change of state of matter

অবস্থা বলতে আমরা কোন পদার্থ বা সিস্টেমের পরিস্থিতি বা অবস্থান বুঝি। তাপ প্রয়োগ করে অথবা ঠান্ডা করে কোন পদার্থকে এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় রূপান্তর করাকে পদার্থের অবস্থার পরিবর্তন বলে। পদার্থের বিভিন্ন প্রকার পরিবর্তনকে বিভিন্ন নামে অভিহিত করা হয়। যেমন,

(ক) গলন বা **তরলীভবন** (Fusion or melting) ঃ তাপ প্রয়োগে কঠিন পদার্থের তরল পদার্থে রূপান্তরিত হওয়াকে **গলন** বলে।

(খ) হিমায়ন বা **কঠিনীভবন** (Freezing or solidification) ঃ তাপ বর্জনে কোন তরল পদার্থের কঠিন পদার্থে রূপান্তরিত হওয়াকে **কঠিনীভবন** বলে।

(গ) বাষ্পীভবন (Vaporisation) ঃ তাপ প্রয়োগে তরল পদার্থের বায়বীয় অবস্থায় রূপান্তরের নাম **বাষ্পীভবন**। বায়বীয় অবস্থায় রূপান্তরিত বস্তুকে **বাষ্প** (vapour) বলে।

(ঘ) ঘনীভবন (Condensation) ঃ বাষ্পীভবনের বিপরীত প্রক্রিয়াই ঘনীভবন অর্থাৎ তাপ বর্জনে কোন গ্যাসীয় পদার্থের তরল পদার্থে রূপান্তরিত হওয়াকে **ঘনীভবন** বলে।

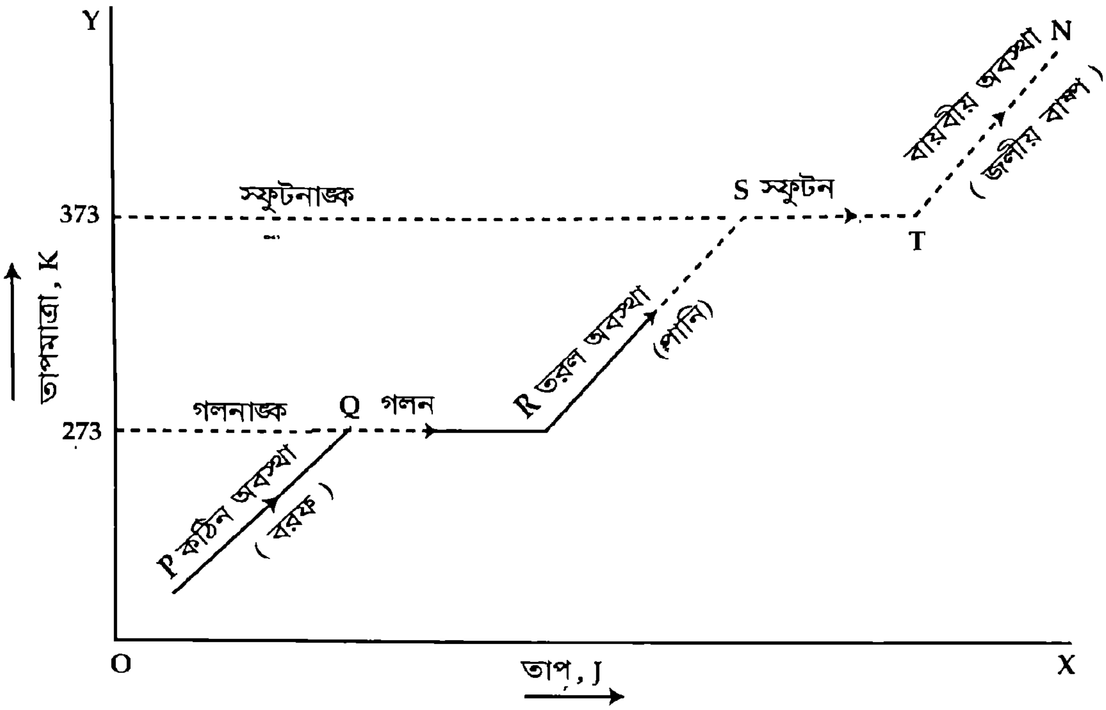
(ঙ) ঊর্ধ্বপাতন (Sublimation) ঃ কোন কোন কঠিন পদার্থ তাপ প্রয়োগে তরল পদার্থে রূপান্তরিত না হয়ে সরাসরি বাষ্পে পরিণত হয়। একে **ঊর্ধ্বপাতন** বলে। কর্পূর, গন্ধক, ন্যাপথালিন প্রভৃতি পদার্থ সাধারণ তাপমাত্রাতেই সরাসরি বাষ্পে পরিণত হয়।

(চ) তুহিনীভবন (Formation of hoar-frost) ঃ কোন কোন গ্যাসীয় পদার্থ তাপ বর্জন করে তরল পদার্থে রূপান্তরিত না হয়ে সরাসরি কঠিন পদার্থে পরিণত হয়। একে **তুহিনীভবন** বলে। কাজেই **ঊর্ধ্বপাতনের বিপরীত প্রক্রিয়াই তুহিনীভবন।**

১৫.৩ লেখচিত্রের সাহায্যে পানির অবস্থা পরিবর্তনের বিশ্লেষণ
Analysis of change of state of water graphically

আমরা জানি, তাপ গ্রহণে বা তাপ বর্জনে পদার্থ এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় রূপান্তরিত হয়। যেমন বরফ একটি কঠিন পদার্থ। তাপ গ্রহণে বরফ গলে পানি হয়। পানি হল তরল পদার্থ, আবার পানি তাপ গ্রহণ করে জলীয়

বাষ্প হবে। জলীয় বাষ্প পদার্থের বায়বীয় অবস্থা। বিপরীতক্রমে তাপ বর্জন করে জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে পানি হবে এবং পানি হতে তাপ নিষ্কাশন করলে পানি জমাট বেঁধে বরফ হবে। নিম্নে লেখচিত্রের সাহায্যে পানির অবস্থা পরিবর্তন বিশ্লেষণ করা হল।



চিত্র ১৫.১

এখানে X-অক্ষে তাপ এবং Y-অক্ষে তাপমাত্রা স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করা হয়েছে। লেখচিত্রের PQ অংশ পুরোপুরিভাবে পানির কঠিন অবস্থা অর্থাৎ বরফ প্রকাশ করছে। P হতে Q অবস্থায় যেতে বরফ তাপ গ্রহণ করায় এর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেয়েছে এবং Q বিন্দুতে বরফের গলন শুরু হয়েছে। বরফ আরো তাপ গ্রহণ করে R বিন্দুতে সম্পূর্ণভাবে তরল পদার্থ অর্থাৎ পানিতে পরিবর্তিত হবে। লেখের Q বিন্দু বরফের গলনাঙ্ক প্রকাশ করছে এবং QR অংশ গলন ক্রিয়া প্রকাশ করছে। R বিন্দুতে পদার্থের গলন ক্রিয়া শেষ হবে। গলন ক্রিয়া শেষ না হওয়া পর্যন্ত কঠিন পদার্থের তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন ঘটবে না যদিও পদার্থ তাপ গ্রহণ করবে। লেখচিত্রের QR অংশ হতে তা বুঝা যায়। R হতে S বিন্দুতে যেতে পানি তাপ গ্রহণ করবে এবং এর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাবে। S বিন্দুতে পানি ফুটতে শুরু করবে। সুতরাং S বিন্দুই হবে পানির স্ফুটনাঙ্ক। লেখচিত্রের ST অংশ স্ফুটন ক্রিয়া বুঝায়। তাপ গ্রহণে ও লেখচিত্রের এই অংশে তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটেনি। T বিন্দু স্ফুটন ক্রিয়া শেষ হওয়া বুঝাচ্ছে। লেখচিত্রের TN অংশ পানির বায়বীয় অবস্থা অর্থাৎ জলীয় বাষ্প প্রকাশ করছে। T বিন্দু হতে N বিন্দুতে যেতে জলীয় বাষ্প তাপ গ্রহণ করায় এর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেয়েছে।

বিপরীতক্রমে, তাপ বর্জন করে জলীয় বাষ্প পানিতে এবং পানি বরফে পরিণত হবে। এটিই হল পানির অবস্থা পরিবর্তনের লেখচিত্র বিশ্লেষণ।

যে কোন কেলাসীয় পদার্থের ক্ষেত্রে অবস্থা পরিবর্তনের চিত্র উপরের ১৫.১ চিত্রের অনুরূপ হবে।

১৫.৪ গলনাঙ্ক ও হিমাঙ্ক
Melting point and freezing point

গলনাঙ্ক

সাধারণত কোন কঠিন পদার্থে তাপ প্রয়োগ করতে থাকলে তার তাপমাত্রা প্রথমে বৃদ্ধি পায় এবং একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় পৌছার পর পদার্থটি গলতে শুরু করে। যতক্ষণ পর্যন্ত না সম্পূর্ণ কঠিন পদার্থ গলে তরল পদার্থে

পরিণত হয় ততক্ষণ পর্যন্ত তাপ প্রয়োগ সত্ত্বেও তার তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না [চিত্র ১৫'১]। ঐ নির্দিষ্ট তাপমাত্রাকে এর **গলনাঙ্ক** বলে।

চাপের পরিবর্তনে কঠিন পদার্থের গলনাঙ্ক পরিবর্তিত হয়। পরীক্ষায় দেখা যায় যে, বরফের গলনাঙ্ক স্বাভাবিক চাপে 273 K এবং বায়ুশূন্য স্থানে 272·99 K।

সংজ্ঞা : স্থির চাপে কোন কঠিন পদার্থে তাপ প্রয়োগ করতে থাকলে যে নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় পৌঁছে তা গলতে শুরু করে এবং গলন শেষ না হওয়া পর্যন্ত ঐ তাপমাত্রার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না তাকে ঐ চাপে উক্ত পদার্থের গলনাঙ্ক বলে।

"বরফের গলনাঙ্ক স্বাভাবিক চাপে 273 K"—এটি দ্বারা বুঝা যায় যে, স্বাভাবিক চাপে এক টুকরা বরফে তাপ প্রয়োগ করতে থাকলে তা 273 K তাপমাত্রায় পৌঁছে গলতে শুরু করে এবং সম্পূর্ণ বরফ গলে পানিতে পরিণত না হওয়া পর্যন্ত ঐ তাপমাত্রার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না।

হিমাঙ্ক

সাধারণত কোন তরল পদার্থকে ক্রমাগত ঠাণ্ডা করতে থাকলে তার তাপমাত্রা প্রথমে কমতে থাকে। কিন্তু একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় পৌঁছার পর তা জমে কঠিন পদার্থে পরিণত হতে থাকে। যতক্ষণ পর্যন্ত না সম্পূর্ণ তরল পদার্থ কঠিন পদার্থে রূপান্তরিত হয় ততক্ষণ পর্যন্ত তাপ নিষ্কাশন সত্ত্বেও তাপমাত্রার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না। এই নির্দিষ্ট তাপমাত্রাকে উক্ত তরল পদার্থের **হিমাঙ্ক** বলে। চাপ প্রয়োগে গলনাঙ্কের ন্যায় হিমাঙ্কও পরিবর্তিত হয়।

সংজ্ঞা : স্থির চাপে কোন তরল পদার্থকে ক্রমাগত শীতল করতে থাকলে যে তাপমাত্রায় পৌঁছে তরল পদার্থটি কঠিন পদার্থে রূপান্তরিত হতে শুরু করে এবং কঠিনীভবন শেষ না হওয়া পর্যন্ত ঐ তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না তাকে ঐ চাপে উক্ত তরল পদার্থের হিমাঙ্ক বলে।

"পানির হিমাঙ্ক 273 K"—এটি দ্বারা বুঝা যায় যে, স্বাভাবিক চাপে 273K তাপমাত্রায় তাপ বর্জনে পানি জমাট বেঁধে তরল অবস্থা হতে কঠিন অবস্থায় পরিণত হয় এবং সমস্ত পানি কঠিন অবস্থায় পরিণত না হওয়া পর্যন্ত এই তাপমাত্রা স্থির থাকে।

১৫·৫ বাষ্পায়ন, স্ফুটন ও স্ফুটনাঙ্ক
Evaporation, vaporization and melting point

আমরা জানি তরল পদার্থের বাষ্পে পরিণত হওয়ার প্রক্রিয়াকে বাষ্পীভবন বলে। বাষ্পীভবন দুটি ভিন্ন উপায়ে হতে পারে; যথা—**বাষ্পায়ন** (Evaporation) ও **স্ফুটন** (Boiling)।

(ক) বাষ্পায়ন : যে কোন তাপমাত্রায় তরল পদার্থের উপরিতল হতে এর ধীরে ধীরে বাষ্পে পরিণত হওয়াকে বাষ্পায়ন বলে। ঘরের তাপমাত্রায় পানি বাষ্পায়ন প্রক্রিয়ায় উবে যায়। বাষ্পায়নের দরুন গরমকালে খাল, বিল প্রভৃতি শুকিয়ে যায়।

তরল পদার্থ বাষ্পায়িত হবার সময় কিছু উচ্চ গতিসম্পন্ন অণু তরল ত্যাগ করে বের হয়ে যায়। ফলে অবশিষ্ট তরলের মোট গতিশক্তি হ্রাস পায় এবং তরলের তাপমাত্রা খানিকটা কমে যায়। তরল হতে উত্থিত কোন কোন অণু বায়ুর বা যে তলের সংস্পর্শে আসে এর সাথে ধাক্কা খাবার পর পুনরায় তরলে প্রবেশ করে। কাজেই তরলের উপরে বায়ু যত কম থাকবে অর্থাৎ বায়ুর চাপ যত কম হবে বাষ্পায়নও তত দ্রুত হবে।

(খ) স্ফুটন : একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় তরল পদার্থের সর্বত্র হতে খুব দ্রুত বাষ্পে পরিণত হবার প্রক্রিয়াকে স্ফুটন বলে।

কোন একটি তরল পদার্থকে ক্রমাগত উত্তপ্ত করতে থাকলে তার তাপমাত্রা ও বাষ্পায়নের হার ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে। প্রথমে তরল পদার্থের উপরিতল হতে ধীরে ধীরে বাষ্প উত্থিত হতে থাকে। তাপমাত্রা বৃদ্ধির সঙ্গে

সঙ্গে বাষ্পায়ন শুধুমাত্র তরল পদার্থের উপরিতলে সীমাবদ্ধ না থেকে সমগ্র তরল পদার্থে ছড়িয়ে পড়ে এবং বাষ্পায়ন দ্রুত গতিতে সংঘটিত হতে থাকে। এই অবস্থায় যতক্ষণ পর্যন্ত না সম্পূর্ণ পদার্থ বাষ্পে পরিণত হয় ততক্ষণ পর্যন্ত এর তাপমাত্রার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না। এই নির্দিষ্ট স্থির তাপমাত্রাকে **স্ফুটনাঙ্ক** (Boiling point) বলে। বিভিন্ন তরল পদার্থের স্ফুটনাঙ্ক বিভিন্ন এবং কোন একটি তরল পদার্থের স্ফুটনাঙ্ক তার উপরিতলে প্রযুক্ত চাপের উপর নির্ভর করে।

স্ফুটনাঙ্কের সংজ্ঞা ঃ একটি নির্দিষ্ট চাপে কোন একটি তরল পদার্থ যে তাপমাত্রায় পৌঁছে বাষ্পে পরিণত হতে শুরু করে এবং সম্পূর্ণ তরল পদার্থ বাষ্পে পরিণত না হওয়া পর্যন্ত ঐ তাপমাত্রার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না একে উক্ত চাপে ঐ পদার্থের স্ফুটনাঙ্ক বলে।

'স্বাভাবিক চাপে পানির স্ফুটনাঙ্ক 373 K'—এটা দ্বারা বুঝা যায় যে, স্বাভাবিক চাপে পানির স্ফুটন 373 K তাপমাত্রায় শুরু হয় এবং সম্পূর্ণ পানি বাষ্পে পরিণত না হওয়া পর্যন্ত ঐ তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না।

১৫.৬ স্ফুটনাঙ্কের উপর চাপের প্রভাব
Effect of pressure on boiling point

কোন তরল পদার্থের স্ফুটনাঙ্ক এর উপরিস্থিত চাপের উপর নির্ভরশীল। চাপ কমালে স্ফুটনাঙ্ক কমে যায় এবং চাপ বাড়ালে স্ফুটনাঙ্ক বৃদ্ধি পায়।

তরল পদার্থের উপর চাপ বৃদ্ধি পেলে তরল হতে উত্থিত বাষ্পীয় অণুকে ঐ চাপের বিরুদ্ধে ক্রিয়া করে বের হয়ে যেতে হয়। ফলে অণুগুলোকে উচ্চ তাপমাত্রায় উত্তেজিত করতে হয় এবং তরল পদার্থের স্ফুটনাঙ্ক স্বাভাবিক স্ফুটনাঙ্ক অপেক্ষা বেশি হয়। বিপরীতক্রমে তরল পদার্থের উপর চাপ কমালে তরল হতে উত্থিত বাষ্পীয় অণু পূর্বাপেক্ষা খানিকটা মুক্ত থাকে। এতে অণুগুলো অপেক্ষাকৃত কম তাপমাত্রায় উত্তেজিত হয়েই তরল হতে বের হয়ে যেতে পারে এবং তরল পদার্থের স্ফুটনাঙ্ক স্বাভাবিক স্ফুটনাঙ্ক অপেক্ষা কম হয়। পরীক্ষায় দেখা গেছে যে, **প্রতি 0·027 m চাপ বৃদ্ধি বা হ্রাসের দরুন পানির স্বাভাবিক স্ফুটনাঙ্ক 273 K করে বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়।**

উদাহরণ ঃ সুউচ্চ পর্বতের উপর রান্না করা দুরূহ।

আমরা জানি তরল পদার্থের স্ফুটনাঙ্ক এর উপরিস্থিত চাপের উপর নির্ভর করে। **চাপ বৃদ্ধি পেলে স্ফুটনাঙ্ক বৃদ্ধি পায় এবং চাপ হ্রাস পেলে স্ফুটনাঙ্ক হ্রাস পায়।**

পৃথিবী পৃষ্ঠে সমুদ্র সমতলে বায়ুর চাপ সর্বাধিক। অতএব তরল পদার্থের স্ফুটনাঙ্কও সর্বাধিক। সমুদ্র সমতলে পানির স্ফুটনাঙ্ক 373 K। যতই উপরে উঠা যায় বায়ুর চাপ ততই কমে। দার্জিলিং সমুদ্র সমতল হতে 6800 ফুট উচ্চে অবস্থিত, এখানে পানির স্ফুটনাঙ্ক 367 K। পরীক্ষার সাহায্যে দেখা গেছে **0·261 m চাপের পরিবর্তনে পানির স্ফুটনাঙ্ক 273 K পরিবর্তিত হয়**। এখন ব্যাখ্যা করি **সুউচ্চ পর্বতে রান্না করা দুরূহ কেন ?**

সুউচ্চ পর্বতের উপর বায়ুর চাপ স্বাভাবিক চাপ অপেক্ষা অনেক কম। ফলে সুউচ্চ পর্বতের উপর পানির স্ফুটনাঙ্ক স্বাভাবিক স্ফুটনাঙ্ক 373 K হতে অনেক কম। অর্থাৎ পর্বতের উপর পানি কম তাপমাত্রায় ফুটে। পর্বতের উপর স্ফুটনাঙ্ক কম হওয়ায় খোলা পাত্রে খাদ্যদ্রব্য সহজে সিদ্ধ হয় না। খাদ্যদ্রব্য পূর্ণমাত্রায় সিদ্ধ করতে অনেক বেশি সময় লাগে ও জ্বালানি খরচ বেশি হয়। এসব কারণে সুউচ্চ পর্বতে রান্না করা দুরূহ হয়ে পড়ে।

এই অসুবিধা দূর করার জন্য রান্না করার সময় পাত্রকে ঢেকে রাখতে হয়।

১৫.৭ বাষ্পায়ন ও স্ফুটনের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between evaporation and boiling point

বাষ্পায়ন ও স্ফুটনের ফলে তরল পদার্থের একই পরিণতি ঘটলেও তাদের মধ্যে পার্থক্য রয়েছে। পার্থক্যসমূহ নিম্নরূপ ঃ

বাষ্পায়ন	স্ফুটন
১। যে প্রক্রিয়ায় কোন তরল পদার্থ যে কোন তাপমাত্রায় শুধুমাত্র তার উপরিতল হতে ধীরে ধীরে বাষ্পে পরিণত হয়, তাকে বাষ্পায়ন বলে।	১। যে প্রক্রিয়ায় কোন তরল পদার্থ স্থির চাপে একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় পৌঁছে এর সর্বত্র হতে দ্রুত বাষ্পে পরিণত হয়, তাকে স্ফুটন বলে।
২। বাষ্পায়নে তরল পদার্থ ধীরে ধীরে বাষ্পে পরিণত হয়।	২। স্ফুটনে তরল পদার্থ দ্রুত বাষ্পে পরিণত হয়।
৩। বাষ্পায়ন সকল তাপমাত্রায় ঘটে থাকে।	৩। একটি নির্দিষ্ট চাপে কোন একটি তরল পদার্থের স্ফুটন একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় সংঘটিত হয়। এই তাপমাত্রাকে ঐ চাপে উক্ত তরলের স্ফুটনাঙ্ক বলে।
৪। তরল পদার্থের শুধু উপরিতল হতে বাষ্পায়ন হয়।	৪। স্ফুটনে সমগ্র তরল পদার্থ হতে বাষ্প উথিত হয়।
৫। বাষ্পায়ন তরল পদার্থের উপরিতলের ক্ষেত্রফলের উপর নির্ভর করে।	৫। স্ফুটন অনেকাংশে তরল পদার্থে তাপ সরবরাহের উপর নির্ভর করে।
৬। বাষ্পায়নে শৈত্যের সৃষ্টি হয়।	৬। স্ফুটনে শৈত্যের সৃষ্টি হয় না।
৭। তরল হতে উত্থিত বাষ্পের চাপ তরলের উপরিস্থিত চাপ অপেক্ষা কম।	৭। তরল হতে উত্থিত বাষ্পের চাপ তরলের উপর প্রযুক্ত চাপের সমান।
৮। বাষ্পায়নের সময় তরল পদার্থে কোন বুদ্‌বুদ্ সৃষ্টি হয় না।	৮। স্ফুটনের সময় তরল পদার্থে বুদ্‌বুদ্ দেখা দেয়।

১৫.৮ সুপ্ত তাপ বা লীন তাপ
Latent heat

কোন বস্তুকে ক্রমাগত উত্তপ্ত করতে থাকলে সাধারণত এর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায় এবং একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় তা এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থাতে পরিবর্তিত হতে থাকে। বস্তুটির অবস্থার পরিবর্তন যতক্ষণ পর্যন্ত চলতে থাকে ততক্ষণ পর্যন্ত তাপ প্রদান সত্ত্বেও তার তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না। কিন্তু সম্পূর্ণ বস্তুটি পরবর্তী অবস্থায় পরিবর্তিত হবার পরপরই পুনরায় তার তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেতে থাকে।

273 K তাপমাত্রার এক খণ্ড বরফকে ক্রমাগত উত্তপ্ত করতে থাকলে তা ক্রমশ গলতে থাকে এবং সম্পূর্ণ খণ্ডটি গলে পানিতে পরিণত না হওয়া পর্যন্ত ঐ তাপমাত্রার কোনরূপ পরিবর্তন হয় না। তাপ প্রয়োগ অব্যাহত রাখলে বরফ গলা পানি ক্রমশ উত্তপ্ত হয়ে 373 K তাপমাত্রায় জলীয় বাষ্পে পরিণত হতে থাকে এবং সম্পূর্ণ পানি বাষ্পে পরিণত না হওয়া পর্যন্ত তার তাপমাত্রা 273 K স্থির থাকে। বিপরীতক্রমে ফুটন্ত পানি হতে উদ্‌গত বাষ্পকে ক্রমাগত ঠাণ্ডা করতে থাকলে 273 K তাপমাত্রায় তা পানিতে পরিণত হতে শুরু করে এবং সম্পূর্ণ বাষ্প পানিতে পরিণত হওয়ার পর পরই কেবল ঐ তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটে। আবার কিছু পরিমাণ পানিকে ক্রমাগত শীতল করতে থাকলে 273 K তাপমাত্রায় তা জমে বরফে পরিণত হতে থাকে এবং যতক্ষণ পর্যন্ত না সম্পূর্ণ পানি বরফে পরিণত হয় ততক্ষণ পর্যন্ত শীতল করা সত্ত্বেও তার তাপমাত্রা 273 K স্থির থাকে। সুতরাং দেখা যাচ্ছে কঠিন পদার্থকে তরলে বা তরল পদার্থকে বায়বীয় পদার্থে এক কথায় **যে কোন বস্তুকে এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় পরিণত করতে কিছু তাপ বর্জন বা শোষণের প্রয়োজন হয়।** এই তাপ বাহ্যিক প্রকাশ পায় না অর্থাৎ বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটে না। একে সুপ্ত তাপ বা লীন তাপ বলে।

সংজ্ঞা ঃ যে তাপ বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় তাকে বস্তুর ঐ অবস্থা পরিবর্তনের সুপ্ত তাপ বা লীন তাপ বলে।

বস্তু কর্তৃক গৃহীত বা বর্জিত তাপ পদার্থের অবস্থার পরিবর্তন ঘটাতে কাজ করে। আমরা জানি কঠিন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যকার প্রবল আকর্ষণ বলের জন্য নিয়মিত সজ্জায় সজ্জিত থাকে। অণুগুলো নিজ নিজ অবস্থানে থেকে কাঁপতে থাকে। তাপমাত্রা বাড়ালে অণুগুলোর কম্পন বাড়তে থাকে এবং এক সময় অণুগুলোর নিয়মিত সজ্জা ভেঙ্গে যায়। এই অবস্থা পরিবর্তনের জন্য তাপ ব্যয় হয় বলেই তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না। তরল পদার্থের ক্ষেত্রে ও অনুরূপ ঘটনা ঘটে। তরলের অণুগুলোর মধ্যকার আকর্ষণ বল কঠিন পদার্থের অণুগুলোর মধ্যকার বলের ন্যায় প্রবল না হলেও কিছুটা আকর্ষণ বল রয়েছে, যা অণুগুলোকে এক জায়গায় ধরে রাখে। তরল থেকে বায়বীয় অবস্থায় পরিবর্তনের জন্য তাপশক্তির প্রয়োজন হয়। ফলে প্রযুক্ত তাপ অবস্থা পরিবর্তনের কাজে ব্যয়িত হয় বলেই তরল থেকে বায়বীয় অবস্থায় পরিবর্তনের সময়ও তাপমাত্রা স্থির থাকে।

১৫·৯ আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ
Specific latent heat

বস্তুর অবস্থা পরিবর্তনের জন্য যে সুপ্ত তাপ প্রয়োজন হয় তা বস্তুর ভর ও উপাদানের উপর নির্ভর করে। সুতরাং একই পদার্থের ভর ভিন্ন হলে সুপ্ত তাপও ভিন্ন হবে। বেশি ভরের সুপ্ত তাপ বেশি হবে। কিন্তু একক ভরের কোন নির্দিষ্ট বস্তুর সুপ্ত তাপ কেবল বস্তুর উপাদানের উপর নির্ভর করে। একক ভরের এই সুপ্ত তাপকে আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে।

সংজ্ঞা ঃ একক ভরের কোন বস্তু তার তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় পরিণত হতে যে পরিমাণ তাপ গ্রহণ বা বর্জন করে তাকে ঐ বস্তুর ঐ অবস্থা পরিবর্তনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে। একে L দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি m ভরের কোন পদার্থকে তার তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন না ঘটিয়ে এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় পরিণত করতে Q পরিমাণ তাপ গ্রহণ বা বর্জন করল। অতএব ঐ বস্তুর আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ,

$$L = \frac{\text{তাপ}}{\text{ভর}} = \frac{Q}{m} \quad \ldots \quad (1)$$

আপেক্ষিক সুপ্ত তাপের একক ঃ এস. আই. পদ্ধতিতে তাপের একক জুল এবং ভরের একক কিলোগ্রাম। অতএব, আপেক্ষিক সুপ্ত তাপের একক জুল/কিলোগ্রাম (Jkg^{-1})।

আপেক্ষিক সুপ্ত তাপের প্রকারভেদ ঃ আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ মূলত চার প্রকার।

(১) গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ (Latent heat of fusion)

(২) কঠিনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ (Latent heat of solidification)

(৩) বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ (Latent heat of vaporisation) এবং

(৪) ঘনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ (Latent heat of condensation)।

নিম্নে এগুলো ব্যাখ্যা করা হল।

(১) গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ কোন কঠিন পদার্থের একক ভরকে তার গলনাঙ্কে রেখে তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে কঠিন হতে তরলে পরিণত করতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে ঐ পদার্থের গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে। একে L_f দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। $L_f = Q/m$.

মনে করি, বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ 336000 J kg^{-1}। উক্ত উক্তি দ্বারা আমরা বুঝি, 273 K বা, 0°C তাপমাত্রার 1 kg বরফকে উক্ত তাপামাত্রার পানিতে পরিণত করতে 336000 J তাপের প্রয়োজন হবে।

(২) কঠিনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ একক ভরের কোন তরল পদার্থকে এর তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে শুধুমাত্র তরল অবস্থা হতে কঠিন অবস্থায় পরিণত হতে যে পরিমাণ তাপ পরিত্যক্ত হয় তাকে ঐ তরলের কঠিনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে।

273 K বা 0°C তাপমাত্রার 1 kg পানি হতে 336000 J তাপ নিষ্কাশিত বা অপসারিত হলে তা 273 K বা 0°C-এর বরফে পরিণত হবে। অতএব পানির কঠিনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ 336000 J kg^{-1}।

(৩) **বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ একক ভরের তরল পদার্থকে তার স্ফুটনাঙ্কে রেখে তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন না ঘটিয়ে শুধু তরল হতে বাষ্পে পরিণত করতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয় তাকে ঐ তরলের বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে।** একে L_v দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $L_v = Q/m$.

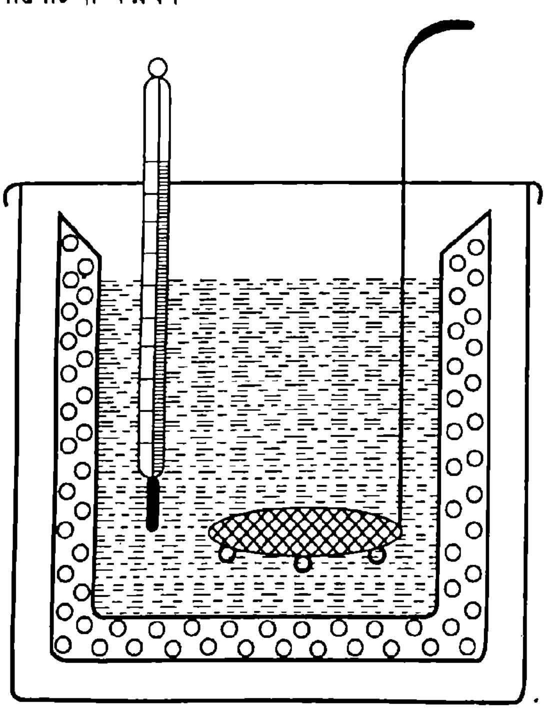
পানির বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ 2268000 J kg^{-1}—এই উক্তি দ্বারা আমরা বুঝি যে, 1kg পানিকে তার স্ফুটনাঙ্কে অর্থাৎ 373 K-এ রেখে 2268000 J তাপ প্রয়োগ করলে তা 373 K বা 100°C-এর বাষ্পে পরিণত হবে।

(৪) **ঘনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ একক ভরের কোন বায়বীয় পদার্থকে তার তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন না ঘটিয়ে শুধুমাত্র বায়বীয় অবস্থা হতে তরলে পরিণত করতে যে পরিমাণ তাপ বর্জিত হয় তাকে ঐ বায়বীয় পদার্থের ঘনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে।**

373 K বা 100°C তাপমাত্রার 1 kg জলীয় বাষ্প হতে 2268000 J তাপ বের হয়ে গেলে তা 373 K বা 100°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হবে অর্থাৎ জলীয় বাষ্পের ঘনীভবনের সুপ্ত তাপ 2268000 J kg^{-1}।

১৫·১০ বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ নির্ণয়
Determination of latent heat of fusion of ice

বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বিভিন্ন পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়। এখানে আমরা শুধু **মিশ্রণ পদ্ধতি** আলোচনা করব।



চিত্র ১৫·২

কার্যপদ্ধতি (Procedure) ঃ প্রথমে একটি পরিষ্কার ও শুষ্ক ক্যালরিমিটারের আলোড়কের নিচের প্রান্তে সরু তারের একটি জাল যুক্ত করি [চিত্র ১৫·২]। এখন আলোড়কসহ ক্যালরিমিটার ওজন করি। অতঃপর ক্যালরিমিটারের দুই-তৃতীয়াংশ সামান্য উষ্ণ পানিতে ভর্তি করে পুনরায় ওজন করি। দ্বিতীয় ও প্রথম পরিমাপের পার্থক্য হতে পানির ভর পাওয়া যায়। একটি থার্মোমিটারে পানির স্থির তাপমাত্রা পড়ে দেখি। এখন কয়েক টুকরা পরিষ্কার বরফ চোষ কাগজ দ্বারা শুষ্ক করে তাড়াতাড়ি এর কয়েকটি টুকরা তাপ কুপরিবাহী চিমটা দ্বারা ধরে ক্যালরিমিটারের পানিতে যোগ করি এবং আলোড়কের জাল দ্বারা টুকরাগুলোকে সর্বদা পানির নিচে রেখে আস্তে আস্তে পানি নাড়তে থাকি। এ অবস্থায় বরফ গলতে থাকে এবং পানির তাপমাত্রা ক্রমশ কমতে থাকে। সমস্ত বরফ গলে যাওয়ার পর থার্মোমিটার দ্বারা মিশ্রণের সর্বনিম্ন তাপমাত্রার পাঠ গ্রহণ করি। এর পর পানি ঘরের তাপমাত্রা লাভ করলে পানিসহ ক্যালরিমিটার ওজন করি। ওজনের সর্বশেষ দুই পরিমাপের পার্থক্য হতে গলিত বরফের ভর পাওয়া যায়।

হিসাব ও গণনা ঃ

মনে করি

আলোড়কসহ ক্যালরিমিটারের ভর = M kg

উষ্ণ পানির ভর = m_1 kg

বরফের ভর = m kg

উষ্ণ পানির তাপমাত্রা = θ_1°C

মিশ্রণের তাপমাত্রা = θ°C

ক্যালরিমিটারের উপাদানের আপেক্ষিক তাপ = $S \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

পানির আপেক্ষিক তাপ = $S_1 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

এবং বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ = $L_f \text{ J kg}^{-1}$

এখানে ক্যালরিমিটার এবং উষ্ণ পানি তাপ হারাবে।

θ_1°C হতে θ°C-এ নামতে ক্যালরিমিটার কর্তৃক হারানো তাপ

Q_1 = ভর × আঃ তাপ × আপেক্ষিক তাপমাত্রার পার্থক্য

$= MS(\theta_1 - \theta)$ J

পুনঃ, θ_1°C হতে θ°C-এ নামতে উষ্ণ পানি কর্তৃক হারানো তাপ,

Q_2 = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= m_1S_1(\theta_1 - \theta)$ J

মোট হারানো তাপ, $Q = Q_1 + Q_2$

$$= MS(\theta_1 - \theta) \text{ J} + m_1S_1(\theta_1 - \theta) \text{ J}$$

$$= (MS + m_1S_1)(\theta_1 - \theta) \text{ J} \qquad \text{(A)}$$

বরফ দুই পর্যায়ে এ তাপ গ্রহণ করবে। প্রথমত 0°C তাপমাত্রায় বরফ গলে 0°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হতে গৃহীত তাপ

Q_3 = ভর × আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ

$$= m \times L_f \text{ J} \qquad \text{(i)}$$

দ্বিতীয়ত 0°C হতে θ°C-এ উঠতে গলিত বরফ পানি কর্তৃক গৃহীত তাপ

Q_4 = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$$= mS_1(\theta - 0) \qquad \text{(ii)}$$

$$= mS_1\theta \text{J}$$

সুতরাং মোট গৃহীত তাপ

$$Q' = Q_3 + Q_4$$

$$= mL_f \text{J} + mS_1\theta \text{ J}$$

$$= (mL_f + mS_1\theta) \text{ J} \qquad \text{(B)}$$

যদি অন্য কোন উপায়ে তাপের আদান-প্রদান না হয়ে থাকে তবে তার মোট হারানো তাপ = মোট গৃহীত তাপ

সমীকরণ (A) = সমীকরণ (B)

বা, $Q = Q'$

বা, $(MS + m_1S_1)(\theta_1 - \theta) \text{ J} = (mL_f + mS_1\theta) \text{ J}$

নির্ণেয় সুপ্ত তাপ

$$L_f = \left\{\frac{(MS + m_1S_1)(\theta_1 - \theta)}{m} - S_1\theta\right\} \text{J kg}^{-1} \qquad (2)$$

এখন M, S, m_1, m, θ_1 এবং θ-এর মান জেনে L_f-এর মান বের করা হয়।

সতর্কতা ঃ

১। বরফের খণ্ডগুলোকে চোষ কাগজ (blotting paper)-এর সাহায্যে মুছে শুকিয়ে নিতে হয় যাতে বরফের গায়ে পানি লেগে না থাকে। বরফের সাথে কিছু পানি ক্যালরিমিটারে প্রবেশ করলে L_f-এর মান প্রকৃত মান অপেক্ষা কম হবে।

২। বরফের টুকরাগুলো হাত দিয়ে না ধরে চিমটা দিয়ে ধরে তাড়াতাড়ি পানিতে ফেলতে হয়, যাতে হাতের স্পর্শে এবং পরিপার্শ্ব হতে তাপ গ্রহণ করে বরফ গলে না যায়। বরফের সাথে পানি প্রবেশ করলে L_f-এর সঠিক মান পাওয়া যাবে না।

৩। বরফ খণ্ড আলোড়ক বা জালযুক্ত নাড়ানি দিয়ে নাড়তে হবে যাতে বরফের খণ্ডগুলো পানির উপরে ভাসতে না পারে। বরফ খণ্ডগুলো পানির উপরে ভাসলে বায়ুমণ্ডল হতে কিছু তাপ গ্রহণ করবে ফলে L_f-এর মান প্রকৃত মান অপেক্ষা কম হবে।

৪। বিকিরণ প্রক্রিয়ায় তাপক্ষয় রোধ করার জন্য বরফ ফেলার পূর্বে ক্যালরিমিটার ও পানির তাপমাত্রা এবং কক্ষ তাপাত্রার পার্থক্য 5°C-এর কম রাখা হয়। আবার বরফের পরিমাণ এমন নেওয়া উচিত যাতে মিশ্রণের তাপমাত্রা কক্ষ তাপমাত্রার 5°C কম হয়। কক্ষ তাপমাত্রার উপরে এবং নিচে সমান তাপমাত্রার পার্থক্য থাকায় বরফ ফেলার পূর্বে ক্যালরিমিটার হতে যে পরিমাণ তাপ ক্ষয় হয়, মিশ্রণের পর সমপরিমাণ তাপ পরিপার্শ্ব হতে ক্যালরিমিটারে প্রবেশ করে, ফলে L_f-এর পরিবর্তন হয় না।

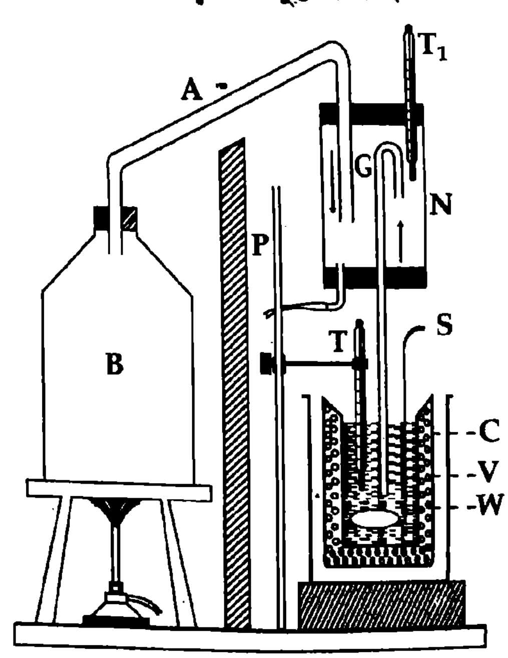
১৫·১০ মিশ্রণ পদ্ধতিতে পানির বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ নির্ণয়

Determination of latent heat of vaporisation of water by mixture method

নিচের চিত্রে [চিত্র ১৫·৩] পরীক্ষার আবশ্যকীয় ব্যবস্থাপনা দেখান হয়েছে।

যন্ত্রের বর্ণনা ঃ B একটি স্ফুটন পাত্র বা বয়লার (Boiler)। এই পাত্রে পানি নিয়ে বার্ণারের সাহায্যে পানি উত্তপ্ত করে জলীয় বাষ্প উৎপন্ন করা হয়। পাত্রের মুখের ছিদ্র দিয়ে একটি বাঁকা নল A যুক্ত রয়েছে।

N একটি মোটা কাচের চোঙ ; এর নাম বাষ্প-ফাঁদ (steam-trap)। এটি বাষ্পকে পানি হতে মুক্ত করে। N চোঙের দুই মুখ কর্ক দ্বারা বন্ধ। উপরের কর্কের মধ্য দিয়ে নল A-এর মুক্ত প্রান্ত বাষ্প-ফাঁদের প্রায় নিচের মুখ পর্যন্ত এবং কর্কের মধ্য দিয়ে আর একটি কাচের নল G বাষ্প-ফাঁদের প্রায় উপরের মুখ পর্যন্ত প্রবেশ করান থাকে। G নলের নিচের প্রান্ত ক্যালরিমিটার C-এ ঢুকানো থাকে। A নল দিয়ে বাষ্পের সাথে পানি বাষ্প-ফাঁদে প্রবেশ করলে, ঐ পানি নিচের কর্কের উপর থেকে যায় এবং শুষ্ক বাষ্প G নল দিয়ে ক্যালরিমিটারে প্রবেশ করে। বাষ্প-ফাঁদের নিচের কর্কের উপর পানি জমা হলে তা ঐ কর্কের সাথে যুক্ত আর একটি নল দিয়ে ফাঁদ হতে বের হয়ে যায়।



চিত্র ১৫·৩

P একটি পর্দা। বার্ণার ও স্ফুটন পাত্র হতে ক্যালরিমিটারে সরাসরি তাপ চলাচল বন্ধ করার জন্য তাদের মাঝে অ্যাস্‌বেস্টসের তৈরি এই পর্দা দেয়া থাকে।

কার্যপ্রণালী ঃ প্রথম স্ফুটন পাত্র B-তে পানি ফুটিয়ে বাষ্প উৎপন্ন করি। পানি ফুটে ওঠার অবসরে নাড়ানীসহ একটি পরিষ্কার ও শুষ্ক ক্যালরিমিটার ওজন করি। এর দুই-তৃতীয়াংশ কক্ষ তাপমাত্রায় বিশুদ্ধ পানিতে ভর্তি করি এবং পুনরায় ওজন করি। এই দুই-এর পার্থক্য হতে ঠাণ্ডা পানির ভর বের করি। একটি সুবেদী থার্মোমিটারের সাহায্যে ক্যালরিমিটার ও ঠাণ্ডা পানির প্রাথমিক তাপমাত্রা বের করি। যখন B পাত্র হতে আগত জলীয় বাষ্প বাষ্প-ফাঁদে পানিমুক্ত হবার পর G নল দিয়ে বের হতে থাকে, তখন ক্যালরিমিটারটিকে বাষ্প-ফাঁদের নিচে বসিয়েই ঐ নলের নিচের মুখটি ক্যালরিমিটারের পানির মধ্যে ডুবিয়ে দেই এবং বাষ্পের তাপমাত্রা T_1 থার্মোমিটারে গ্রহণ করি। এ অবস্থায় পানিমুক্ত বাষ্প ক্যালরিমিটারের সাধারণ পানির সংস্পর্শে তাপ বর্জন করে ঘনীভূত হয়ে পানিতে পরিণত হয়। এতে ক্যালরিমিটার ও পানির তাপমাত্রা বাড়তে থাকে। পানির তাপমাত্রা কক্ষ তাপমাত্রা হতে প্রায় 5°C বেশি হলে ক্যালরিমিটার হতে G নলটি সরিয়ে নিই। এর পর থার্মোমিটার T-এর সাহায্যে পানির সর্বোচ্চ তাপমাত্রার পাঠ গ্রহণ করি। কিছুক্ষণ পর তাদের ওজন নিই। ওজনের তৃতীয় ও দ্বিতীয় পরিমাপের পার্থক্য হতে ঘনীভূত বাষ্পের পরিমাণ নির্ণয় করি।

হিসাব ও গণনা ঃ

মনে করি,

আলোড়কসহ ক্যালরিমিটারের ভর = W kg

ক্যালরিমিটারের উপাদানের আঃ তাপ = $S \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

ক্যালরিমিটারে ব্যবহৃত পানির ভর = M kg

পানির আঃ তাপ = $S_1 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

ঘনীভূত বাষ্পের ভর = m kg

ক্যালরিমিটার ও পানির প্রাথমিক তাপমাত্রা = θ_1°C

মিশ্রণের সর্বোচ্চ তাপমাত্রা = θ°C

স্ফুটন পাত্র হতে উত্থিত বাষ্পের তাপমাত্রা = 100°C

এবং পানির বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ = $L_v \text{ J kg}^{-1}$

এখানে ক্যালরিমিটার ও পানি তাপ গ্রহণ করবে এবং বাষ্প দুই পর্যায়ে সে তাপ হারাবে।

এখন, θ_1° C হতে θ°C-এ উঠতে আলোড়কসহ ক্যালরিমিটার কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$Q_1 = \text{ভর} \times \text{আঃ তাপ} \times \text{তাপমাত্রার পার্থক্য}$$

$$= WS(\theta - \theta_1) \text{ J}$$

θ_1°C হতে θ°C-এ উঠতে পানি কর্তৃক গৃহীত তাপ

$$Q_2 = \text{ভর} \times \text{আঃ তাপ} \times \text{তাপমাত্রায় পার্থক্য}$$

$$= MS_1(\theta - \theta_1) \text{ J}$$

মোট গৃহীত তাপ, $Q = Q_1 + Q_2$

$$= (WS + MS_1)(\theta - \theta_1) \text{ J} \qquad (A)$$

পুনঃ 100°C তাপমাত্রার বাষ্প ঘনীভূত হয়ে 100°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হতে হারানো তাপ

$$Q_3 = \text{ভর} \times \text{বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ}$$

$$= (m \times L_v) \text{ J}$$

100° C হতে θ°C-এ নামতে ঘনীভূত বাষ্প (যা পানিতে পরিণত হয়েছে) কর্তৃক হারানো তাপ

$$Q_4 = \text{ভর} \times \text{আঃ তাপ} \times \text{তাপমাত্রার পার্থক্য}$$

$$= mS_1(100 - \theta) \text{ J}$$

মোট হারানো তাপ

$$Q' = Q_3 + Q_4$$
$$= mL_v \text{ J} + mS_1 (100 - \theta) \text{ J}$$
$$= \{mL_v + mS_1 (100 - \theta)\} \text{ J} \quad \text{(B)}$$

সুতরাং তাপ পরিমাপের নীতি হতে পাই মোট হারানো তাপ = মোট গৃহীত তাপ

বা, সমীকরণ (A) = সমীকরণ (B)

বা, $Q' = Q$

বা, $\{mL_v + mS_1 (100 - \theta)\} \text{ J} = (WS + MS_1)(\theta - \theta_1) \text{ J}$

$$\text{নির্ণেয় } L_v = \left[\frac{(WS + MS_1)(\theta - \theta_1)}{m} - S_1 (100 - \theta)\right] \text{J kg}^{-1} \quad (3)$$

এখন W, S, M, S_1, m, θ এবং θ_1 -এর মান জেনে সমীকরণ হতে L_v-এর মান বের করা হয়।

সতর্কতা ঃ

১। ক্যালরিমিটারে ধীরে ধীরে বাষ্প প্রবাহিত করতে হবে যাতে পানি ছিটকে বাইরে না পড়ে। পানি বাইরে ছিটকে পড়লে L_v-এর প্রকৃত মান প্রাপ্ত মান অপেক্ষা কম হবে।

২। বাষ্প ফাঁদ হতে বাষ্প ক্যালরিমিটারে প্রবেশ করার পথে বাষ্প যাতে ঘনীভূত না হয়, সেজন্য বাষ্প ফাঁদের নির্গম নলটিকে তুলা বা অন্য অপরিবাহী পদার্থ দ্বারা আবৃত রাখতে হবে। অন্যথায় L_v-এর প্রকৃত মান কম হবে।

৩। বাষ্প খুব ধীরে ধীরে তৈরি করতে হবে। অন্যথায় বাষ্প ফাঁদের নির্গম নল দিয়ে বাষ্পের সাথে পানি প্রবেশ করতে পারে। এতে L_v-এর মান পরিবর্তিত হবে।

৪। ক্যালরিমিটারকে তাপক্ষয় নিরোধক প্রকোষ্ঠে রাখতে হবে যাতে পরিবহণ ও পরিচলন প্রক্রিয়ায় ক্যালরিমিটার হতে তাপ ক্ষয় না হয়।

৫। ক্যালরিমিটার এবং বয়লারের মাঝখানে একটি অপরিবাহী পদার্থের পার্টিশন রাখতে হবে, যাতে ক্যালরিমিটার বয়লার হতে কোন তাপ গ্রহণ করতে না পারে।

৬। বিকিরণজনিত তাপক্ষয় রোধ করার জন্য পরীক্ষণের শুরুতে ক্যালরিমিটার ও পানির তাপমাত্রা পরিপার্শ্বের তাপমাত্রা অপেক্ষা 5°C কম থাকে। আবার ক্যালরিমিটারে নির্দিষ্ট পরিমাণ বাষ্প প্রবাহিত করতে হবে যাতে মিশ্রণের চূড়ান্ত তাপমাত্রা পরিপার্শ্বের তাপমাত্রা অপেক্ষা 5°C বেশি হয়। এতে বিকিরণজনিত ত্রুটি দূর হবে।

১৫·১০ কয়েকটি পদার্থের গলনাঙ্ক, স্ফুটনাঙ্ক, আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ

পদার্থ	গলনাঙ্ক (°C)	গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ (Jkg^{-1})	স্ফুটনাঙ্ক (°C)	বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ (Jkg^{-1})
পানি	0·0	$33·5 \times 10^4$	100	$22·6 \times 10^5$
পারদ	− 38·9	$1·14 \times 10^4$	356·6	$2·96 \times 10^5$
বেনজিন	5·5	$12·6 \times 10^4$	80·1	$3·94 \times 10^5$
ইথাইল অ্যালকোহল	− 114·4	$10·8 \times 10^4$	78·3	$8·55 \times 10^5$
তামা	1083	$20·7 \times 10^4$	2566	$47·3 \times 10^5$
সোনা	1063	$6·28 \times 10^4$	2808	$17·2 \times 10^5$
সীসা	327·3	$2·32 \times 10^4$	1750	$8·59 \times 10^5$
লোহা	1538	$28·9 \times 10^4$	2750	$63·4 \times 10^5$

১৫.১১ সঙ্কট ধ্রুবক
Critical constant

প্রত্যেক গ্যাসের তিনটি সঙ্কট ধ্রুবক আছে ; যথা—সঙ্কট তাপমাত্রা, সঙ্কট চাপ ও সঙ্কট আয়তন।

সঙ্কট তাপমাত্রা (Critical temperature) : কোন গ্যাসকে যে কোন তাপমাত্রায় রেখে শুধুমাত্র চাপ প্রয়োগে তরল অবস্থায় রূপান্তরিত করা যায় না। তাপমাত্রা একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রার সমান অথবা নিচে থাকলে তাকে শুধু চাপ প্রয়োগে তরলে পরিণত করা যায়। এই তাপমাত্রাকে উক্ত গ্যাসের **সঙ্কট তাপমাত্রা** বা **ক্রান্তি তাপমাত্রা** বলে।

সংজ্ঞা : একটি গ্যাস সর্বোচ্চ যে তাপমাত্রায় থাকলে শুধু চাপ প্রয়োগে তাকে তরলে পরিবর্তন করা যায় একে এর সঙ্কট তাপমাত্রা বলে। বিভিন্ন গ্যাসের সঙ্কট তাপমাত্রা বিভিন্ন। যেমন কার্বন ডাই-অক্সাইড, হাইড্রোজেন ও অক্সিজেনের সঙ্কট তাপমাত্রা যথাক্রমে 304·1 K, 249 K এবং 254 K।

'কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের সঙ্কট তাপমাত্রা 304·1 K' —এটা দ্বারা বুঝা যায় যে, তাপমাত্রা 304·1K অথবা তার নিচে থাকলে কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসকে শুধু চাপ প্রয়োগ দ্বারা তরলে পরিণত করা যাবে এবং এই তাপমাত্রার উর্ধ্বে থাকলে চাপ প্রয়োগ দ্বারা তাকে তরলে পরিণত করা যাবে না।

সঙ্কট চাপ (Critical pressure) : কোন গ্যাসের সঙ্কট তাপমাত্রায় যে চাপ প্রয়োগ করে তাকে তরলে পরিণত করা যায় তাকে ঐ গ্যাসের সঙ্কট চাপ বলে। হাইড্রোজেন, অক্সিজেন ও কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের সঙ্কট চাপ যথাক্রমে 13 , 50 ও 73 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান। **কাজেই 304·1 K তাপমাত্রায় কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসে 73 বায়ুমণ্ডলীয় চাপের সমান চাপ প্রয়োগ করলে তা তরলে পরিণত হবে।**

সঙ্কট আয়তন (Critical volume) : সঙ্কট তাপমাত্রা ও চাপে একক ভরের কোন গ্যাসের আয়তনকে এর সঙ্কট আয়তন বলে। হাইড্রোজেন, অক্সিজেন ও কার্বন ডাই-অক্সাইড গ্যাসের সঙ্কট আয়তন যথাক্রমে 0·322, 0·032 এবং 0·0217 m^3 । এই উক্তির অর্থ—সঙ্কট তাপমাত্রা এবং চাপে 1 kg হাইড্রোজেন, 1 kg অক্সিজেন এবং 1 kg কার্বন ডাই-অক্সাইডের আয়তন যথাক্রমে 0·322 m^3 , 0·032 m^3 এবং 0·0217 m^3 ।

১৫.১২ দশা
Phase

আমরা জানি পদার্থ তিনটি অবস্থায় থাকতে পারে, যথা— (১) কঠিন (Solid), (২) তরল (Liquid) এবং (৩) বায়বীয় বা গ্যাস (Gas)। পদার্থের এমনি অবস্থাকে এক একটি **দশা** বলে। দশা শব্দের শব্দগত অর্থ **অবস্থা**। কিন্তু বিজ্ঞানের ভাষায় দশার নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা : কোন ব্যবস্থা বা সিস্টেমের একটি নির্দিষ্ট অংশ যার উপাদানগত গঠন সর্বত্র অভিন্ন এবং ভৌত বিচারে অন্যান্য অংশ থেকে পৃথকযোগ্য অর্থাৎ কোন যান্ত্রিক প্রক্রিয়ায় অন্যান্য অংশ হতে সহজে পৃথক করা যায়, তাকে দশা বলে।

সিস্টেম বা ব্যবস্থা বলতে আমরা বুঝি জড় জগতের একটি নির্দিষ্ট অংশ যার উপর পরীক্ষা-নিরীক্ষা চালান হয়।

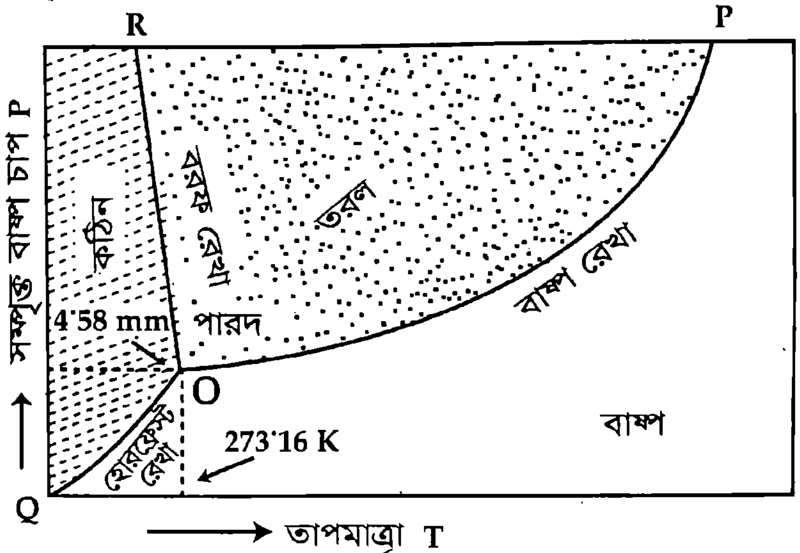
দশাকে দুই ভাগে ভাগ করা হয়, যথা : **(ক) সমসত্ত্ব দশা** (Homogeneous phase) এবং **(খ) অসমসত্ত্ব দশা** (Heterogeneous phase)।

সমসত্ত্ব দশা : যে ব্যবস্থায় বা সিস্টেমে মাত্র একটি দশা আছে, তাকে সমসত্ত্ব দশা বলে। অক্সিজেন (O_2) এবং হাইড্রোজেনের সমন্বয়ে পানি (H_2O) উৎপন্ন হয়। পানি একটি তরল পদার্থ যার উপাদানগত গঠন সর্বত্র সমান। এটি একটি সমসত্ত্ব দশা।

অসমসত্ত্ব দশা : যে ব্যবস্থায় একাধিক দশা বিদ্যমান আছে, তাকে অসমসত্ত্ব দশা বলে। যেমন— একটি আবদ্ধ পাত্রে পানি-জলীয় বাষ্প একত্রে একটি ব্যবস্থা বা সিস্টেম নির্দেশ করে কিন্তু পানি ও জলীয় বাষ্প দুটি ভিন্ন দশা। সুতরাং, পানি ও জলীয় বাষ্প একটি অসমসত্ত্ব দশা।

১৫.১৩ দশা চিত্র এবং ত্রৈধ বিন্দু
Phase diagram and Triple point

দশাচিত্র ঃ সংজ্ঞা ঃ কোন পদার্থের সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ বনাম তাপমাত্রা নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাকে দশা চিত্র বলা হয়।



চিত্র ১৫.৪

অথবা, **কোন পদার্থের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ ও তাপমাত্রার মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের জন্য যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তাকে দশা চিত্র বলে।**

পানির দশা চিত্র ঃ একটি ছক কাগজের X-অক্ষে তাপমাত্রা এবং Y-অক্ষে সম্পৃক্ত বাষ্প চাপ স্থাপন করে দশাচিত্র অঙ্কন করা হল।

যে তাপমাত্রায় পানি এবং জলীয় বাষ্প সহ-অবস্থানে থাকে, সে তাপমাত্রা বনাম সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে যে লেখচিত্র পাওয়া যাবে তাকে OP রেখা দ্বারা সূচিত করি। এ রেখার নাম **বাষ্প রেখা** (Steam line) যে তাপমাত্রায় কঠিন (বরফ) এবং জলীয় বাষ্প সহ-অবস্থানে থাকে, সে তাপমাত্রা বনাম সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে যে লেখচিত্র পাওয়া যাবে, তাকে OQ রেখা দ্বারা সূচিত করি। এ রেখার নাম **হোরফ্রোস্ট রেখা** (Hoarfrost line)। আবার যে তাপমাত্রায় কঠিন (বরফ) এবং তরল (পানি) সহ-অবস্থানে থাকে সে তাপমাত্রা বনাম সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্পের চাপ নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করলে যে লেখচিত্র পাওয়া যাবে তাকে OR রেখা দ্বারা সূচিত করি। এই রেখার নাম **বরফ রেখা** (Ice line)।

উপরোক্ত **তিনটি** রেখা একটি সাধারণ বিন্দু O-তে ছেদ করেছে। এই সাধারণ বিন্দুকে **ত্রৈধ বিন্দু** বলে।

সুতরাং পানির ত্রৈধ বিন্দুর নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেয়া যেতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ যে তাপমাত্রায় বিশুদ্ধ বরফ, বিশুদ্ধ পানি এবং সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প তাপগত সহ-অবস্থানে থাকে তাকে পানির ত্রৈধ বিন্দু বলে। পানির ত্রৈধ বিন্দু 0.16°C বা 273.16 K (ত্রৈধ বিন্দুতে চাপ 4.58 mm পারদ বা 612.62 Nm^{-2})।

সাধারণভাবে বলা যায়, **যে তাপমাত্রায় কোন পদার্থের কঠিন, তরল এবং বাষ্প একটি নির্দিষ্ট চাপে তাপগত সহ অবস্থানে থাকে তাকে উক্ত পদার্থের ত্রৈধ বিন্দু বলে।**

স্মরণিকা

অবস্থার পরিবর্তন ঃ তাপ গ্রহণে বা তাপ বর্জনে পদার্থ এক অবস্থা হতে অন্য এক অবস্থায় রূপান্তরিত হয়। এর নাম পদার্থের অবস্থার পরিবর্তন ; যেমন গলন, কঠিনীভবন, বাষ্পীভবন, ঘনীভবন, ঊর্ধ্বপাতন, তুহিনীভবন ইত্যাদি।

গলনাঙ্ক ঃ স্থির চাপে যে নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় কোন একটি কঠিন পদার্থ গলতে শুরু করে এবং গলন ক্রিয়া শেষ না হওয়া পর্যন্ত এ তাপমাত্রা স্থির থাকে, তাকে ঐ পদার্থের গলনাঙ্ক বলে।

হিমাঙ্ক ঃ স্থির চাপে কোন তরল পদার্থকে ক্রমাগত শীতল করতে থাকলে যে তাপমাত্রায় পৌঁছে তরল পদার্থটি কঠিন পদার্থে রূপান্তরিত হতে শুরু করে এবং কঠিনীভবন শেষ না হওয়া পর্যন্ত ঐ তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না তাকে ঐ চাপে উক্ত তরল পদার্থের হিমাঙ্ক বলে।

বাষ্পীভবন ঃ তাপ প্রয়োগের ফলে একটি তরল পদার্থ তরল অবস্থা হতে বাষ্পে পরিণত হওয়াকে বাষ্পীভবন বলে। বাষ্পীভবন দু'প্রকার ; যথা ঃ বাষ্পায়ন এবং স্ফুটন।

বাষ্পায়ন ঃ সকল তাপমাত্রায় কোন একটি তরল পদার্থ এর উপরিতল হতে ধীর গতিতে বাষ্পে পরিণত হওয়াকে বাষ্পায়ন বলে।

স্ফুটন ঃ একটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় তরল পদার্থের সর্বস্থান হতে দ্রুত গতিতে তার বাষ্পে পরিণত হওয়াকে স্ফুটন বলে।

স্ফুটনাঙ্ক ঃ স্থির চাপে যে নির্দিষ্ট তাপমাত্রায় একটি তরল পদার্থ ফুটতে শুরু করে এবং স্ফুটন ক্রিয়া শেষ না হওয়া পর্যন্ত এ তাপমাত্রা স্থির থাকে সে তাপমাত্রাকে ঐ তরলের স্ফুটনাঙ্ক বলে।

সুপ্ত তাপ বা লীন তাপ ঃ যে তাপ বস্তুর তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় তাকে বস্তুর ঐ অবস্থা পরিবর্তনের সুপ্ত তাপ বা লীন তাপ বলে।

আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ কোন পদার্থের একক ভর তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় রূপান্তরিত হতে পদার্থটি যে তাপ গ্রহণ করে বা বর্জন করে তাকে ঐ পদার্থের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে। একে L দ্বারা সূচিত করা হয়।

আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ চার প্রকার ; যথা—

(১) **গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ** কোন কঠিন পদার্থের একক ভরকে তার গলনাঙ্কে রেখে তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে কঠিন হতে তরলে পরিণত করতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে ঐ পদার্থের গলনের সুপ্ত তাপ বলে।

(২) **কঠিনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ** একক ভরের তরলকে তার তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে তরল অবস্থা হতে কঠিন অবস্থায় পরিণত হতে যে পরিমাণ তাপ বর্জিত হয় তাকে ঐ পদার্থের কঠিনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে।

(৩) **বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ** কোন একটি তরল পদার্থের একক ভরকে তার স্ফুটনাঙ্কে রেখে তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে তরল থেকে বাষ্পে পরিণত করতে যে পরিমাণ তাপের প্রয়োজন হয়, তাকে ঐ পদার্থের বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে।

(৪) **ঘনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ ঃ** একক ভরের কোন বাষ্পীয় পদার্থকে তার তাপমাত্রার পরিবর্তন না ঘটিয়ে বাষ্পীয় অবস্থা হতে তরল অবস্থায় পরিণত হতে যে পরিমাণ তাপ বর্জিত হয়, তাকে ঐ বাষ্পীয় পদার্থের ঘনীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ বলে।

সিস্টেম বা ব্যবস্থা ঃ জড় জগতের একটি নির্দিষ্ট অংশ যার উপর পরীক্ষা-নিরীক্ষা চালান হয় তাকে সিস্টেম বা ব্যবস্থা বলে।

সমসত্ত্ব দশা ঃ যে ব্যবস্থায় বা সিস্টেমে মাত্র একটি দশা আছে তাকে সমসত্ত্ব দশা বলে।

অসমসত্ত্ব দশা ঃ যে ব্যবস্থায় একাধিক দশা বিদ্যমান আছে, তাকে অসমসত্ত্ব দশা বলে।

দশাচিত্র ঃ কোন পদার্থের সম্পৃক্ত বাষ্পচাপ বনাম তাপমাত্রার লেখচিত্র অংকন করলে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাকে দশাচিত্র বলা হয়।

পানির ত্রৈধ বিন্দু ঃ যে তাপমাত্রায় বিশুদ্ধ বরফ, বিশুদ্ধ পানি এবং সম্পৃক্ত জলীয় বাষ্প তাপগত সহ-অবস্থানে থাকে তাকে পানির ত্রৈধবিন্দু বলে। পানির ত্রৈধবিন্দু 0.16°C বা 273.16 K।

ত্রৈধ বিন্দু ঃ যে তাপমাত্রায় কোন পদার্থের কঠিন, তরল এবং বাষ্প একটি নির্দিষ্ট চাপে তাপগত সহ অবস্থানে থাকে তাকে উক্ত পদার্থের ত্রৈধ বিন্দু বলে।

সঙ্কট তাপমাত্রা ঃ একটি গ্যাস সর্বোচ্চ যে তাপমাত্রায় থাকলে শুধু চাপ প্রয়োগে তাকে তরলে পরিণত করা যায় তাকে এর সঙ্কট তাপমাত্রা বলে।

সঙ্কট চাপ ঃ কোন গ্যাসের সঙ্কট তাপমাত্রায় যে চাপ প্রয়োগ করে তাকে তরলে পরিণত করা যায় তাকে ঐ গ্যাসের সঙ্কট চাপ বলে।

সঙ্কট আয়তন ঃ সঙ্কট তাপমাত্রা ও চাপে একক ভরের কোন গ্যাসের আয়তনকে এর সঙ্কট আয়তন বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

তাপ পরিমাপের নীতি ঃ

হারানো তাপ = গৃহীত তাপ।

কোন বস্তু একই অবস্থায় থেকে যে পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে বা হারায় তার পরিমাণ

Q = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= MS(\theta_2 - \theta_1)$ J (1)

= পানিসম × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= W(\theta_2 - \theta_1)$ J (2)

= একক ভরের তাপ ধারকতা × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= C(\theta_2 - \theta_1)$ J (3)

কোন একটি বস্তু এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় রূপান্তরিত হতে যে পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে বা হারায় তা

Q = ভর × পদার্থের ঐ অবস্থার সুপ্ত তাপ

$= mL$ J (4)

$$L = Q/m \text{ J kg}^{-1} \tag{5}$$

$$L_f = \left\{\frac{(MS + m_1S_1)(\theta_1 - \theta)}{m} - S_1\theta\right\} \text{Jkg}^{-1} \tag{6}$$

$$L_v = \left[\frac{(WS + mS_1)(\theta - \theta_1)}{m} - S_1(100 - \theta)\right] \text{Jkg}^{-1} \tag{7}$$

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। 0°C তাপমাত্রার 1 kg বরফকে 0°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে কত তাপের দরকার হবে?
[বরফ গলনের সুপ্ত তাপ L = 336000 J kg⁻¹]

মনে করি তাপের পরিমাণ = Q J

আমরা পাই,

Q = ভর × সুপ্ত তাপ

বা, Q = ML J (1)

এখানে, M = 1 kg.

$L = 336000 \text{ J kg}^{-1}$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$Q = 1\ kg \times 336000\ J\ kg^{-1}$$
$$Q = 336000\ J = 33.6 \times 10^4\ J$$

২। 0°C তাপমাত্রার 40 g বরফকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। [বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = $3.36 \times 10^5\ Jkg^{-1}$, পানির আপেক্ষিক তাপ = $4200\ Jkg^{-1}\ K^{-1}$ এবং বাষ্পের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ $2268000\ Jkg^{-1}$]। [ঢা. বো. ২০০৪]

এখানে, $m = 40\ g = 0.04\ kg$
$L = 3.36 \times 10^5\ J\ kg^{-1}$
$S = 4200\ Jkg^{-1}K^{-1}$
$L_v = 2268000\ Jkg^{-1}$

0°C তাপমাত্রার পানিকে 0°C তাপমাত্রার বরফে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_1 = mL$$
$$= 0.04 \times 3.36 \times 10^5$$
$$= 13440\ J$$

0°C তাপমাত্রার পানিকে 100°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_2 = m\,S\,(100 - 0)$$
$$= 0.04 \times 4200 \times 100$$
$$= 16800\ J$$

100°C তাপমাত্রার পানিকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_3 = m\,L_v$$
$$= 0.04 \times 2268000$$
$$= 90720\ J$$

মোট তাপ, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 13440 + 16800 + 90720 = 1.21 \times 10^5\ J.$

৩। 0°C তাপমাত্রার 200g বরফকে 80°C তাপমাত্রার 0.5 kg পানির সাথে মিশানো হলে মিশ্রণের তাপমাত্রা 34.3°C হয়। বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৪]

এখানে,
বরফের ভর, $M = 200g = 0.2\ kg$
তাপমাত্রার পার্থক্য, $\Delta\theta_1 = (80 - 0)°C = 80°C = 80K$
তাপমাত্রার পার্থক্য, $\Delta\theta_2 = (80 - 34.3)°C = 45.7° = 45.7K$
বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ, $L = ?$

(ক) 0°C তাপমাত্রার 0.2 kg বরফকে 0°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_1 = ML = 0.2 \times L\,J$$

(খ) 0°C তাপমাত্রার 0.2kg পানিকে 34.3°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_2 = Ms\Delta\theta$$
$$= 0.2 \times 4200 \times 34.3\ J$$
$$= 28812J$$

(গ) 80°C তাপমাত্রার 0.5kg পানিকে 34.3°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে হারানো তাপ,

$$Q_3 = ms\,\Delta\theta_2$$
$$= 0.5 \times 4200 \times 45.7\ J$$
$$= 95970J$$

এখন, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

$$0.2L + 28812J = 95970\ J$$

বা, $0.2L = 95970 - 28812$
$= 67158J$

$$L = \frac{67158}{0.2}\ Jkg^{-1}$$
$$= 3.36 \times 10^5\ J/kg$$

P.V

৪। 263 K তাপমাত্রার 0·05 kg বরফকে 273K তাপমাত্রার পানিতে পরিবর্তন করতে কত তাপ লাগবে ? বরফের আপেক্ষিক তাপ 2100 J kg^{-1} K^{-1} এবং বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ 336000 J kg^{-1}।[য. বো. ২০০১]

এখানে দুই পর্যায়ে তাপ গৃহীত হবে ঃ

(i) 263 K থেকে 273 K-এ উন্নীত হতে বরফ কর্তৃক গৃহীত তাপ,

$$Q_1 = MS(\theta_1 - \theta_2) = 0{\cdot}05 \times 2100 \times (273 - 263) = 1050 \text{ J}$$

(ii) 273 K তাপমাত্রায় বরফ গলে 273 K তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_2 = ML$$

$$= 0{\cdot}05 \times 3{\cdot}36 \times 10^5 = 16800 \text{ J}$$

মোট গৃহীত তাপ $= Q_1 + Q_2$

$$= 1050 + 16800$$

$$= 17850 \text{ J}$$

৫। — 5°C তাপমাত্রার 0˙005 kg বরফের সাথে 40°C তাপমাত্রার 0˙05 kg পানি মিশালে তাপমাত্রা কত হবে ? বরফের আপেক্ষিক তাপ $2{\cdot}1 \times 10^3$ Jkg^{-1} K^{-1}, বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ $3{\cdot}36 \times 10^5$ JK^{-1} এবং পানির আপেক্ষিক তাপ $4{\cdot}2 \times 10^3$ Jkg^{-1} K^{-1}। [য. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৩]

(ক) মনে করি শেষ উষ্ণতা θ°C

— 5°C তাপমাত্রায় 0˙005 kg বরফকে 0°C তাপমাত্রার বরফে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$Q_1 = 0{\cdot}005 \times 2{\cdot}1 \times 10^3 \times \{0 - (-5)\} = 52{\cdot}5$ J

(খ) 0°C তাপমাত্রার 0˙005 kg বরফকে 0°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ.

$$Q_2 = 0{\cdot}005 \times 3{\cdot}36 \times 10^5 = 1680 \text{J}$$

(গ) 0°C তাপমাত্রার 0˙005 kg পানিকে θ°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_3 = 0{\cdot}005 \times 4{\cdot}2 \times 10^3 \times (\theta - 0)$$

$$= 21\theta \text{J}$$

(ঘ) 40°C তাপমাত্রার 0˙05 kg পানিকে θ°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_4 = 0{\cdot}05 \times 4{\cdot}2 \times 10^3 \times (40 - \theta) = 210\,(40 - \theta) \text{ J}$$

আমরা জানি,

গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4$$

বা, $52{\cdot}5 + 1680 + 21\theta = 210(40 - \theta)$

বা, $1732{\cdot}5 + 21\theta = 8400 - 210\theta$

বা, $210\theta + 21\theta = 8400 - 1732{\cdot}5$

বা, $231\theta = 6667{\cdot}5$

$$\theta = \frac{6667{\cdot}5}{231}$$

$$= 28{\cdot}86°C$$

বরফ + সাধারণ মিশ্রণের তাপমাত্রা

$\frac{m_2\theta_2 - 80m_1}{m_1 + m_2}$

(৬) 0°C তাপমাত্রার 2 kg বরফকে কেবলমাত্র বাষ্পে পরিণত করতে কত তাপের প্রয়োজন হবে ? পানির আঃ তাপ 4200 $Jkg^{-1}K^{-1}$, বরফ গলনের আঃ সুপ্ততাপ $3{\cdot}36 \times 10^5$ Jkg^{-1} এবং পানির বাষ্পীভবনের গলনের আঃ সুপ্ততাপ $22{\cdot}68 \times 10^5$ Jkg^{-1}. [সি. বো. ২০০৫]

(i) 0°C তাপমাত্রায় বরফ গলাতে গৃহীত তাপ

$$Q_1 = ML = 2 \times 336000 = 672000 \text{ J}$$

এখানে,

$M = 2$ kg
$L = 336000$
$Q = ?$

(ii) 0°C হতে 100°C-এ উক্ত পানিকে উন্নীত করতে তাপের পরিমাণ,

Q_2 = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= 2 \times 4200 \times (100 - 0)$
$= 2 \times 4200 \times 100$
$= 840000$ J.

(iii) 100°C তাপমাত্রার পানি 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত হতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$Q_3 = ML$
$= 2 \times 2268000$
$= 4536000$ J

মোট তাপ

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$
$= (672000 + 840000 + 4536000)$
$= 6048 \times 10^3$ J.

(৭) — 5°C তাপমাত্রার 0·01 kg বরফকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে কত কাজ সম্পন্ন করে তাপ সরবরাহ করতে হবে ? [বরফের আপেক্ষিক তাপ 500 cal kg^{-1} $°C^{-1}$ এবং বরফ গলনের সুপ্ত তাপ 8000 cal kg^{-1}] [সি. বো. ২০০৩]

(ক) — 5°C তাপমাত্রার বরফকে 0°C তাপমাত্রায় উন্নীত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

Q_1 = ভর × আপেক্ষিক তাপ × তাপমাত্রা বৃদ্ধি

$= 0{\cdot}01 \times 2100 \times \{0 - (-5)\}$ J
$= 105$ J

(খ) 0°C তাপমাত্রার বরফকে 0°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

Q_2 = ভর × আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ

$= 0{\cdot}01 \times 3{\cdot}36 \times 10^5$ J
$= 3{\cdot}36 \times 10^3$ J

এখানে,

বরফের ভরবেগ = 0·01 kg

বরফের আপেক্ষিক তাপ = 500 cal kg^{-1} $°C^{-1}$
$= 500 \times 4{\cdot}2$ Jkg^{-1} K^{-1}
$= 2100$ Jkg^{-1} K^{-1}

বরফ গলনের সুপ্ত তাপ, L = 80000 cal kg^{-1}
$= 80000 \times 4{\cdot}2$ Jkg^{-1}
$= 3{\cdot}36 \times 10^5$ Jkg^{-1}

পানির আপেক্ষিক তাপ, S = 4200 $Jkg^{-1}C^{-1}$

বাষ্পের আপেক্ষিক তাপ = $2{\cdot}26 \times 10^6$ Jkg^{-1}

(গ) 0°C তাপমাত্রার পানিকে 100°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

Q_3 = পানির ভর × পানির আপেক্ষিক তাপ × তাপমাত্রার পরিবর্তন

$= 0{\cdot}01 \times 4200 \times (100 - 0)$

$= 4200$ J

$= 4{\cdot}2 \times 10^3$ J

(ঘ) 100°C তাপমাত্রার 0·01 kg পানি 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

Q_4 = পানির ভর × বাষ্পের আপেক্ষিক তাপ

$= \cdot 01 \times 2\cdot 26 \times 10^6$ J

$= 2\cdot 26 \times 10^4$ J

অতএব, মোট প্রয়োজনীয় তাপ, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

$= 105\text{ J} + 3\cdot 36 \times 10^3\text{ J} + 4\cdot 2 \times 10^3\text{ J} + 2\cdot 26 \times 10^4\text{ J}$

$= 30\cdot 265 \times 10^3$ J

৮। সমপরিমাণ গরম পানি এবং 0°C তাপমাত্রার বরফ একসাথে মিশানো হল। সম্পূর্ণ বরফ গলে পানি হওয়ার পর মিশ্রণের তাপমাত্রা 0°C হল। গরম পানির তাপমাত্রা কত ছিল ? [বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ = $3\cdot 36 \times 10^5$ Jkg^{-1} এবং পানির আপেক্ষিক তাপ = $4\cdot 2 \times 10^3$ $Jkg^{-1}K^{-1}$] [ব. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০২]

মনে করি গরম পানির তাপমাত্রা = θ°C

পানি বা বরফের পরিমাণ = m kg

(ক) গরম পানি কর্তৃক বর্জিত তাপ, $Q_1 = m \times 4200 \times (\theta - 0)$ J = 4200 mθ J

(খ) বরফ কর্তৃক গৃহীত তাপ, $Q_2 = mL_f = m \times 3\cdot 36 \times 10^5\text{ J} = 3\cdot 36 \times 10^5$ mJ

আমরা জানি,

গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

অর্থাৎ $Q_2 = Q_1$

$3\cdot 36 \times 10^5$ mJ = 4200 mθ J

বা, $\theta = \dfrac{3\cdot 36 \times 10^5}{4\cdot 2 \times 10^3} = 80°C$

$\dfrac{m_2\theta_2 - 80m_1}{m_1 + m_2}$

৯। 100°C তাপমাত্রার 500g জলীয় বাষ্প ঘনীভূত হয়ে 30°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হওয়ার জন্য কত তাপ বর্জন করতে হবে ? পানির আপেক্ষিক তাপ 4200 $Jkg^{-1}K^{-1}$ এবং পানির বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ $2\cdot 26 \times 10^6$ Jkg^{-1}। [য. বো. ২০০০]

এখানে,

বাষ্পের ভর, m = 500 g = 0·5 kg

তাপমাত্রার পার্থক্য, Δθ = (100 − 30)°C = 70°C = 70K

পানির আপেক্ষিক তাপ, S = 4200 Jkg^{-1}

পানির বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ, $L_v = 2\cdot 26 \times 10^6$ Jkg^{-1}

(ক) 100°C তাপমাত্রার বাষ্প 100°C পানিতে পরিণত হলে বর্জিত তাপ,

$Q_1 = mL_v = 0\cdot 5 \times 2\cdot 26 \times 10^6$ J

$= 1\cdot 13 \times 10^6\text{ J} = 11\cdot 30 \times 10^5$ J

(খ) 100°C তাপমাত্রার পানি 30°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হতে বর্জিত তাপ,

$Q_2 = ms\Delta\theta$

$= 0\cdot 5 \times 4200 \times 70$

$= 1\cdot 47 \times 10^5$ J

অতএব, মোট বর্জিত তাপ, $Q = Q_1 + Q_2$

$= 11\cdot 30 \times 10^5\text{ J} + 1\cdot 47 \times 10^5$ J

$= 12\cdot 77 \times 10^5$ J

$= 1\cdot 277 \times 10^6$ J

১০। 0°C তাপমাত্রার 1 kg বরফকে 100°C তাপমাত্রায় বাষ্পে পরিণত করতে কত তাপ লাগবে ? [ব. বো. ২০০৪]

0°C তাপমাত্রার 1 kg বরফকে 0°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ = $3\cdot 36 \times 10^5$ Jkg^{-1}

0°C তাপমাত্রার 1 kg পানিকে 100°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ

$= 1 \times 4200 \times (100 - 0)$

= 420000 J

$= 4\cdot 2 \times 10^5$ J

100° C তাপমাত্রার 1 kg পানিকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ = $22\cdot 6 \times 10^5$ J

মোট প্রয়োজনীয় তাপ = $(3\cdot 36 \times 10^5 + 4\cdot 2 \times 10^5 + 22\cdot 6 \times 10^5)\text{ J} = 3\cdot 016 \times 10^6$ J

১১। $0°C$ তাপমাত্রার 500 g বরফকে বাষ্পে পরিণত করতে কত তাপের প্রয়োজন হবে? বরফের আঃ তাপ 2100 J/kg/K, বরফ গলনের আঃ সুপ্ততাপ $3{\cdot}36 \times 10^5$ J kg^{-1} এবং পানির বাষ্পীভবনের আঃ সুপ্ততাপ $22{\cdot}68 \times 10^5$ J kg^{-1}। [ব. বো. ২০০৩]

এখানে,
$M = 500$ g $= 0{\cdot}5$ kg
$L = 3{\cdot}36 \times 10^5$ J kg^{-1}
$L_v = 22{\cdot}68 \times 10^5$ J kg^{-1}
বরফের আ. তাপ, $S_1 = 2100$ J/kg/K
পানির আ. তাপ, $S_2 = 4200$ J/kg/K

এখানে তিন পর্যায়ে তাপ গৃহীত হবে—

(i) $0°C$ তাপমাত্রার বরফ গলে $0°C$ তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হতে গৃহীত তাপ,

$$Q_1 = ML = 0{\cdot}5\text{ kg} \times 3{\cdot}36 \times 10^5\text{ J kg}^{-1} = 168000\text{ J} = 1{\cdot}68 \times 10^5\text{ J}$$

(ii) $0°C$ হতে $100°C$-এ উন্নীত হতে গৃহীত তাপ,

$$Q_2 = MS\,(100 - 0) = 0{\cdot}5\text{ kg} \times 4200\text{ J/kg/K} \times 100 = 210000\text{ J} = 2{\cdot}1 \times 10^5\text{ J}$$

(iii) $100°C$ তাপমাত্রার পানি $100°C$ তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত হতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$$Q_3 = ML_v = 0{\cdot}5\text{ kg} \times 22{\cdot}68 \times 10^5\text{ J kg}^{-1} = 11{\cdot}34 \times 10^5\text{ J}$$

মোট গৃহীত তাপ, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (1{\cdot}68 \times 10^5 + 2{\cdot}1 \times 10^5 + 11{\cdot}34 \times 10^5)$ J $= 15{\cdot}12 \times 10^5$ J

১২। $0°C$ তাপমাত্রায় $0{\cdot}5$ kg বরফকে $100°C$ তাপমাত্রায় পানিতে পরিণত করতে কত তাপের প্রয়োজন হবে ? (বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ $= 33{\cdot}4 \times 10^4$ Jkg^{-1}) [য. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; চ. বো. ২০০৪]

$0°C$ তাপমাত্রার $0{\cdot}5$ kg বরফকে গলিয়ে $0°C$ তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$H_1 = 0{\cdot}5 \times 33{\cdot}4 \times 10^4 = 16{\cdot}7 \times 10^4$ J

$0°C$ তাপমাত্রার পানিকে $100°C$ তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$H_2 = 0{\cdot}5 \times 4200 \times (100 - 0) = 21{\cdot}0 \times 10^4$ J

$\therefore$ প্রয়োজনীয় তাপ $= H_1 + H_2 = (16{\cdot}7 \times 10^4 + 21{\cdot}0 \times 10^4)$ J $= 37{\cdot}7 \times 10^4$ J

১৩। $0°C$ তাপমাত্রার $0{\cdot}005$ kg বরফকে $30°C$ তাপমাত্রার $0{\cdot}02$ kg পানির সাথে মিশানো হল। মিশ্রণের তাপমাত্রা বের কর। (পানির আঃ তাপ $= 4200$ J kg^{-1}K^{-1}) [কু. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ঢা. বো. ২০০৫]

এখানে $M = 0{\cdot}02$ kg
$S = 4200$ J kg^{-1} K^{-1}
$\theta_1 = 30°C$
$m = 0{\cdot}005$ kg

মনে করি মিশ্রণের তাপমাত্রা $= \theta°C$.

এখন, $30°C$ হতে $\theta°C$-এ নামতে গরম পানি কর্তৃক হারানো তাপ $Q_1 = MS(\theta_1 - \theta)$ J (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$Q_1 = 0{\cdot}02\text{ kg} \times 4200\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1} \times (30 - \theta)°C = 2520\text{ J} - 84\theta\text{ J}$$

এক্ষেত্রে বরফ দুই পর্যায়ে তাপ গ্রহণ করবে।

(i) $0°C$ তাপমাত্রায় বরফ গলতে গৃহীত তাপ

$$Q_2 = mL\text{ J} = 0{\cdot}005\text{ kg} \times 336000\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1} = 1680\text{ J}$$

(ii) $0°C$ হতে $\theta°C$-এ উন্নীত হতে উক্ত পানি কর্তৃক গৃহীত তাপ

Q_3 = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$$= 0{\cdot}005\text{ kg} \times 4200\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1} \times \theta°C = 21\,\theta\text{ J}$$

মোট গৃহীত তাপ

$Q' = Q_2 + Q_3 = 1680\ J + 21\ \theta\ J$

কিন্তু আমরা জানি, $Q_1 = Q'$

$2520\ J - 84\ \theta\ J = 1680\ J + 21\ \theta\ J$

বা, $105\ \theta\ J = 840\ J$

$\theta = \frac{840\ J}{105\ J} = 8°C$

৪৪। $-5°C$ তাপমাত্রায় $0{\cdot}005$ kg বরফের সাথে $90°C$ তাপমাত্রায় $0{\cdot}5$ kg পানি মিশালে মিশ্রণের চূড়ান্ত তাপমাত্রা কত হবে ? [বরফের আপেক্ষিক তাপ = $2{\cdot}1 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$; বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ = $3{\cdot}36 \times 10^5\ J\ kg^{-1}$ এবং পানির আপেক্ষিক তাপ = $4{\cdot}2 \times 10^3\ J\ kg^{-1}\ K^{-1}$] [ব. বো. ২০০১]

মনে করি, মিশ্রণের তাপমাত্রা = $\theta°C$

এখন, $90°C$ তাপমাত্রা হতে $\theta°C$-এ নামতে গরম পানি কর্তৃক হারানো তাপ,

$$Q_1 = MS(\theta_1 - \theta)\ J \quad (1)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$Q_1 = 0{\cdot}5 \times 4{\cdot}2 \times 10^3 \times (90 - \theta)$

$= (1{\cdot}89 \times 10^5 - 2{\cdot}1 \times 10^3\ \theta)\ J$

এখানে,

$M = 0{\cdot}5$ kg

$S = 4{\cdot}2 \times 10^3\ Jkg^{-1}\ K^{-1}$

$\theta_1 = 90°C$

$m = 0{\cdot}005$ kg

$\theta = ?$

এক্ষেত্রে বরফ কর্তৃক তিন পর্যায়ে তাপ গৃহীত হবে।

(1) $-5°C$ থেকে $0°C$-এ আনতে বরফ কর্তৃক গৃহীত তাপ,

$Q_2 = 0{\cdot}005 \times 2{\cdot}1 \times 10^3 \times 5 = 52{\cdot}5\ J$

(2) $0°C$ তাপমাত্রায় বরফ গলতে গৃহীত তাপ,

$Q_3 = mL = 0{\cdot}005 \times 3{\cdot}36 \times 10^5 = 1680\ J$

(3) $0°C$ হতে $\theta°C$-এ উন্নীত হতে উক্ত পানি কর্তৃক গৃহীত তাপ,

$Q_4 = 0{\cdot}005 \times 4{\cdot}2 \times 10^3 \times \theta = 21\ \theta\ J$

মোট গৃহীত তাপ,

$$Q' = Q_2 + Q_3 + Q_4 = 52{\cdot}5 + 1680 + 21\ \theta = (1732{\cdot}5 + 21\ \theta)\ J$$

কিন্তু আমরা জানি, বর্জিত তাপ = গৃহীত তাপ

অর্থাৎ $Q_1 = Q'$

$1{\cdot}89 \times 10^5 - 2{\cdot}1 \times 10^3\ \theta = 1732{\cdot}5 + 12\ \theta$

বা, $2{\cdot}1 \times 10^3\ \theta + 21\ \theta = 1{\cdot}89 \times 10^5 - 1{\cdot}7325 \times 10^3$

বা, $2121\ \theta = 187267{\cdot}5$

$$\theta = \frac{187267{\cdot}5}{2121} = 88{\cdot}29°C$$

৪৫। $0°C$ তাপমাত্রার $2{\cdot}1$kg বরফ $40°C$ তাপমাত্রার $5{\cdot}9$kg পানির সাথে মিশ্রিত করা হল। মিশ্রণের চূড়ান্ত তাপমাত্রা কত ? বরফ গলনের সুপ্ততাপ $336 \times 10^3 Jkg^{-1}$ এবং পানির আপেক্ষিক তাপ $4200 Jkg^{-1}\ K^{-1}$।

মনে করি মিশ্রণের তাপমাত্রা = $\theta°C$ [রা. বো. ২০০৫]

এখন $40°C$ হতে $\theta°C$-এ নেমে আসতে গরম পানি কর্তৃক হারানো তাপ,

$Q_1 = MS\ (40 - \theta)$

$= 5{\cdot}9 \times 4200\ (40 - \theta)$

$= 24780\ (40 - \theta)$

এখানে,

পানির ভর, $M = 5{\cdot}9$ kg

পানির আঃ তাপ, $S = 4200\ Jkg^{-1}\ K^{-1}$

বরফের ভর, $m = 2{\cdot}1$ kg

এক্ষেত্রে বরফ দুই পর্যায়ে তাপ গ্রহণ করবে।

(i) 0°C তাপমাত্রার বরফ গলতে গৃহীত তাপ, $Q_2 = ml_f = 2{\cdot}1 \times 336000 = 705600$

(ii) 0°C হতে θ°C-এ উন্নীত হতে গৃহীত তাপ, $Q_S = mS(\theta - 0) = 2{\cdot}1 \times 4200 \times \theta = 8820\,\theta$

মোট গৃহীত তাপ, $Q_4 = Q_2 + Q_3 = 705600 + 8820\,\theta$

আমরা জানি, বর্জিত তাপ = গৃহীত তাপ বা, $Q_1 = Q_4$

$24780(40 - \theta) = 705600 + 8820\,\theta$

বা, $991200 - 24780\,\theta = 705600 + 8820\,\theta$

বা, $(24780 + 8820)\,\theta = 991200 - 705600$

বা, $33600\,\theta = 1696800$

$\theta = \dfrac{1696800}{33600}$

$\theta = 50{\cdot}5°C$

১৬। শূন্য তাপমাত্রার 20 g বরফকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপের পরিমাণ বের কর। [পানির আপেক্ষিক তাপ = 4200 J kg^{-1} K^{-1} এবং বাষ্পের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ = 2260000 J kg^{-1} ; বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ = 336000 Jkg^{-1}] [রা. বো. ২০০১; য. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৩]

এখানে,
$M = 20\text{ g} = 0{\cdot}02\text{ kg}$
$Q = ?$

(i) 0°C তাপমাত্রায় বরফ গলাতে গৃহীত তাপ

$Q_1 = ML$
$= 0{\cdot}02\text{ kg} \times 336000\text{ J kg}^{-1}$
$= 6720\text{ J}$

(ii) 0°C হতে 100°C-এ উক্ত পানিকে উন্নীত করতে তাপের পরিমাণ,

Q_2 = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= 0{\cdot}02\text{ kg} \times 4200\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1} \times (100°C - 0°C)$

$= 0{\cdot}02\text{ kg} \times 4200\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1} \times 100°C$ বা 100 K

$= 8400\text{ J}$

(iii) 100°C তাপমাত্রার পানি 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত হতে প্রয়োজনীয় তাপ,

$Q_3 = ML_v = 0{\cdot}02 \times 2260000$
$= 45200\text{ J}$

মোট তাপ, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (6720 + 8400 + 45200)\text{ J}$
$= 60320\text{ J}$

১৭। 50°C তাপমাত্রার 0·03kg পানিতে 0°C তাপমাত্রার 0·02 kg বরফ মিশানো হলে মিশ্রণের ফলাফল কি হবে? [পানির আঃ তাপ ও বরফ গলনের সুপ্ততাপ যথাক্রমে 4200 J kg^{-1} K^{-1} এবং $3{\cdot}36 \times 10^5$ J kg^{-1}]

[ঢা. বো. ২০০৩]

এখানে, পানি তাপ বর্জন করবে এবং বরফ তাপ গ্রহণ করবে। মনে করি, মিশ্রণের চূড়ান্ত তাপমাত্রা θ°C।

প্রথমত, 50°C তাপমাত্রার 0·03 kg পানি θ°C-এ নামতে বর্জিত তাপ,

H_1 = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= 0{\cdot}03 \times 4{\cdot}2 \times 10^3\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1} \times (50 - \theta) = 126\,(50 - \theta)\text{ J}$

দ্বিতীয়ত, 0°C তাপমাত্রার 0·02 kg বরফ 0°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হতে গৃহীত তাপ,

H_2 = ভর × সুপ্ত তাপ

$= 0{\cdot}02 \times 3{\cdot}36 \times 10^5$
$= 6720\text{ J}$

তৃতীয়ত, 0°C এর বরফ গলা পানি θ°C-এ পৌঁছতে গৃহীত তাপ,

H_3 = ভর × আঃ তাপ × তাপমাত্রার পার্থক্য

$= 0.02 \times 4.2 \times 10^3 \times (\theta - 0)\ J = 84\theta J$

এখন, গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ

$H_2 + H_3 = H_1$

$6720 + 84\theta = 126\ (50 - \theta)$

বা, $6720 + 64\theta = 6300 - 126\theta$

বা, $64\theta + 126\theta = 6300 - 6720$

বা, $190\theta = -420$

$\therefore \theta = -\frac{420}{190}$

$= -2.21\ °C$

মিশ্রণের তাপমাত্রা ঋণাত্মক। সুতরাং সম্পূর্ণ বরফ গলে পানিতে পরিণত হবে না। এক্ষেত্রে গরম পানি কর্তৃক বর্জিত তাপের পরিমাণ বরফ গলিয়ে পানিতে পরিণত করে মিশ্রণের তাপমাত্রায় পৌঁছাতে প্রয়োজনীয় তাপের পরিমাণের তুলনায় কম।

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। অবস্থার পরিবর্তন কাকে বলে ?

২। গলন বা তরলীভবন কাকে বলে ?

৩। হিমায়ন বা কঠিনীভবন কি ?

৪। বাষ্পীভবন বলতে কি বুঝ ?

৫। ঘনীভবন কাকে বলে ?

৬। স্ফুটন কাকে বলে ?

৭। স্ফুটনাঙ্ক কাকে বলে ?

৮। হিমাঙ্ক কাকে বলে ?

৯। সুপ্ত তাপ কাকে বলে ?

১০। বরফ গলনের সুপ্ত তাপের সংজ্ঞা দাও। [রা. বো. ২০০১]

১১। আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০১ ; সি. বো. ২০০১]

১২। বরফ গলনের সুপ্ত তাপ $3.36 \times 10^5\ Jkg^{-1}$ বলতে কি বুঝ ? [ঢা. বো. ২০০০]

১৩। গলন ও বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ কাকে বলে ? [সি. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৪]

১৪। পানির বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ $2268000 J\ kg^{-1}$ বলতে কি বুঝ ?

১৫। দশা কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৪]

১৬। পানির ত্রৈধবিন্দু কি ? [ব. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩]

অথবা, পানির ত্রৈধবিন্দু কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩, ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০১ ; সি. বো. ২০০৩]

১৭। ক্রান্তি তাপমাত্রা বলতে কি বুঝ ? [কু. বো. ২০০৩]

১৮। পানির ত্রৈধবিন্দুর তাপমাত্রা কত ? [ব. বো. ২০০৪]

১৯। সংকট তাপমাত্রা [কু. বো. ২০০১], সংকট চাপ ও সংকট আয়তন বলতে কি বুঝায় ?

২০। সংজ্ঞা লিখ ঃ (ক) গলনাঙ্ক ; (খ) হিমাঙ্ক ; (গ) সিস্টেম ; (ঘ) স্ফুটনাঙ্ক ; (ঙ) দশা ; (চ) দশাচিত্র ; (ছ) গলন ; (জ) বাষ্পীভবন ; (ঝ) ঊর্ধ্বপাতন ; (ঞ) তুহিনীভবন।

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। লেখচিত্রের সাহায্যে পদার্থের অবস্থা পরিবর্তন ব্যাখ্যা কর।

২। বাষ্পায়ন ও স্ফুটনের মধ্যে তিনটি পার্থক্য লিখ। [কু. বো. ২০০৫]

৩। স্ফুটনাঙ্ক কাকে বলে ? স্ফুটনাঙ্কের উপর চাপের প্রভাব আলোচনা কর।

৪। পানির বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর। [রা. বো. ২০০৪, ২০০২ ; য. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২, ২০০১ ; চ. বো. ২০০১ ; ব. বো. ২০০২]

৫। বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর। [ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৪, ২০০০ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; য. বো. ২০০৩, ২০০১ ; চ. বো. ২০০৫, ২০০৩, ২০০০ ; কু. বো. ২০০১ ; ব. বো. ২০০৫, ২০০১ রা. বো. ২০০০ ;

৬। পানির দশাচিত্রের বর্ণনা দাও। [ব. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৩]

৭। প্রয়োজনীয় সাবধানতাসহ বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ নির্ণয়ের পরীক্ষাটি বর্ণনা কর।

[ব. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৪, ২০০১]

৮। প্রয়োজনীয় সতর্কতা অবলম্বনপূর্বক পানির বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ নির্ণয়ের একটি পদ্ধতি বর্ণনা কর।

[চ. বো. ২০০৬, ঢা. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৬, ২০০৩]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। $0°C$ তাপমাত্রার 10 kg বরফ $0°C$ তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে তাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। [বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = 336000 J kg^{-1}] [উঃ 33.6×10^5 J]

২। $0°C$ তাপমাত্রার 10 kg বরফকে $30°C$ তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে কত তাপের প্রয়োজন হবে ? [বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = 336000 J kg^{-1} এবং পানির আঃ তাপ = $4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$] [উঃ 462×10^4 J]

৩। $-10°C$ তাপমাত্রার 0.005 kg বরফের সাথে $40°C$ তাপমাত্রার 0.002 kg পানি মিশালে মিশ্রণের শেষ তাপমাত্রা কত হবে ? [উঃ $15°C$]

৪। $-10°C$ তাপমাত্রার 5g বরফের সাথে $30°C$ তাপমাত্রার 20g পানি মিশালে মিশ্রণের শেষ তাপমাত্রা কত হবে? [বরফের আপেক্ষিক তাপ $2.1 \times 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, বরফ গলনের আপেক্ষিক তাপ = $3.36 \times 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$ এবং পানির আপেক্ষিক তাপ $4.2 \times 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$] [উঃ $7°C$]

৫। 5kg বরফকে $50°C$ তাপমাত্রার পানিতে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। পানির আপেক্ষিক তাপ $4.2 \times 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ এবং বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ $3.36 \times 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$। [উঃ 2.73×10^6 J]

৬। $-10°C$ তাপমাত্রায় 0.005kg বরফের সাথে $40°C$ তাপমাত্রায় 0.002 kg পানি মিশালে মিশ্রণের শেষ অবস্থা কি হবে ? পানির আপেক্ষিক তাপ $4.2 \times 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ত তাপ $3.36 \times 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$।

[উঃ মিশ্রণে 4.3125×10^{-3} kg বরফ ও 2.6875×10^{-3} kg পানি থাকবে এবং মিশ্রণের তাপমাত্রা $0°C$]

৭। $0°C$ তাপমাত্রার 10 kg বরফকে $100°C$ তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপের পরিমাণ নির্ণয় কর।

[বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = 336000 J kg^{-1}, পানির আঃ তাপ = $4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ এবং পানির বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ = $2268000 \text{ J kg}^{-1}$] [উঃ 3024×10^4 J]

৮। $0°C$ তাপমাত্রার 0.05 kg বরফকে $30°C$ তাপমাত্রার 0.2kg পানির সাথে মিশানো হল। মিশ্রণের শেষ উষ্ণতা নির্ণয় কর। [বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ 336000 Jkg^{-1}, পানির আপেক্ষিক তাপ $4200 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$।

[কু. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ $8°C$]

৯। $0°C$ তাপমাত্রার 2 kg বরফে কতটুকু তাপ সরবরাহ করলে $100°C$ তাপমাত্রার ফুটন্ত পানি পাওয়া যাবে ? [বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ $3.36 \times 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$] [য. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 15.12×10^5 J]

১০। 0°C তাপমাত্রার 3 kg বরফের সাথে 40°C তাপমাত্রার 4kg পানি মিশালে মিশ্রণের ফলাফল নির্ণয় কর। [বরফ গলনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ = 3.36×10^5 Jkg^{-1}] [চ. বো. ২০০৫]

[উত্তর ঃ – 11.43°C, মিশ্রণের তাপমাত্রা ঋণাত্মক হওয়ায় সম্পূর্ণ বরফ গলে পানি হবে না]

১১। 100°C তাপমাত্রায় 600 g স্টীম ঘনীভূত হয়ে 20°C তাপমাত্রার পানিতে পরিণত হওয়ার জন্য কত তাপ বর্জন করতে হবে ? [পানির বাষ্পীভবনের আপেক্ষিক সুপ্ততাপ=2.66×10^6 J kg^{-1} এবং পানির আঃ তাপ = 4.2×10^3 $Jkg^{-1}K^{-1}$]

[উত্তর ঃ 17.976×10^5 J]

১২। – 5°C তাপমাত্রার 20 kg বরফকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করতে প্রয়োজনীয় তাপের পরিমাণ নির্ণয় কর। [বরফের আঃ তাপ = 2100 Jkg^{-1} K^{-1}, বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = 336000 Jkg^{-1}, পানির আঃ তাপ= 4200 J kg^{-1} K^{-1} এবং পানির বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ = 2268000 J kg^{-1}] [উঃ 6069×10^4 J]

১৩। 20°C তাপমাত্রার 0.1 kg টিনকে গলাতে প্রয়োজনীয় তাপ নির্ণয় কর। [টিনের আঃ তাপ = 210 J kg^{-1} K^{-1}, টিনের গলনের সুপ্ত তাপ = 58800 J kg^{-1} এবং টিনের গলনাঙ্ক = 232°C] [উঃ 10332 J]

১৪। 0°C তাপমাত্রার 0.5 kg বরফকে 100°C তাপমাত্রার 0.9 kg পানির সাথে মিশানো হল এবং মিশ্রণের তাপমাত্রা 60°C পাওয়া গেল। বরফ গলনের সুপ্ত তাপ নির্ণয় কর। [উঃ 50400 J kg^{-1}]

১৫। 0°C তাপমাত্রার 4 kg বরফের সাথে 40°C তাপমাত্রার 5 kg পানি মিশানো হল। মিশ্রণের শেষ অবস্থা কি হবে ? [বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = 336000 J kg^{-1} এবং পানির আপেক্ষিক তাপ = 4200 J kg^{-1} K^{-1}] [উঃ 2.5 kg বরফ গলবে

১৬। 0°C তাপমাত্রার 0.05 kg বরফকে 30°C তাপমাত্রার 0.2 kg পানির সাথে মিশানো হল। মিশ্রণের শেষ তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [বরফ গলনের সুপ্ত তাপ = 336000 J kg^{-1}, পানির আঃ তাপ = 4200 J kg^{-1} K^{-1}] [উঃ 8°C

১৭। A, B, C তিনটি তরলের তাপমাত্রা যথাক্রমে 20°C, 30°C ও 40°C। সমান ভরের A ও B তরল এবং B ও C তরল মিশ্রিত করায় মিশ্রণের তাপমাত্রা যথাক্রমে 25°C ও 35°C হল। তাদের আপেক্ষিক তাপের সম্পর্ক নির্ণয় কর।

[উঃ $S_A = S_B = S_C$

১৬
তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র
SECOND LAW OF THERMODYNAMICS

১৬.১ সূচনা
Introduction

কাজ করার সামর্থ্যকে শক্তি বলে। বিভিন্ন প্রকার শক্তির সংগে আমরা পরিচিত। যেমন, যান্ত্রিক শক্তি, বিদ্যুৎ শক্তি, রাসায়নিক শক্তি, সৌর শক্তি, তাপ শক্তি ইত্যাদি। তাপগতিবিদ্যার প্রথম সূত্র থেকে আমরা জেনেছি যে তাপ কাজে এবং কাজ তাপে রূপান্তরিত হতে পারে। তবে কোন্ দিকে তাপ প্রবাহিত হবে বা কাজ সম্পাদিত হবে তা প্রথম সূত্র থেকে জানা যায় না। এছাড়া নির্দিষ্ট পরিমাণ তাপশক্তিকে সম্পূর্ণরূপে কাজে পরিণত করা যায় না। যান্ত্রিক শক্তিসহ বিভিন্ন ধরনের শক্তি থেকে তাপ শক্তি সহজেই পাওয়া যায় ; কিন্তু তাপ ইঞ্জিন ছাড়া তাপ থেকে যান্ত্রিক শক্তি তথা কাজ সম্পাদন সম্ভব নয়। তাই ইঞ্জিনের উপর বিভিন্ন গবেষণার ফলাফল থেকে বিখ্যাত প্রকৌশলী সাদি কার্নো (Sadi Carnot) এ সিদ্ধান্তে উপনীত হন যে, তাপশক্তিকে কখনই সম্পূর্ণরূপে কাজে পরিণত করা যায় না। এ বক্তব্যই তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের ভিত্তি। আমরা এ অধ্যায়ে তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র, তাপ ইঞ্জিন, কার্নো ইঞ্জিন, এনট্রপি, এনট্রপির পরিবর্তন ইত্যাদি বিষয়ে আলোচনা করব।

১৬.২ প্রত্যাগামী এবং অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া
Reversible and irreversible process

কোন সংস্থা বা সিস্টেম (system) যখন এক অবস্থা হতে অন্য অবস্থায় যায়, তখন অবস্থার এই পরিবর্তন দুই প্রক্রিয়ায় সংঘটিত হয়, যথা—

(১) প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া এবং (২) অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া।

এখন দুটি প্রক্রিয়া বিশদভাবে আলোচনা করব।

১৬.২.১ প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া
Reversible process

ধরা যাক, কোন একটি প্রক্রিয়ার কার্যকরী পদার্থ (Working substance) এক বিশেষ পরিবেশে, যেমন তাপমাত্রা স্থির রেখে A অবস্থা হতে পরিবর্তিত হয়ে B অবস্থায় গেল এবং এই পরিবর্তনে তা কিছু তাপ শোষণ করল ও কিছু বাহ্যিক কার্য সম্পাদন করল।

তাপগতিবিদ্যার ভাষায় এই প্রক্রিয়াকে সম্মুখগামী (direct operation) প্রক্রিয়া বলা হয়। বিপরীতক্রমে বস্তু যখন B অবস্থা হতে একই পরিবেশে A অবস্থায় ফিরে যাবে তখন তাকে পশ্চাৎবর্তী প্রক্রিয়া (reverse operation) বলা হয়। বিপরীত প্রক্রিয়ায় বস্তু একই পরিমাণ তাপ উদ্গীরণ (evolve) করবে এবং একই পরিমাণ বাহ্যিক কার্য সম্পাদন করবে। এখন সম্মুখ ও বিপরীত প্রক্রিয়ার সমন্বয়ে সৃষ্ট সমগ্র প্রক্রিয়াকে প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া (reversible process) বলে।

সংজ্ঞা : তাপগতিবিদ্যার দৃষ্টিকোণ হতে আমরা সেই প্রক্রিয়াকে প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলব যা সম্মুখ পরিবর্তনের পর বিপরীতমুখী হয়ে প্রত্যাবর্তন করতে পারে এবং সম্মুখ ও বিপরীতমুখী পরিবর্তনের প্রতি স্তরে তাপ ও কার্যের ফলাফল সমান ও বিপরীতমুখী হয়।

বৈশিষ্ট্য (Characteristics)

প্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় সংস্থার পরিবর্তন ঘটে খুবই ধীরে ধীরে এবং অতি ক্ষুদ্র পরিমাণে যে পর্যন্ত না সমগ্র পরিবর্তন সংঘটিত হয়। এই প্রক্রিয়া এত ধীরে ধীরে সংঘটিত হয় যে, প্রতিটি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ধাপে সংস্থা কার্যত তাপগতীয়

সাম্য (Thermodynamical equillibrium) অবস্থা বজায় রাখে। উপরন্তু এই প্রক্রিয়ায় অস্থিতিস্থাপকতা, সান্দ্রতা, ঘর্ষণ, বৈদ্যুতিক রোধ, চুম্বকীয় হিস্‌টেরিসিস প্রভৃতির ন্যায় অবক্ষয়ী ফলাফলগুলো (dissipative effects) থাকবে না। মোট কথা এটি মূলত স্থৈতিক (quasi-static) এবং অনবক্ষয়ী (non-dissipative) হবে। এই প্রক্রিয়া এমনভাবে সংঘটিত করতে হবে যাতে প্রক্রিয়ার শেষে সংস্থা (system) ও পরিপার্শ্বের কোনরূপ নিট পরিবর্তন ব্যতিরেকে উভয়েই প্রাথমিক অবস্থায় ফিরে যেতে পারে।

উদাহরণ (Examples) ঃ নিম্নে প্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।

বাস্তব ক্ষেত্রে সম্পূর্ণ প্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার উদাহরণ দেয়া সম্ভবপর নয়। তবে কিছু কিছু প্রক্রিয়া আছে যাদেরকে আপাতভাবে প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলা যেতে পারে। এমন কতকগুলো প্রক্রিয়া নিম্নে উল্লেখ করা হল।

(i) খুব ধীরে ধীরে সংঘটিত করলে সমোষ্ণ এবং রুদ্ধতাপ পরিবর্তন প্রত্যাগামী হবে। কারণ এক্ষেত্রে ঘর্ষণের ন্যায় অবক্ষয়ী বল না থাকায় এবং প্রক্রিয়াটি খুব ধীরে ধীরে সংঘটিত হওয়ায় পরিবহণ, পরিচলন ও বিকিরণের দরুন তাপ বা শক্তি ক্ষয় হয় না।

(ii) প্রতি গ্রামে 80 ক্যালরি (cal) বা 336 J তাপশক্তি শোষণ করে স্বাভাবিক চাপের 0°C তাপমাত্রায় বরফ পানিতে পরিণত হয়। আবার স্বাভাবিক চাপে 0°C তাপমাত্রার পানি হতে প্রতি গ্রামে 80 ক্যালরি তাপ বা 336 J তাপশক্তি অপসারণ করলে পুনরায় বরফ পাওয়া যায়। সুতরাং প্রক্রিয়াটি প্রত্যাগামী।

(iii) কিছুটা উপর হতে একটি স্থিতিস্থাপক বলকে একটি স্থিতিস্থাপক ইস্পাত পাতের উপর ফেলা হলে শক্তির কোন অপচয় না হওয়ায় বলটি আবার তার প্রাথমিক উচ্চতা পর্যন্ত উপরে উঠবে। সুতরাং প্রক্রিয়াটি প্রত্যাগামী।

(iv) স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে খুব ধীরে ধীরে কোন স্প্রিংকে সম্প্রসারণ করলে প্রতি ধাপে প্রসারণের সময় স্প্রিং-এর উপর যে পরিমাণ কাজ করা হবে সঙ্কোচনের সময় স্প্রিং সেই পরিমাণ কাজ সম্পন্ন করবে। সুতরাং প্রক্রিয়াটি প্রত্যাগামী।

১৬·২·২ অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া
Irreversible process

সংজ্ঞা ঃ যে প্রক্রিয়া সম্মুখগামী হওয়ার পর বিপরীতমুখী হয়ে প্রত্যাবর্তন করতে পারে না, তাকে অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলে। একে অনপনেয় প্রক্রিয়াও বলা হয়।

অথবা, যে প্রক্রিয়ায় সম্ভাব্য সব প্রাকৃতিক উপায় সত্ত্বেও সমগ্র সংস্থাকে পুরোপুরি প্রাথমিক অবস্থায় ফিরিয়ে আনা যায় না বা যে প্রক্রিয়া বিপরীতমুখী হয়ে প্রত্যাবর্তন করতে পারে না তাকে অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলে।

বৈশিষ্ট্য (Characteristics)

অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া হঠাৎ এবং স্বতঃস্ফূর্তভাবে (spontaneously) সংঘটিত হয়। প্রকৃতিতে সব প্রক্রিয়া স্বতঃস্ফূর্তভাবে ঘটে থাকে। সুতরাং প্রাকৃতিক প্রক্রিয়া মাত্রই অপ্রত্যাগামী। এই প্রক্রিয়ায় সংস্থা কখনই তার প্রাথমিক অবস্থায় ফিরে যাবার প্রবণতা দেখায় না।

উদাহরণ (Examples) ঃ নিম্নে অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হল।

(i) বৈদ্যুতিক রোধের মধ্য দিয়ে বিদ্যুৎ প্রবাহিত হলে তাপ সৃষ্টি হয়। এটি একটি অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া।

(ii) দুটি বস্তুর ঘর্ষণের দরুন যে তাপ সৃষ্টি হয় তা একটি অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া। কারণ ঘর্ষণের বিরুদ্ধে যে কাজ করা হয় তাই তাপে রূপান্তরিত হয় এবং ঐ তাপ কোন প্রকারেই কাজে পরিণত করা যায় না।

(iii) ভিন্ন তাপমাত্রার দুটি বস্তুকে পরস্পরের সংস্পর্শে স্থাপন করলে তাপ অধিক তাপমাত্রার বস্তু হতে কম তাপমাত্রার বস্তুতে প্রবাহিত হবে। কিন্তু কম তাপমাত্রার বস্তু হতে অধিক তাপমাত্রার বস্তুতে তাপ প্রবাহের কোন প্রবণতা নেই। সুতরাং এটি একটি অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া।

(iv) বন্দুক হতে গুলি ছুঁড়লে বারুদের বিস্ফোরণ ঘটে। এই বিস্ফোরণ অতি দ্রুত সংঘটিত হয়। এই প্রক্রিয়া অপ্রত্যাগামী।

BG & JEWEL

১৬.২.৩ প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার মধ্যে পার্থক্য
Distinction between reversible and irreversible process

প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য রয়েছে ঃ

প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া	অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া
(১) যে প্রক্রিয়া বিপরীতমুখী হয়ে প্রত্যাবর্তন করে এবং সম্মুখবর্তী ও বিপরীতমুখী প্রক্রিয়ার প্রতি স্তরে তাপ ও কাজের ফলাফল সমান ও বিপরীত হয় সেই প্রক্রিয়াকে প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলে।	(১) যে প্রক্রিয়া বিপরীতমুখী হয়ে প্রত্যাবর্তন করতে পারে না তাকে অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলে।
(২) কর্মশীল সংস্থা প্রাথমিক অবস্থায় ফিরে আসে।	(২) কর্মশীল সংস্থা প্রাথমিক অবস্থায় ফিরে আসতে পারে না।
(৩) এটি অতি ধীর প্রক্রিয়া।	(৩) এটি একটি দ্রুত প্রক্রিয়া।
(৪) এটি একটি স্বতঃস্ফূর্ত প্রক্রিয়া নয়।	(৪) এটি একটি স্বতঃস্ফূর্ত প্রক্রিয়া।
(৫) সংস্থা তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বজায় রাখে।	(৫) তাপগতীয় সাম্যাবস্থা বজায় রাখে না।
(৬) এই প্রক্রিয়ায় অবক্ষয়ী ফলাফল দৃষ্ট হয় না।	(৬) অবক্ষয়ী ফলাফল দৃষ্ট হয়।

১৬.৩ তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র
Second law of thermodynamics

আমরা জানি যে, যান্ত্রিক শক্তি, শব্দ শক্তি, আলোক শক্তি প্রভৃতি বিভিন্ন প্রকার শক্তি অতি সহজে তাপ শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। কিন্তু তাপ শক্তিকে অতি সহজে অন্য শক্তিতে রূপান্তর করা যায় না। তবে তাপ শক্তিকে অন্য শক্তিতে রূপান্তর করতে হলে যন্ত্রের প্রয়োজন অনস্বীকার্য। এই যন্ত্রই তাপ ইঞ্জিন নামে পরিচিত। বিজ্ঞানী **কার্ণো** (Carnot) এই তাপ ইঞ্জিন নিয়ে বিস্তর গবেষণা করেন এবং এই সিদ্ধান্তে আসেন যে—

তাপকে কখনই সম্পূর্ণরূপে কাজে রূপান্তর করা সম্ভবপর নয়।

বিজ্ঞানী **ক্লসিয়াস** এবং **কেলভিন** পৃথক পৃথকভাবে কার্ণোর উপরোক্ত তথ্যের যে সাধারণ রূপ দেন তাই তাপ-গতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র নামে পরিচিত। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি বিভিন্নরূপে প্রকাশ করা যায়, তবে প্রত্যেকটি প্রস্তাবনার মূলভাব একই এবং তা হচ্ছে তাপ কখনও স্বতঃস্ফূর্তভাবে নিম্ন তাপমাত্রার বস্তু হতে উচ্চ তাপমাত্রার বস্তুতে যেতে পারে না। এ সব প্রস্তাবনার মধ্যে **ক্লসিয়াসের** প্রস্তাবনাকে নিখুঁত ও উন্নত বলে গণ্য করা হয়েছে। নিম্নে সূত্রটির বিশেষ কয়েকটি রূপ বর্ণনা করা হল।

(ক) ক্লসিয়াসের বিবৃতি (Clausius's statement) ঃ "বাইরের কোন শক্তির সাহায্য ব্যতিরেকে কোন স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রের পক্ষে নিম্ন তাপমাত্রার কোন বস্তু হতে উচ্চ তাপমাত্রার কোন বস্তুতে তাপের স্থানান্তর সম্ভব নয়।"

অথবা **"তাপ আপনা হতে শীতল বস্তু হতে উষ্ণ বস্তুতে প্রবাহিত হয় না।"**

অথবা, **"বাইরের কোন শক্তি কর্তৃক সম্পাদিত কাজ ব্যতিরেকে শীতল বস্তু হতে উষ্ণ বস্তুতে তাপ নিজে প্রবাহিত হতে পারে না।"**

উপরের বিবৃতি হতে এটি পরিষ্কার বোঝা যায় যে, তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র পদার্থবিদ্যার অন্যান্য শাখার অন্তর্ভুক্ত বিভিন্ন ঘটনার সাথে সংগতিপূর্ণ। যেমন, বাইরে থেকে কোন বস্তুর উপর কাজ সম্পন্ন না করলে বস্তু কখনই নিম্ন তল হতে উচ্চ তলে যেতে পারে না। পুনঃ, কাজ না করলে নিম্ন বিভব তল হতে উচ্চ বিভব তলে বিদ্যুৎ প্রবাহিত হতে পারে না, ইত্যাদি। উক্ত সূত্র হতে বোঝা যায় যে, উষ্ণতর বস্তু হতে শীতলতর বস্তুতে তাপ আপনা হতেই প্রবাহিত হতে পারে।

পাহাড়ের উপর থেকে কোন বস্তু গড়িয়ে দিলে স্বাভাবিকভাবে বস্তুটি নিচে চলে আসে। কিন্তু নিচে থেকে উপরে নিতে হলে বাইরের শক্তি ব্যবহার করেই করতে হয়; অর্থাৎ বস্তুর ওপর কাজ করতে হয়।

আজ পর্যন্ত এমন কোন হিমায়ন যন্ত্র (refrigerator) অবিষ্কার করা যায় নি যা শক্তির সরবরাহ ছাড়া কাজ করতে পারে। এই ঘটনা ক্লসিয়াস প্রদত্ত তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের সত্যতা প্রমাণ করে।

(খ) কেলভিনের বিবৃতি (Kelvin's statement) ঃ "কোন বস্তুকে তার পরিপার্শ্বের শীতলতম অংশ হতে অধিকতর শীতল করে শক্তির অবিরাম সরবরাহ পাওয়া সম্ভব নয়।"

এই সূত্র হতে বুঝা যায় যে, তাপকে কাজে পরিণত করা যায় ততক্ষণ যতক্ষণ পর্যন্ত যে বস্তু হতে তাপ গ্রহণ করা যাবে তা তার পরিপার্শ্বের শীতলতম অংশ হতে অধিকতর শীতল হবে না। দুটি বস্তুর তাপমাত্রা সমান হলে ঐ বস্তুদ্বয়ের মধ্যে তাপের পরিমাণ যত কম বেশিই হউক না কেন এক বস্তু হতে অন্য বস্তুতে তাপ প্রবাহিত হবে না।

(গ) প্ল্যাংক-এর বিবৃতি (Planck's statement) ঃ "কোন তাপ উৎস হতে অনবরত তাপ শোষণ করবে এবং তা সম্পূর্ণরূপে কাজে রূপান্তরিত হবে এরূপ একটি তাপ ইঞ্জিন তৈরি করা সম্ভব নয়।"

(ঘ) কার্নোর বিবৃতি (Carrnot's statement) ঃ "কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ তাপ শক্তি সম্পূর্ণ বা পুরোপুরিভাবে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তর করার মত যন্ত্র তৈরি সম্ভব নয়।"

১৬'৪ তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের তুলনামূলক আলোচনা
Comparative discussion on first and second law of thermodynamics

তাপগতিবিদ্যার দুই সূত্রের মূল পার্থক্য বুঝে রাখা প্রয়োজন। প্রথম সূত্রটি শক্তির সংরক্ষণ সূত্রেরই বিশেষ রূপ। প্রথম সূত্রের প্রস্তাবনা এই যে, তাপ ও যান্ত্রিক শক্তি উভয়ই শক্তির বিভিন্ন রূপ এবং একরূপ হতে অন্যরূপে পরিবর্তন সম্ভব। এটি ছাড়া রূপান্তরের সময় একে অন্যের সমতুল্য এটিও প্রথম সূত্রের সাহায্যে জানা যায়। বাস্তবক্ষেত্রে যদিও আমরা একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কার্যকে সম্পূর্ণভাবে তাপে রূপান্তর করতে পারি ; কিন্তু একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ তাপকে সম্পূর্ণরূপে কার্যে রূপান্তর করার পরিকল্পনা কখনও বাস্তবায়িত করা সম্ভব নয়। কিংবা, তাপের উৎপত্তি কোথায়— কোন উত্তপ্ত বস্তু, না কোন শীতল বস্তু। এ সব প্রশ্নের উত্তর আমরা প্রথম সূত্র হতে পাই না। তাপগতিবিদ্যার সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ এ সব প্রশ্নের আলোচনাই তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রের প্রতিপাদ্য বিষয়।

তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে যখন তাপ কাজে রূপান্তরিত হয় তখন তার কিছু অংশ কাজে রূপান্তরিত হয়, সকল তাপই কাজে রূপান্তরিত হয় না। অধিকন্তু ঐ রূপান্তরের জন্য সর্বদা একটি উত্তপ্ত ও একটি শীতল বস্তুর যুগপৎ উপস্থিতি প্রয়োজন। উত্তপ্ত বস্তু হতে শীতল বস্তুতে তাপ গমনকালে কিছু কাজ সম্পন্ন হবে।

১৬·৫ তাপ ইঞ্জিনের দক্ষতা
Efficiency of heat engine

তাপ ইঞ্জিনের দক্ষতা আলোচনার আগে তাপ ইঞ্জিন কি এবং এর মূলনীতি জানা দরকার।

তাপ ইঞ্জিন ঃ যে যন্ত্র দ্বারা তাপ শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তর করা যায় তাকে তাপ ইঞ্জিন বলে। যেমন বাষ্পীয় ইঞ্জিন, পেট্রোল ইঞ্জিন, ডিজেল ইঞ্জিন ইত্যাদি।

তাপ ইঞ্জিনের মূলনীতি ঃ প্রত্যেক ইঞ্জিনেই একটি কার্যরত পদার্থ (working substance) থাকে। যেমন বাষ্পীয় ইঞ্জিনে বাষ্প, পেট্রোল ইঞ্জিনে পেট্রোল কার্যরত বস্তু।

কার্যরত পদার্থ উচ্চ তাপমাত্রার কোন তাপ উৎস হতে তাপ গ্রহণ করে ঐ তাপের কিছু অংশ কার্যে পরিণত করে এবং বাকি অংশ নিম্ন তাপমাত্রার তাপগ্রাহককে বর্জন করে। এভাবে কার্যরত বস্তু ক্রমাগত তাপ গ্রহণে ও বর্জনে প্রতিবার কিছু তাপ কার্যে পরিণত হয়। কোন ইঞ্জিনে গৃহীত তাপের যত বেশি অংশ কাজে পরিণত করতে পারে ঐ ইঞ্জিনের দক্ষতা তত বেশি হয়। বাষ্পীয় ইঞ্জিনের তুলনায় পেট্রোল ইঞ্জিনের দক্ষতা বেশি।

এখন তাপ ইঞ্জিনের তাপীয় দক্ষতা বা সংক্ষেপে দক্ষতা আলোচনা করা যাক।

তাপীয় দক্ষতা ঃ কাজে পরিণত তাপ এবং গৃহীত তাপের অনুপাতকে তাপীয় দক্ষতা বলে। একে η দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ধরা যাক তাপ ইঞ্জিনে কার্যরত পদার্থ T_1 তাপমাত্রার উৎস হতে Q_1 পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে W পরিমাণ কাজ সম্পাদন করে এবং অবশিষ্ট তাপ Q_2, T_2 তাপমাত্রার তাপ গ্রাহকে বর্জন করে। তাহলে কার্যে পরিণত তাপের পরিমাণ $= Q_1 - Q_2$

$$\text{ইঞ্জিনের তাপীয় দক্ষতা, } \eta = \frac{\text{কার্যে পরিণত তাপ}}{\text{উৎস হতে গৃহীত তাপ}}$$

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1)$$

সমীকরণ (1) হতে দেখা যায় যে, Q_2-এর মান যত কম হবে দক্ষতা η তত বেশি হবে।
ইঞ্জিনের দক্ষতা সাধারণত শতকরা হিসেবে প্রকাশ করা হয়।

$$\text{ইঞ্জিনের তাপীয় দক্ষতা, } \boxed{\eta = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right) \times 100\%} \quad (2)$$

১৬.৬ কার্ণোর ইঞ্জিন
Carnot's engine

যে যন্ত্রের সাহায্যে তাপ শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তর করা হয় তাকে তাপ ইঞ্জিন (heat engine) বলে। তাপ কার্যে রূপান্তরিত হওয়ার নিমিত্ত তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা প্রদানের জন্য ফরাসি প্রকৌশলী সাদি কার্ণো (Sadi Carnot, 1796—1832) সকল দোষ-ত্রুটিমুক্ত একটি আদর্শ ইঞ্জিনের পরিকল্পনা করেন। একে কার্ণোর ইঞ্জিন বলা হয়। কার্যক্ষেত্রে ব্যবহৃত তাপ ইঞ্জিনগুলোর অনেক দোষ-ত্রুটি থাকে। কার্ণোর কল্পিত ইঞ্জিনটি এই সব দোষ-ত্রুটি এবং অসম্পূর্ণতা হতে একেবারে মুক্ত। বলা বাহুল্য, কার্ণোর ইঞ্জিন একটি নিছক কল্পনা মাত্র এবং বাস্তবক্ষেত্রে এটা নির্মাণ করা সম্ভব নয়। তবে এর কার্যপ্রণালীর তাত্ত্বিক ব্যাখ্যা প্রদান খুবই সহজ।

ইঞ্জিনের বিবরণ (Description of the engine)

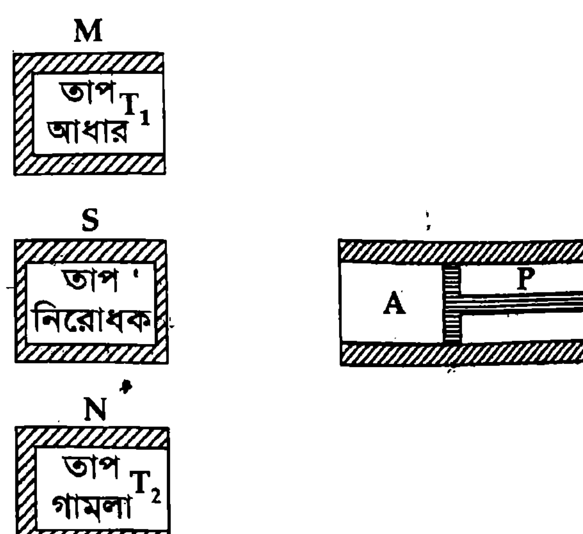
এই ইঞ্জিনে নিম্নলিখিত অংশগুলো আছে ঃ

(i) চোঙ বা সিলিন্ডার (Cylinder), A [চিত্র ১৬.২] ঃ এর তিনদিকের দেয়াল সম্পূর্ণ তাপ অন্তরক পদার্থের তৈরি ; কিন্তু তলদেশ সম্পূর্ণ তাপ পরিবাহীর দ্বারা তৈরি। চোঙের অভ্যন্তরে কার্যকরী পদার্থ (working substance) আবদ্ধ থাকে। চোঙটির অভ্যন্তরে তাপ অন্তরক পদার্থের তৈরি একটি পিস্টন P ঘর্ষণহীনভাবে চলাচল করতে পারে। ইঞ্জিনে কার্যকরী পদার্থ হিসেবে কোন আদর্শ গ্যাসকে ব্যবহার করা হয়।

(ii) তাপ আধার বা তাপ উৎস (heat source), M ঃ T_1 পরম তাপমাত্রায় রাখা অতি উচ্চতাপ গ্রহীতাযুক্ত একটি উত্তপ্ত বস্তু। এটা তাপ আধার বা উৎস হিসেবে কাজ করে। এর তাপমাত্রা সর্বদা স্থির থাকে।

(iii) তাপ গামলা বা তাপ গ্রাহক (heat sink), N ঃ T_2 পরম তাপমাত্রায় রাখা অনুরূপ একটি শীতল বস্তু বা সিংক যা তাপ গ্রাহক হিসেবে কাজ করে। এর তাপগ্রহীতা অতি উচ্চ। এর তাপমাত্রাও সর্বদা স্থির থাকে। $T_2 < T_1$

(iv) আসন, S ঃ S সম্পূর্ণ তাপ নিরোধক বা অন্তরক একটি পাটাতন বা আসন। এর উপর চোঙকে বসানো যায়। তাপ আধার এবং তাপ গ্রাহক উভয়ই উচ্চতাপ গ্রহীতাযুক্ত হওয়ায় তাদের সাথে চোঙে তাপ আদান-প্রদান হলে তাদের তাপমাত্রা অপরিবর্তিত থাকে। চোঙ, তাপ আধার, তাপ গামলা তাপ অন্তরক আসনের উপর বসানো যেতে পারে এবং ঘর্ষণবিহীনভাবে সরানো যেতে পারে।

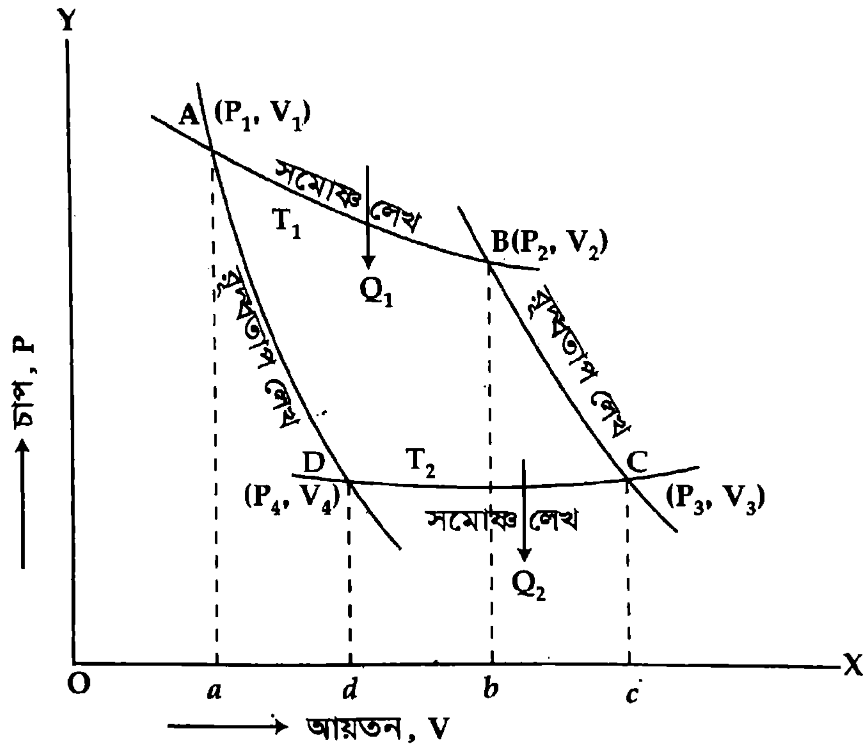


চিত্র ১৬.১

১৬·৭ কার্নোর চক্রের ক্রিয়া ও সম্পাদিত কাজ
Operations of Carnot's cycle and work done

কার্নোর চক্রের ক্রিয়া ও সম্পাদিত কাজকে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। একে সূচক বা নির্দেশক চিত্র বলে। নিম্নে সূচক বা নির্দেশক চিত্রে কার্নোর চক্রের বিভিন্ন ক্রিয়ার ব্যাখ্যা ও সম্পাদিত কাজের হিসেব করা হল ঃ

প্রথম ধাপ ঃ এই ধাপে সিলিন্ডারকে তাপ উৎসের উপর বসানো হয়। খুবই অল্প সময়ের মধ্যে সিলিন্ডারের কার্যকরী পদার্থের (গ্যাস) তাপমাত্রা উৎসের তাপমাত্রা T_1-এর সমান হয়। নির্দেশক চিত্রে A বিন্দু এই অবস্থা নির্দেশ করে [চিত্র ১৬·৩]। ধরা যাক, এ অবস্থায় গ্যাসের চাপ P_1 এবং আয়তন V_1। এরপর গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় প্রসারিত হতে দেয়া হয়। প্রসারণের সময় উৎস হতে Q পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে। সমোষ্ণ প্রসারণ শেষে গ্যাসের চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_2 ও V_2। চিত্রে B বিন্দু দ্বারা এ অবস্থা নির্দেশ করা হয়েছে।



চিত্র ১৬·২

নির্দেশক চিত্রে AB সমোষ্ণ প্রসারণের জন্য কৃত কাজ, W = ABba ক্ষেত্রফল।

দ্বিতীয় ধাপ ঃ এই ধাপে সিলিন্ডারকে তাপ নিরোধক বা অন্তরক আসনের উপরে বসানো হয় এবং আবদ্ধ গ্যাসকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় প্রসারিত হতে দেয়া হয়। রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় গ্যাসের তাপমাত্রা কমে তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা T_2-এর সমান হয়। প্রক্রিয়া শেষে গ্যাসের চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_3 ও V_3 হয় যা চিত্রে C বিন্দু দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে।

নির্দেশক চিত্রে BC রুদ্ধতাপ প্রসারণ বুঝায় এবং এই প্রসারণে কৃত কাজ, W_2 = BCcb ক্ষেত্রফল।

তৃতীয় ধাপ ঃ এবার সিলিন্ডারকে তাপগ্রাহকের উপর বসানো হয় এবং গ্যাসকে সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় পিস্টন দ্বারা সংকুচিত বা সংনমিত করা হয় ; ফলে গ্যাসের চাপ বৃদ্ধি পায়। এই ধাপে পিস্টন দ্বারা গ্যাসে কাজ সম্পাদিত হয়। সংকোচন বা সংনমনের সময় গ্যাস T_2 তাপমাত্রার তাপ গ্রাহকে Q_2 তাপ বর্জন করে। এই অবস্থায় গ্যাসের চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_4 ও V_4 হয় যা চিত্রের D বিন্দু নির্দেশ করে।

নির্দেশক চিত্রের CD সমোষ্ণ লেখ T_2 তাপমাত্রায় গ্যাসের সংকোচন বুঝায় এবং এই প্রক্রিয়ায় কৃত কাজ, W_3 = CcdD ক্ষেত্রফল।

চতুর্থ ধাপ ঃ এই ধাপে সিলিন্ডারকে তাপ নিরোধক বা অন্তরক আসনের উপর বসানো হয় এবং আবদ্ধ গ্যাসকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সংকুচিত বা সংনমিত করা হয়। এই আবদ্ধ গ্যাসের উপর কাজ সম্পাদিত হওয়ায় এর

তাপমাত্রা বেড়ে উৎসের তাপমাত্রায় সমান হয়। এই প্রক্রিয়ায় গ্যাসের চাপ ও আয়তন যথাক্রমে P_1 ও V_1 হয়। অর্থাৎ চক্র আদি অবস্থায় ফিরে যায়। চিত্রে A বিন্দু এই অবস্থা নির্দেশ করে।

নির্দেশক চিত্রের DA লেখ রুদ্ধতাপীয় সংকোচন বুঝায় এবং এই পর্যায়ে কৃত কাজ, W_4 = DdaA ক্ষেত্রফল।

প্রচলিত প্রথা অনুসারে আবদ্ধ গ্যাস দ্বারা কৃত কাজ ধনাত্মক এবং গ্যাসের উপর কৃত কাজ ঋণাত্মক হবে। সুতরাং, W_1 ও W_2 ধনাত্মক এবং W_3 ও W_4 ঋণাত্মক হবে।

অতএব, আবদ্ধ গ্যাস দ্বারা মোট কৃত কাজ,

$W = W_1 + W_2 - W_3 - W_4$ = ABCD ক্ষেত্রফল।

উপরের বর্ণনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে কার্নো চক্রে কার্যকরী পদার্থ (গ্যাস) কর্তৃক কৃত কাজ নির্দেশক চিত্রে দুটি সমোষ্ণ ও দুটি রুদ্ধতাপীয় রেখ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফলের সমান। এই চক্রকে কার্নোর চক্র বলা হয়।

কার্নোর ইঞ্জিনের দক্ষতা (Efficiency of Carnot's engine) : ইঞ্জিন একটি চক্রে যে পরিমাণ তাপকে কাজে পরিণত করে এবং তাপ উৎস হতে যে পরিমাণ শোষণ করে, এদের অনুপাতকে ইঞ্জিনের দক্ষতা বলে। একে η দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনে করি কার্নো ইঞ্জিনের কার্যকরী পদার্থ (গ্যাস) কর্তৃক গৃহীত তাপ Q_1 এবং বর্জিত তাপ Q_2। তাহলে কার্যে পরিণত তাপের পরিমাণ $= Q_1 - Q_2$

$$\text{ইঞ্জিনের দক্ষতা}, \eta = \frac{\text{কার্যে পরিণত তাপ}}{\text{উৎস হতে গৃহীত তাপ}}$$

$$= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

$$= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (3)$$

কার্নো ইঞ্জিনের ক্ষেত্রে ইঞ্জিন দ্বারা গৃহীত বা বর্জিত তাপ তাপ উৎস বা তাপ গ্রাহকের তাপমাত্রার সমানুপাতিক। অর্থাৎ $\frac{Q}{T}$ = ধ্রুবক।

অতএব,

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

বা, $$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

অতএব, সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

বা, $$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T} \qquad (4)$$

দক্ষতা সাধারণত শতকরা হিসেবে প্রকাশ করা হয়।

$$\text{কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা}, \eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \times 100\% \qquad (5)$$

সমীকরণ (5) হতে দেখা যায় যে, ইঞ্জিনের দক্ষতা তাপ উৎস ও তাপগ্রাহকের তাপমাত্রার উপর নির্ভর করে ; কার্যকরী পদার্থের প্রকৃতির উপরে নয়।

কার্নোর ইঞ্জিনকে আদর্শ ইঞ্জিন বলা হয়। ব্যবহারিক যে কোন ইঞ্জিনের চেয়ে এর দক্ষতা বেশি।

কার্নো চক্র একটি প্রত্যাগামী চক্র (Carnot cycle is reversible) ঃ

কোন চক্র প্রত্যাগামী হতে গেলে যে সমস্ত বৈশিষ্ট্য থাকা প্রয়োজন কার্নোর আদর্শ ইঞ্জিনে সেগুলো রয়েছে। যেমন—

(১) পিস্টন ও চোঙ বা সিলিন্ডারের মধ্যে কোন ঘর্ষণ নেই।

(২) কার্যকরী পদার্থ (গ্যাস)-এর উপর প্রযুক্ত প্রক্রিয়াগুলো খুব ধীরে ধীরে সংঘটিত হয়।

(৩) পিস্টন ও সিলিন্ডার নির্মাণে আদর্শ তাপ নিরোধক বা অন্তরক ও আদর্শ তাপ পরিবাহী ব্যবহার করা হয় এবং তাপ উৎস ও তাপ গ্রাহকের উপাদান এমন অতি উচ্চ তাপ গ্রাহিতাযুক্ত করা হয় যে সমোষ্ণ প্রক্রিয়াগুলো স্থির তাপমাত্রায় সংঘটিত হয়।

১৬·৮ এনট্রপি
Entropy

আমরা জানি কোন গ্যাসকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় সঙ্কুচিত করার সময় কিছু কাজ করা হয়। ফলে গ্যাসের তাপশক্তি এবং সেই সঙ্গে তাপমাত্রা বৃদ্ধি পায়। পুনঃ গ্যাসকে রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় প্রসারিত হতে দিলে গ্যাসকে কিছু কাজ করতে হয়। অন্তর্নিহিত শক্তির বিনিময়ে গ্যাস এই কাজ করে থাকে। ফলে গ্যাসের তাপশক্তি ও তাপমাত্রা এই দুটির একটিও স্থির থাকে না। উভয়েই একই সঙ্গে বৃদ্ধি পায় বা হ্রাস পায়।

বিজ্ঞানী **ক্লসিয়াস** তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র প্রয়োগ করতে গিয়ে উপলব্ধি করেন যে, সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় যেমন বস্তুর তাপমাত্রা স্থির থাকে, তেমন রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় বস্তুর **'কোন কিছু'** স্থির থাকে। রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় বস্তুর সংগে যখন পরিপার্শ্বের কোন তাপ আদান-প্রদান হয় না, তখন বস্তুর যে তাপীয় ধর্ম অপরিবর্তিত থাকে ক্লসিয়াস তার নাম দেন এনট্রপি। অতএব এনট্রপির নিম্নলিখিত সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে ঃ

রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় বস্তুর যে তাপীয় ধর্ম স্থির থাকে, তাকে এনট্রপি বলে।

অন্যভাবে বলা হয়, **এনট্রপি হল বস্তুর এমন একটি ভৌত ধর্ম যা রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ায় স্থির থাকে।**

এনট্রপি বস্তুর একটি ভৌত ধর্ম। তাপগতিবিজ্ঞানে এর গুরুত্ব অপরিসীম। এটি তাপগতীয় রাশিসমূহের এমন একটি অপেক্ষক যা তাপ প্রবাহের দিক বা তাপ সঞ্চালনের দিক নির্দেশ করে এবং তাপগতীয় অবস্থা নির্ধারণে সহায়তা করে।

তাপমাত্রা, আয়তন ও চাপের ন্যায় বস্তুর এনট্রপিও একটি রাশি। এর মান বস্তুত বর্তমান অবস্থার উপর নির্ভর করে। তবে কোন্ পথে বস্তু ঐ অবস্থায় পৌছল তার উপর নির্ভর করে না অর্থাৎ কোন নির্দিষ্ট অবস্থায় বস্তুর এনট্রপি বস্তুর পূর্ব ইতিহাসের উপর নির্ভর করে না। তাপ গ্রহণে বা বর্জনে বস্তুর এনট্রপি পরিবর্তিত হয়।

১৬·৮·১ এনট্রপির একক
Unit of entropy

কোন একটি সংস্থা বা চক্রের তাপমাত্রা সাপেক্ষে গৃহীত বা বর্জিত তাপের পরিবর্তনের হার দ্বারা এনট্রপি পরিমাপ করা হয়।

মনে করি কোন একটি ব্যবস্থা বা সিস্টেম T পরম তাপমাত্রায় dQ পরিমাণ তাপ গ্রহণ বা বর্জন করে। অতএব এনট্রপি

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{6}$$

T-এর একক কেলভিন এবং dQ এর একক জুল। অতএব এনট্রপির এস.আই. একক জুল / কেলভিন (JK^{-1})।

১৬·৮·২ এনট্রপির তাৎপর্য
Significance of entropy

তাপগতিবিদ্যায় এনট্রপির গুরুত্ব অপরিসীম। এর নিম্নলিখিত তাৎপর্য রয়েছে ঃ

১। এনট্রপি একটি প্রাকৃতিক রাশি যার মান তাপ ও পরম তাপমাত্রার অনুপাতের সমান।

২। এটি বস্তুর একটি তাপীয় ধর্ম যা তাপ সঞ্চালনের দিক নির্দেশ করে।

৩। এটি বস্তুর তাপগতীয় অবস্থা নির্ধারণে সহায়তা করে।

৪। এটি তাপমাত্রা, চাপ, আয়তন, অন্তর্নিহিত শক্তি, চুম্বকীয় অবস্থার ন্যায় কোন বস্তুর অবস্থা প্রকাশ করে।

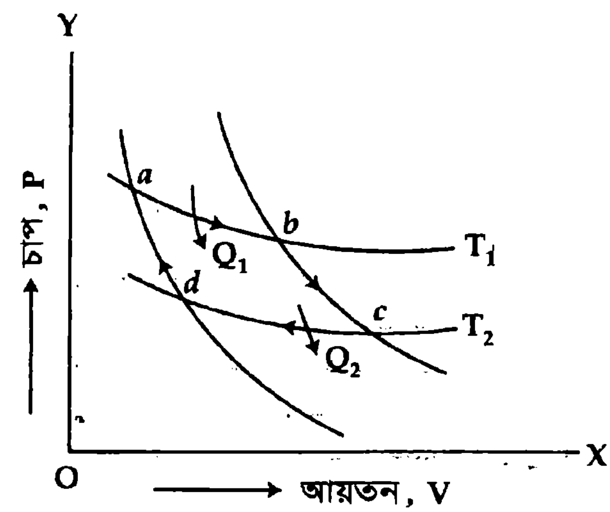
৫। এনট্রপি বৃদ্ধি পেলে বস্তু শৃঙ্খল অবস্থা (ordered state) হতে বিশৃঙ্খল অবস্থায় (disordered state) পরিণত হয়।

৬। তাপমাত্রা ও চাপের ন্যায় একে অনুভব করা যায় না।

১৬.৯ প্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপির পরিবর্তন
Change of entropy in a reversible process

মনে করি *abcd* একটি পূর্ণ প্রত্যাগামী কার্ণো চক্র। ১৬.৪নং চিত্রে এটি প্রদর্শিত হল।

উক্ত চক্রে *ab* ও *cd* দুটি সমোষ্ণ লেখ এবং *bc* ও *da* দুটি রুদ্ধতাপ লেখ। মনে করি *ab* সমোষ্ণ লেখ বরাবর *a* বিন্দু হতে *b* বিন্দুতে আসতে কার্যরত পদার্থ T_1 তাপমাত্রায় তাপ উৎস হতে Q_1 পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে এবং *cd* সমোষ্ণ লেখ বরাবর *c* বিন্দু হতে *d* বিন্দুতে আসতে কার্যরত পদার্থ T_2 তাপমাত্রায় তাপ গ্রাহকে Q_2 পরিমাণ তাপ বর্জন করে। কিন্তু *bc* ও *da* রুদ্ধতাপ লেখ হওয়ায় লেখ দুটি বরাবর কোন তাপ গ্রহণ বা বর্জন হবে না বলে এনট্রপির কোন পরিবর্তন হবে না।



চিত্র ১৬.৩

ab সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় এনট্রপি বৃদ্ধি $= \dfrac{Q_1}{T_1}$

এবং *cd* সমোষ্ণ প্রক্রিয়ায় এনট্রপি হ্রাস $= \dfrac{Q_2}{T_2}$

সমগ্র চক্রে কার্যরত বস্তুর এনট্রপির মোট পরিবর্তন $= \dfrac{Q_1}{T_1} - \dfrac{Q_2}{T_2}$

কিন্তু চক্রটি প্রত্যাগামী হওয়ায় $= \dfrac{Q_1}{T_1} = \dfrac{Q_2}{T_2}$

সুতরাং এনট্রপির মোট পরিবর্তন $\Delta S = \dfrac{Q_1}{T_1} - \dfrac{Q_2}{T_2} = 0$

বা, $\Delta S = \Sigma \dfrac{Q}{T} = 0$

অতএব সিদ্ধান্ত এই যে, প্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় যে কোন সংস্থার এনট্রপি স্থির থাকে।

১৬.১০ অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপির পরিবর্তন
Change of entropy in an irreversible process

মনে করি কোন অপ্রত্যাগামী ইঞ্জিন T_1 তাপমাত্রায় Q_1 পরিমাণ তাপ গ্রহণ করে এবং T_2 তাপমাত্রায় Q_2 পরিমাণ তাপ বর্জন করে। এক্ষেত্রে কর্মদক্ষতা

$$\eta' = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \tag{7}$$

কিন্তু তাপমাত্রার একই সীমার মধ্যে কোন প্রত্যাগামী চক্রের (কার্নোর চক্রের) কর্মদক্ষতা

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{8}$$

এখন কার্নোর উপপাদ্য[১] অনুসারে $\eta > \eta'$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} > \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

বা, $$1 - \frac{T_2}{T_1} > 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

বা, $$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}$$

বা, $$\frac{Q_2}{T_2} > \frac{Q_1}{T_1}$$

বা, $$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} > 0 \qquad (9)$$

অতএব কার্যনির্বাহক সংস্থাটিকে সামগ্রিকভাবে বিবেচনা করলে আমরা দেখি যে তাপ উৎসটি $\frac{Q_1}{T_1}$ পরিমাণ এনট্রপি হারায় এবং তাপ গ্রাহকটি $\frac{Q_2}{T_2}$ পরিমাণ এনট্রপি লাভ করে। সুতরাং সমগ্র প্রক্রিয়াটিতে মোট লাভ $= \left(\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}\right)$ যার মান ধনাত্মক।

অতএব অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপি বৃদ্ধি পায়। অপরপক্ষে তাপের আয়ুষ্কাল হ্রাস পাচ্ছে অর্থাৎ তাপ মৃত্যুর দিকে ধাবিত হচ্ছে।

১৬.১১ এনট্রপির মাধ্যমে তাপগতিবিজ্ঞানের দ্বিতীয় সূত্রের প্রকাশ

Formulation of the second law of thermodynamics in terms of entropy

ক্লসিয়াসের মতে তাপগতিবিজ্ঞানের প্রথম সূত্র নিম্নরূপ ঃ

বিশ্বের মোট শক্তি স্থির। একে শক্তির নিত্যতার সূত্রও বলা যায়। ক্লসিয়াস তাপগতিবিজ্ঞানের দ্বিতীয় সূত্রকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করেন।

বিশ্বের এনট্রপি ক্রমাগত বৃদ্ধির দিকে যাচ্ছে। একে এনট্রপির বৃদ্ধির সূত্রও বলা যায়। আমরা স্বাভাবিকভাবে এনট্রপির মাধ্যমে তাপগতিবিজ্ঞানের দ্বিতীয় সূত্রকে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি ঃ

প্রকৃতির সকল ভৌত অথবা রাসায়নিক ক্রিয়া এমনভাবে সংঘটিত হয় যে, যার ফলে সার্বিক ব্যবস্থার এনট্রপি বৃদ্ধি পায়। সীমায়িত ক্ষেত্রে একটি প্রত্যাবর্তী প্রক্রিয়ার এনট্রপি অপরিবর্তিত থাকে।

তাপগতিবিজ্ঞানের দ্বিতীয় সূত্রকে গাণিতিকভাবে সংজ্ঞায়িত করার জন্য ধরা যাক একটি ব্যবস্থার প্রাথমিক ও চূড়ান্ত অবস্থা A ও B-তে এনট্রপির মান যথাক্রমে S_A এবং S_B। সুতরাং ব্যবস্থাটির এনট্রপির পরিবর্তন,

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \qquad (10)$$

যদি A ও B অবস্থা দুটি পরস্পর খুবই কাছাকাছি হয়, তবে লেখা যায়, $dS = \frac{dQ}{T}$

$$dQ = T\,dS \qquad (11)$$

এটিই তাপগতিবিজ্ঞানের দ্বিতীয় সূত্রের গাণিতিক সংজ্ঞা।

১৬.১২ অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপি বৃদ্ধির উদাহরণ

Examples of increase of entropy in irreversible process

আমরা জানি অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপি বৃদ্ধি পায়। বিশ্ব জগতের অধিকাংশ প্রক্রিয়াই অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া। সুতরাং বলা যায় বিশ্বজগতের এনট্রপি ক্রমাগত বৃদ্ধি পাচ্ছে।

---

[১] যে কোন দুটি নির্দিষ্ট তাপমাত্রার মধ্যে ক্রিয়ারত কার্নোর প্রত্যাগামী ইঞ্জিনের কর্ম দক্ষমতা অপেক্ষা অন্য কোন ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা বেশি হতে পারে না। একে কার্নোর উপপাদ্য বলে।

এভাবে এনট্রপি বৃদ্ধি পেতে পেতে যখন সর্বোচ্চ মানে পৌছাবে তখন বিশ্বের সকল ব্যবস্থা তাপীয় সাম্যবস্থায় উপনীত হবে। তাপীয় সাম্যবস্থায় পৌছলে তাপশক্তিকে ফলপ্রসূ কাজে পরিণত করা সম্ভব হবে না। ফলে কার্যকরী শক্তির দুষ্প্রাপ্যতা সৃষ্টি হবে।

এমনিভাবে যদি চলতে থাকে, তবে পৃথিবী এমন একটি ভয়াবহ অবস্থায় পৌছাবে যে সে তাপ শক্তি সরবরাহে অক্ষম হয়ে পড়বে। এ অবস্থায় পৃথিবীর **তাপীয় মৃত্যু** (Thermal Death of the Earth) হয়েছে বলা হবে।

স্মরণিকা

প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া : যে প্রক্রিয়া সম্মুখ পরিবর্তনের পর বিপরীতমুখী হয়ে প্রত্যাবর্তন করতে পারে এবং সম্মুখ ও বিপরীতমুখী পরিবর্তনের প্রতি স্তরে তাপ ও কার্যের ফলাফল সমান ও বিপরীতমুখী হয় তাকে প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলে।

অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া : যে প্রক্রিয়ায় কার্যরত বস্তু সম্মুখগামী হওয়ার পর বিপরীতমুখী হয়ে প্রত্যাবর্তন করতে পারে না তাকে অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলে।

তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র :

ক্লসিয়াসের বিবৃতি : বাইরের কোন শক্তির সাহায্য ব্যতিরেকে কোন স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রের পক্ষে নিম্ন তাপমাত্রার কোন বস্তু হতে উচ্চ তাপমাত্রার কোন বস্তুতে তাপের স্থানান্তর সম্ভব নয়।

কেলভিনের বিবৃতি : কোন বস্তুকে তার পরিপার্শ্বের শীতলতম অংশ হতে অধিকতর শীতল করে শক্তির অবিরাম সরবরাহ পাওয়া সম্ভব নয়।

প্লাঙ্কের বিবৃতি : কোন তাপ উৎস হতে অনবরত তাপ শোষণ করবে এবং তা সম্পূর্ণরূপে কাজে রূপান্তরিত হবে এরূপ একটি তাপ ইঞ্জিন তৈরি করা সম্ভব নয়।

কার্নোর বিবৃতি : কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ তাপশক্তি সম্পূর্ণভাবে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তর করার মত যন্ত্র তৈরি করা সম্ভব নয়।

তাপ ইঞ্জিন : যে যন্ত্র দ্বারা তাপ শক্তিকে যান্ত্রিক শক্তিতে রূপান্তর করা যায় তাকে তাপ ইঞ্জিন বলে।

তাপ ইঞ্জিনের দক্ষতা বা তাপীয় দক্ষতা : কাজে পরিণত তাপ এবং গৃহীত তাপের অনুপাতকে তাপ ইঞ্জিনের দক্ষতা বলে। ইঞ্জিনের দক্ষতা, $\eta = \dfrac{\text{কাজে পরিণত তাপ}}{\text{উৎস হতে গৃহীত তাপ}} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}$

কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা : কার্নো ইঞ্জিনের কার্যকরী পদার্থ কর্তৃক উৎস হতে গৃহীত তাপ Q_1 এবং তাপগ্রাহকে বর্জিত তাপ Q_2 যথাক্রমে উৎসের তাপমাত্রা T_1 ও তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা T_2 এর সমানুপাতিক। অতএব, কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা, $\eta = 1 - \dfrac{T_2}{T_1}$। শতকরা হিসেবে $\eta = \left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right) \times 100\%$

এনট্রপি : রুদ্ধতাপীয় প্রক্রিয়ায় বস্তুর যে তাপীয় ধর্ম স্থির থাকে, তাকে এনট্রপি বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

তাপ ইঞ্জিনের দক্ষতা, $\eta = \left(1 - \dfrac{Q_2}{Q_1}\right) \times 100\%$ ... ... (1)

কার্ণোর ইঞ্জিনের দক্ষতা, $\eta = \left(1 - \dfrac{T_2}{T_1}\right) \times 100\%$ (2)

এনট্রপি, $dS = \dfrac{dQ}{T}$M (3)

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \qquad (4)$$

প্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপির মোট পরিবর্তন, $\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$ (5)

অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপির মোট পরিবর্তন, $\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} > 0$ (7)

সমাধানকৃত উদাহরণ

P.√

১। একটি প্রত্যাবর্তী ইঞ্জিন 167°C ও 57°C তাপমাত্রায় কার্যকর হলে এর সর্বাধিক দক্ষতা নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$
$$= 1 - \frac{330}{440}$$
$$= 1 - 0{\cdot}75$$
$$= 0{\cdot}25$$
$$= 25\%$$

এখানে,

$T_1 = 167°C = (167 + 273)K = 440K$

$T_2 = 57°C = (57 + 273)\ K = 330K$

$\eta = ?$

P.√

২। একটি আদর্শ ইঞ্জিনের কার্যকর বস্তু প্রত্যেক বার উৎস হতে যত ক্যালরি তাপ গ্রহণ করে কাজ সম্পন্ন করার পর তার 80% তাপ বর্জন করে। ইঞ্জিনের দক্ষতা নির্ণয় কর।

ধরা যাক গৃহীত তাপ $= Q_1$

আমরা পাই, দক্ষতা, $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \times 100\%$

তা হলে বর্জিত তাপ, $Q_2 = 80\% \times Q_1 = \frac{80}{100} Q_1 = 0{\cdot}8\, Q_1$

নির্ণেয় দক্ষতা, $\eta = \frac{Q_1 - 0{\cdot}8Q_1}{Q_1} \times 100\% = 20\%$

৩। একটি কার্নো ইঞ্জিন 800K ও 400K তাপমাত্রায় যে দক্ষতায় কাজ করে, ঠিক সম দক্ষতায় কাজ করে TK ও 900K তাপমাত্রায়। তাপমাত্রা T-এর মান বের কর। [সি. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

ইঞ্জিনের দক্ষতা, $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$
$$= \frac{800 - 400}{800}$$
$$= 0{\cdot}5 = 50\%$$

আবার,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$
$$0{\cdot}5 = \frac{T - 900}{T}$$

বা, $0{\cdot}5\, T = T - 900$

বা, $0{\cdot}5\, T = 900$

$\therefore T = \frac{900}{0{\cdot}5} = 1800K$

এখানে,

প্রথম ক্ষেত্রে,

উৎসের তাপমাত্রা, $T_1 = 800K$

তাপ গ্রাহকের তাপমাত্রা, $T_2 = 400K$

দক্ষতা, $\eta = ?$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে,

উৎসের তাপমাত্রা, $T_1 = TK = ?$

তাপ গ্রাহকের তাপমাত্রা, $T_2 = 900K$

দক্ষতা, $\eta = 0{\cdot}5$

৪। একটি তাপ ইঞ্জিনের দক্ষতা 80%। গ্রাহকের তাপমাত্রা 127°C হলে উৎসের তাপমাত্রা কত? [রা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

বা, $\frac{80}{100} = 1 - \frac{400}{T_1}$

বা, $\frac{400}{T_1} = 1 - \frac{8}{10}$

বা, $\frac{400}{T_1} = \frac{2}{10}$

বা, $T_1 = \frac{400 \times 10}{2} = 2000\ K$

এখানে,

$T_2 = (127 + 273) = 400\ K$

$\eta = 80\% = \frac{80}{100}$

$T_1 = ?$

৫। একটি তাপ ইঞ্জিন উৎস থেকে 600 K তাপমাত্রায় 2.65×10^6 J তাপশক্তি গ্রহণ করে তাপগ্রাহকে 5.12×10^5 J তাপশক্তি বর্জন করে। তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা ও ইঞ্জিনটির দক্ষতা নির্ণয় কর।

[সি. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো.২০০৪; রা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

বা, $$T_2 = \frac{Q_2 \times T_1}{Q_1}$$

$$= \frac{5.12 \times 10^5 \times 600}{2.65 \times 10^6} = 115.924 \text{ K}$$

আবার, দক্ষতা, $$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$= 1 - \frac{115.924}{600} = 0.8068$$

$$= 80.68 \%$$

এখানে,

$T_1 = 600$ K

$Q_1 = 2.65 \times 10^6$ J

$Q_2 = 5.12 \times 10^5$ J

$T_2 = ?$

$\eta = ?$

৬। একটি কার্নো ইঞ্জিনের উৎসের তাপমাত্রা 400 K। এই তাপমাত্রায় এটি উৎস থেকে 840 J তাপ গ্রহণ করে এবং সিংকে 630 J তাপ বর্জন করে। সিংকের তাপমাত্রা ও ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$T_2 = \frac{Q_2}{Q_1} \times T_1$$

$$= \frac{630}{840} \times 400$$

$$T_2 = 300 \text{ K}$$

আবার, $$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{400}$$

$$= 1 - 0.75 = 0.25 = 25\%$$

এখানে,

$T_1 = 400$ K

$Q_1 = 840$ J

$Q_2 = 630$ J

$T_2 = ?$

$\eta = ?$

৭। একটি প্রত্যাগামী ইঞ্জিন উৎস হতে গৃহীত তাপের $\frac{1}{4}$ অংশ কাজে পরিণত করে। এর তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা 80K হ্রাস করলে এর দক্ষতা দ্বিগুণ হয়। উৎস ও গ্রাহকের তাপমাত্রা বের কর।

আমরা জানি,

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{1}{4} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

বা, $$\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{4}$$

এখানে,

দক্ষতা, $\eta_1 = \frac{1}{4}$

উৎসের তাপমাত্রা, $T_1 = ?$

তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা, $T_2 = ?$

তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা 80K কমালে গ্রাহকের পরিবর্তিত তাপমাত্রা হবে $(T_2 - 80)$K।

$$\eta_2 = 1 - \frac{T_2 - 80}{T_1}$$

বা, $$\frac{1}{2} = 1 - \frac{T_2 - 80}{T_1}$$

$$= 1 - \frac{T_2}{T_1} + \frac{80}{T_1} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{80}{T_1}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{80}{T_1}$$

$$\frac{80}{T_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

বা, $$T_1 = 80 \times 4 = 320\text{K}$$

এখানে,

দক্ষতা, $\eta_2 = 2\eta_1 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

আবার, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{4}$

$$T_2 = \frac{3}{4} \times T_1$$
$$= \frac{3}{4} \times 320$$
$$= 240K$$

P.V ৮। **একজন আবিষ্কর্তা দাবি করলেন যে তার উদ্ভাবিত ইঞ্জিন 700K এবং 400K তাপমাত্রার মধ্যে কার্যরত এবং এর যান্ত্রিক দক্ষতা 48%। তাঁর দাবি কি সঠিক ?**

আমরা জানি, যে কোন ইঞ্জিনের চেয়ে কার্নোর ইঞ্জিনের দক্ষতা সর্বাধিক। এখন, কার্নোর ইঞ্জিনের দক্ষতা, $1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$\eta = 1 - \frac{400}{700}$$
$$= \frac{700 - 400}{700} = \frac{3}{7}$$
$$= 0{\cdot}42 = 42\%$$

এখানে,

$T_1 = 700K$

$T_2 = 400K$

আলোচ্য ক্ষেত্রে কোন ইঞ্জিনের দক্ষতা 42%-এর বেশি হতে পারে না। সুতরাং, আবিষ্কর্তার দাবি সঠিক নয়।

৯। **একটি কার্নো ইঞ্জিন যখন 27°C তাপমাত্রায় তাপ গ্রাহকে থাকে তখন এর কর্মদক্ষতা 50%। একে 60% দক্ষ করতে হলে এর উৎসের তাপমাত্রা কত বাড়াতে হবে ?** [ব. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৫]

আমরা পাই,

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

বা, $\frac{50}{100} = 1 - \frac{300}{T_1}$

বা, $\frac{300}{T_1} = 1 - \frac{50}{100} = \frac{50}{100}$

বা, $T_1 = \frac{300 \times 100}{50} = 600K$

এখানে,

$T_2 = (27 + 273)K = 300K$

$\eta_1 = 50\% = \frac{50}{100}$

$T_1 = ?$

আবার,

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

বা, $\frac{60}{100} = 1 - \frac{300}{T_1'}$

বা, $\frac{300}{T_1} = 1 - \frac{60}{100} = \frac{40}{100}$

বা, $T_1 = \frac{300 \times 100}{40} = 750\ K$

এখানে,

$T_2 = 300K$

$\eta_1 = 60\% = \frac{60}{100}$

$T_1 = ?$

উৎসের তাপমাত্রা বাড়াতে হবে= $(750 - 600)\ K = 150\ K$

1.V ১০। **একটি কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা 60%। যদি তাপ উৎসের তাপমাত্রা 450K হয় তবে তাপ গ্রাহকের তাপমাত্রা কত ?** [সি. বো. ২০০৪]

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

বা, $\frac{60}{100} = 1 - \frac{T_2}{450}$

বা, $\frac{T_2}{450} = 1 - \frac{60}{100}$

বা, $T_2 = 180\ K$

$\eta = 60\%$

$= \frac{60}{100}$

$T_1 = 450\ K$

$T_2 = ?$

Q. ১১। 0·01 kg পানিকে 0°C হতে 10°C তাপমাত্রায় উত্তপ্ত করা হল। এনট্রপির পরিবর্তন নির্ণয় কর।

মনে করি এনট্রপির পরিবর্তন $= dS$

আমরা পাই, $dS = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} ms\frac{dT}{T}$ [$\because dQ = msdT$]

$= ms \log_e \frac{T_2}{T_1}$ (1)

এখানে,

$m = 0·01$ kg

$s = 4200$ J kg^{-1}K^{-1}

$T_1 = 0°C = (0 + 273)$ K $= 273$ K

$T_2 = 10°C = (10 + 273)$ K $= 283$ K

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$dS = 0·01 \text{ kg} \times 4200 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1} \times \log_e \frac{283}{273}$$

$$= 42 \times 2·303 \text{ JK}^{-1} (\log_{10} 283 - \log_{10} 273)$$

$$= 42 \times 2·303 \text{ JK}^{-1} (2·4517 - 2·4361)$$

$$= 42 \times 2·303 \times 0·0156 \text{ J K}^{-1}$$

$$= 1·509 \text{ JK}^{-1}$$

১২। 10°C তাপমাত্রায় 5 kg পানিকে 100°C তাপমাত্রায় উত্তীর্ণ করতে এনট্রপির পরিবর্তন নির্ণয় কর। [পানির আপেক্ষিক তাপ $= 4·2 \times 10^3$ J kg^{-1} k^{-1}] [য. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৫]

আমরা জানি,

$$dS = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T}$$

এখানে, $dQ = ms\,dT$

$$dS = \int_{283}^{373} ms\frac{dT}{T}$$

$$= ms [\log_e T]_{283}^{373}$$

$$= 5 \times 4·2 \times 10^3 \times [\log_e 373 - \log_e 283]$$

$$= 21000 \times \log_e \frac{373}{283}$$

$$= 21000 \times 0·2761$$

$$= 5·799 \times 10^3$$

$$dS = 5·799 \times 10^3 \text{ J K}^{-1}$$

এখানে,

$T_1 = (10 + 273)$ K $= 283$ K

$T_2 = (100 + 373)$ K $= 373$ K

$s = 4·2 \times 10^3$ Jkg^{-1} K^{-1}

$m = 5$ kg

$dS = ?$

Q. ১৩। 1 kg বরফ যখন 0°C তাপমাত্রায় পানিতে পরিণত হয় তখন এনট্রপির বৃদ্ধি কত হয় নির্ণয় কর। [বরফ গলনের সুপ্ত তাপ L = 336000 Jkg^{-1}]

মনে করি এনট্রপির বৃদ্ধি $= \Delta S$

আমরা জানি,

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

আবার $\Delta Q = mL = 1 \text{ kg} \times 336000 \text{ Jkg}^{-1}$

$= 336000$ J

$$\Delta S = \frac{336000 \text{ J}}{273 \text{ K}} = 1231 \text{ JK}^{-1}$$

এখানে

$m = 1$ kg

L $= 336000$ J kg^{-1}

T $= 0 + 273 = 273$ K

1. = 40

২√

১৪। 100 °C তাপমাত্রার 4 kg পানিকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করলে এনট্রপির বৃদ্ধি কত হয় নির্ণয় কর। [পানির বাষ্পীভবনের সুপ্ত তাপ = 2.26×10^6 Jkg^{-1}]।

মনে করি এনট্রপির বৃদ্ধি = dS

আমরা জানি,

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

এখানে $m = 4$ kg

$L = 2.26 \times 10^6$ J kg^{-1}

$T = 100 + 273 = 373$ K

আবার $dQ = mL = 4 \times 2.26 \times 10^6$ J

$$dS = \frac{4 \times 2.26 \times 10^6 \text{J}}{373 \text{ K}} = 2.42 \times 10^4 \text{JK}^{-1}$$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন :

১। প্রত্যাগামী প্রক্রিয়া কি ? [ঢা. বো. ২০০৩]

২। প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৬, '০৪, '০১; চ. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৪]

অথবা, প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া বলতে কি বুঝ ? [ঢা. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০২]

৩। অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার একটি উদাহরণ দাও। [য. বো. ২০০৪]

৪। তাপ ইঞ্জিন কি ? [য. বো. ২০০৪]

৫। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি বিবৃত কর। [ঢা. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৫, ২০০২ ; সি. বো. ২০০২]

৬। এনট্রপি কি ? [রা. বো. ২০০৬, ২০০৫, ২০০৩ ; চ. বো. ২০০৬, ২০০৩, ২০০১; কু. বো. ২০০৬, ২০০০ ; সি. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০০ ; ব. বো. ২০০১]

অথবা, এনট্রপি বলতে কি বুঝ ? ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]

৭। পৃথিবীর তাপীয় মৃত্যু বলতে কি বুঝ ? [কু. বো. ২০০৩]

৮। এনট্রপির তাৎপর্য লেখ। এর একক কি ?

৯। প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ কর। [চ. বো. ২০০৬, ২০০১; সি. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০১; ব. বো. ২০০১]

১০। ইঞ্জিনের তাপীয় দক্ষতা কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০১]

১১। কার্নোর চক্র কি ?

১২। এনট্রপির তাৎপর্য লেখ। এর একক কি?

১৩। কার্নোর ইঞ্জিন কি ? [সি. বো. ২০০৫]

রচনামূলক প্রশ্ন :

১। প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়া কি উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০০৩]

২। প্রত্যাগামী ও অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা দাও এবং এদের মধ্যে পার্থক্য কর। [ঢা. বো. ২০০১; ব. বো. ২০০১; চ. বো. ২০০০]

৩। দেখাও যে, প্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় যে কোন ব্যবস্থার এনট্রপি স্থির থাকে। [কু. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০৩; সি. বো. ২০০৩]

৪। দেখাও যে, অপ্রত্যাগামী প্রক্রিয়ায় এনট্রপি বৃদ্ধি পায়।

৫। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্র বিবৃত কর এবং এর ভৌতিক অর্থ ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০২ ; রা. বো. ২০০০ ; ব. বো. ২০০১]

৬। উদাহরণসহ অপ্রত্যাবর্তী প্রক্রিয়া ব্যাখ্যা কর। [য. বো. ২০০৩]

৭। তাপগতিবিদ্যার দ্বিতীয় সূত্রটি বর্ণনা কর। [ঢা. বো. ২০০৩]

৮। তাপগতিবিদ্যার প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের মধ্যে পার্থক্য কর।

৯। একটি তাপ ইঞ্জিনের দক্ষতার রাশিমালা বের কর। [ঢা. বো. ২০০৬]

১০। কার্ণোর ইঞ্জিনের গঠন ও কার্যপ্রণালী সংক্ষেপে বর্ণনা কর। [ব. বো. ২০০৫]

১১। কার্ণোর ইঞ্জিনের বিবরণ দাও। ইঞ্জিনের দক্ষতা বলতে কি বুঝ ? এর রাশিমালা প্রতিষ্ঠা কর।

১২। কার্ণোর চক্র কি? কার্ণোর ইঞ্জিনের বিভিন্ন কার্য প্রক্রিয়া সূচক চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর।

১৩। কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতার রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [রা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৩]

১৪। প্রমাণ কর যে, $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, যেখানে সূচকগুলো স্বাভাবিক অর্থ বহন করে। [কু. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৪]

১৫। দেখাও যে, কার্নোর চক্রে কার্যনির্বাহক বস্তু কর্তৃক সম্পাদিত নিট কাজ দুটি সমোষ্ণ ও রুদ্ধতাপীয় রেখা কর্তৃক আবদ্ধ তলের ক্ষেত্রফলের সমান। [ঢা. বো. ২০০৩]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। 167°C ও 277°C তাপমাত্রার মধ্যে কার্যরত কোন প্রত্যাগামী ইঞ্জিনের দক্ষতা নির্ণয় কর। [উঃ 20%]

২। 20% দক্ষতাবিশিষ্ট একটি প্রত্যাগামী ইঞ্জিন 200°C তাপমাত্রায় বাষ্প গ্রহণ করে। কত তাপমাত্রায় ইঞ্জিন বাষ্প পরিত্যাগ করে ? [উঃ 378·4 K বা 105·4°C]

৩। 40% দক্ষতাবিশিষ্ট একটি আদর্শ ইঞ্জিনের নিম্নতাপ আধারের তাপমাত্রা 7°C । ইঞ্জিনের দক্ষতা 50%-এ উন্নীত করতে উচ্চ তাপ আধারের তাপমাত্রা কত বৃদ্ধি করতে হবে ? [উঃ 93·33 K]

৪। একটি কার্নো ইঞ্জিনের তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা 7°C এবং এর দক্ষতা 50%। ইঞ্জিনের দক্ষতা 70% করতে হলে তাপ উৎসের তাপমাত্রা কত বৃদ্ধি করতে হবে ? [উত্তর ঃ 373·33°C]

৫। একটি কার্নো ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা 40% ; এর তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা 7°C। এর উৎসের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০০ ; ব. বো. ২০০২] (উত্তর ঃ 466·7 K]

৬। একটি কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা 60%। যদি তাপ উৎসের তাপমাত্রা 400K হয় তবে তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা কত ? [কু. বো. ২০০০] [উত্তর ঃ 160K]

৭। 27°C এবং 160°C তাপমাত্রাদ্বয়ের মধ্যে কার্যরত একটি কার্নো ইঞ্জিনে $8·4 \times 10^4$ J তাপশক্তি সরবরাহ করা হয়। ইঞ্জিনটির কর্মদক্ষতা নির্ণয় কর। ইঞ্জিনটি কতটুকু তাপশক্তিকে কাজে রূপান্তরিত করতে পারবে ? [উত্তর ঃ 30.7% ; 2588 J]

৮।একটি ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা 60%। এর তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা 27°C হলে উৎসের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [উঃ 750K]

৯। একটি কার্নো ইঞ্জিন 327°C এবং 27°C তাপমাত্রায় কাজ করছে। এর কর্মদক্ষতা কত? [ঢা. বো. ২০০৬] [উঃ 50%]

১০। একটি কার্নো ইঞ্জিনের উৎসের তাপমাত্রা 400K। এই তাপমাত্রায় উৎস থেকে এটি 840J তাপ গ্রহণ করে এবং সিঙ্কে 420J তাপ বর্জন করে। ইঞ্জিনটির কর্মদক্ষতা বের কর। (উঃ 50%]

১১। একটি কার্নো ইঞ্জিনের দক্ষতা 60%। যদি তাপ উৎসের তাপমাত্রা 450K হয়, তবে তাপ গ্রাহকের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [উঃ 180K]

১২। একটি ইঞ্জিনের কর্মদক্ষতা 30%। ইঞ্জিনটি গৃহীত তাপের কত অংশ বর্জন করে? [উঃ 70%]

১৩। একটি ইঞ্জিন 400K ও 350K তাপমাত্রায় এবং অপর একটি ইঞ্জিন 350K ও 300K তাপমাত্রায় কাজ করছে। কোন্ ইঞ্জিনের দক্ষতা বেশি ? [উঃ দ্বিতীয় ইঞ্জিনের দক্ষতা প্রথম ইঞ্জিনের দক্ষতার চেয়ে 1·8% বেশি]

১৪। একটি প্রত্যাগামী ইঞ্জিন উৎস হতে গৃহীত তাপের $\frac{1}{6}$ অংশ কাজে পরিণত করে। এর তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা আরও 62°C হ্রাস করলে এর দক্ষতা দ্বিগুণ হয়। তাপ উৎস ও তাপগ্রাহকের তাপমাত্রা বের কর। [উঃ 372K, 310K]

১৫। একটি ইঞ্জিন 3400J তাপ গ্রহণ করে ও 2400J তাপ বর্জন করে। ইঞ্জিনটি দ্বারা সম্পাদিত কাজের পরিমাণ ও ইঞ্জিনের দক্ষতা নির্ণয় কর। [উঃ 1000 J ; 29·41%]

১৬। একটি কার্নো ইঞ্জিনে 500K তাপমাত্রার তাপ উৎস থেকে 1500 J তাপ গ্রহণ করে এবং তাপগ্রাহকে 750J তাপ বর্জন করে। তাপ গ্রাহকের তাপমাত্রা ও ইঞ্জিনের দক্ষতা নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 250 K ; 50%]

১৭। একটি কার্নো ইঞ্জিন 127°C ও 27°C তাপমাত্রায় কাজ করছে। উচ্চ তাপমাত্রায় এটি 2×10^5 J তাপ শোষণ করে। প্রতি সাইকেলে ইঞ্জিনটি কি পরিমাণ কাজ করছে ? [উত্তর ঃ 5×10^4 J]

১৮। দেখাও যে, m ভর ও c স্থির আপেক্ষিক তাপের কোন পদার্থের তাপমাত্রা T_1 K হতে T_2 K-এ পরিবর্তিত হলে এন্ট্রপির পরিবর্তন $S_2 - S_1 = mc \log_e \frac{T_2}{T_1}$ ।

১৯। 0°C তাপমাত্রার 0·05 kg বরফকে গলিয়ে একই তাপমাত্রায় পানিতে পরিণত করলে এন্ট্রপি কি পরিমাণ বৃদ্ধি পাবে নির্ণয় কর। [উঃ 61·5 JK^{-1}]

২০। 100°C এর 0·5 kg পানি 100°C-এর বাষ্পে পরিণত হল। এন্ট্রপির পরিবর্তন নির্ণয় কর।
[L_v = 2250 kJ kg^{-1}] [উঃ 3·02 kJ K^{-1}]

২১। 0°C এ 0·350 kg বরফ গলে একই তাপমাত্রায় পানি হয়। এই প্রক্রিয়ায় এনট্রপির পরিবর্তন নির্ণয় কর।
[L = 336000 Jkg^{-1}] [উঃ – 427·1 JK^{-1}]

২২। 100°C তাপমাত্রার 2 kg পানিকে 100°C তাপমাত্রার বাষ্পে পরিণত করলে এনট্রপির পরিবর্তন নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ $1·21 \times 10^4$ J K^{-1}]

১৭

তরঙ্গ ও শব্দ
WAVES AND SOUND

১৭.১ সূচনা
Introduction

তরঙ্গ ও তরঙ্গ-গতি পদার্থবিজ্ঞানের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। সব ধরনের তরঙ্গের ক্ষেত্রে দুটি বৈশিষ্ট্য লক্ষ করা যায়। প্রথমত, তরঙ্গ চলনক্ষম আলোড়ন বা আন্দোলন এবং দ্বিতীয়ত তরঙ্গ একস্থান হতে অন্যস্থানে শক্তি সঞ্চালন করে। আমরা যে শব্দ শুনি বা আলো দেখি তা তরঙ্গ আকারে উৎস থেকে আমাদের কাছে পৌঁছায়। কাজেই তরঙ্গ প্রকৃতি এবং তরঙ্গ গতি সম্পর্কে আমাদের স্পষ্ট ধারণা থাকা প্রয়োজন। এই অধ্যায়ে তরঙ্গের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য এবং শব্দতরঙ্গ আলোচনা করব।

১৭.২ তরঙ্গ ও তরঙ্গ গতি
Wave and wave motion

একটি পুকুরের স্থির পানিতে ঢিল ছুড়লে তরঙ্গের সৃষ্টি হয়। ঢিলটি যে বিন্দুতে পানিতে প্রবেশ করে সে বিন্দুকে কেন্দ্র করে পানির উপরিপৃষ্ঠে সারি সারি তরঙ্গ ক্রমবর্ধমান বৃত্তাকারে চারদিকে ছড়িয়ে পড়ে। এর ফলে পানির উপরিতলে একস্থান হতে অন্যস্থানে শক্তির সঞ্চালন ঘটে। পানির উপরে একটি শোলা বা পাটকাঠি থাকলে দেখা যাবে যে শোলা বা কাঠিটি একই স্থানে থেকে উপরে-নিচে উঠানামা করছে। এর অর্থ হল মাধ্যমের কণাগুলো স্থান ত্যাগ করে না, যদি করত তবে শোলা বা কাঠিটি সরে পাড়ে চলে আসত। মাধ্যমের কণাগুলোর মধ্যে সংযুক্তি বলের কারণে এগুলো স্থান ত্যাগ করে না ; তবে আন্দোলনের দ্বারা পার্শ্ববর্তী কণাগুলোতে শক্তি সঞ্চালিত হয় এবং পাশের কণাগুলো আন্দোলিত হয়। এভাবে শক্তি তরঙ্গাকারে একস্থান হতে অন্যস্থানে সঞ্চালিত হয়। সুতরাং, তরঙ্গের নিম্নরূপ সংজ্ঞা দেয়া যায় ঃ

সংজ্ঞা ঃ কোন স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের কণাগুলোর স্থানান্তর ছাড়া যে পর্যাবৃত্ত আন্দোলনের দ্বারা একস্থান হতে অন্যস্থানে শক্তি সঞ্চালিত হয় তাকে তরঙ্গ বলে।

যে সব তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য মাধ্যমের প্রয়োজন হয় সেগুলোকে যান্ত্রিক তরঙ্গ বলে। শব্দতরঙ্গ, টানা তারে সৃষ্ট তরঙ্গ ইত্যাদি যান্ত্রিক তরঙ্গের উদাহরণ।

মাধ্যম ছাড়াও তরঙ্গ সঞ্চালিত হতে পারে। সূর্য থেকে আমরা যে আলো পাই তা কোন মাধ্যম ছাড়াই চলাচল করে। এদেরকে তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গ বলে। তড়িৎ ও চৌম্বক ক্ষেত্রের পর্যাবৃত্ত গতি পরিবর্তনের ফলে তড়িচ্চুম্বকীয় তরঙ্গের উৎপত্তি হয়।

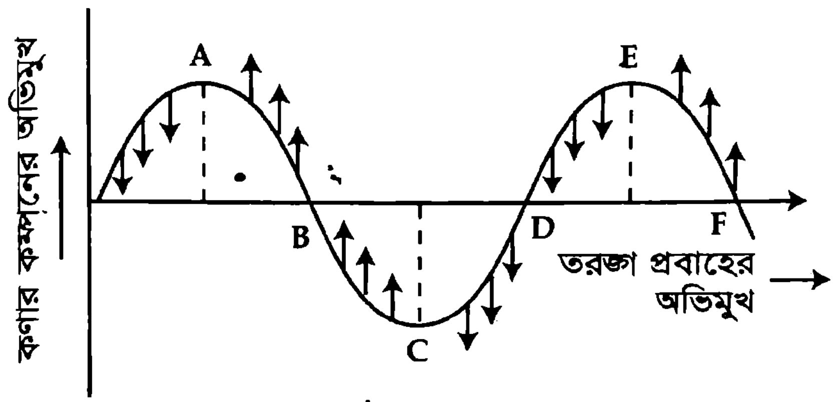
১৭.৩ তরঙ্গের প্রকারভেদ
Types of Waves

মাধ্যমের কণাগুলো সরল দোল গতিতে কম্পিত হলে যে তরঙ্গের সৃষ্টি হয় তাকে **সরল দোল তরঙ্গ** (Simple harmonic wave) বা **সাইন তরঙ্গ** (Sine wave) বলে। সরল দোল তরঙ্গ আবার দুই প্রকারের। যথা—

(১) আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ (Transverse waves) এবং (২) লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ (Longitudinal waves)।

(১) আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ ঃ মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গ গতির অভিমুখের সমকোণে কম্পিত হতে থাকলে সেই তরঙ্গকে আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ বলে।

ব্যাখ্যা ঃ চিত্র ১৭·১-এ একটি অনুপ্রস্থ তরঙ্গ দেখান হয়েছে। তরঙ্গের উপর ছোট ছোট তীর চিহ্ন দ্বারা কণার কম্পনের অভিমুখ দেখান হয়েছে। তরঙ্গের উপরের দিকে A ও E বিন্দুতে কণার সর্বোচ্চ সরণ ঘটেছে। তরঙ্গের এই বিন্দুগুলোকে **তরঙ্গ শীর্ষ** বা **তরঙ্গ চূড়া** (crest) বলে। আবার নিচের দিকে C বিন্দুতে সর্বোচ্চ সরণ ঘটেছে। একে **তরঙ্গ পাদ** বা **তরঙ্গ খাঁজ** (Trough) বলে।



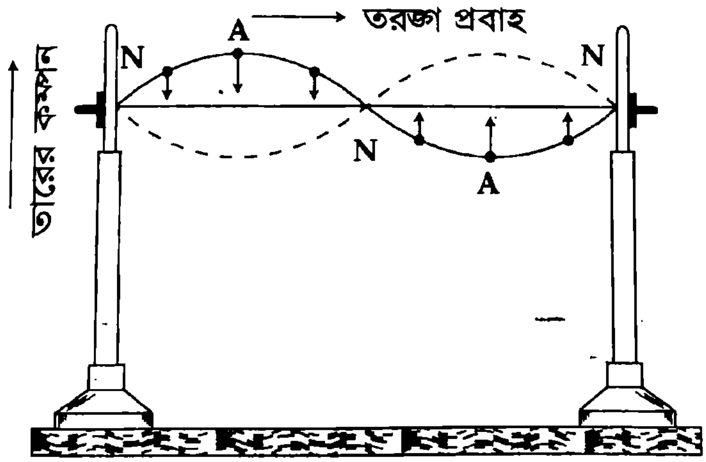
চিত্র ১৭·১

এক্ষেত্রে কণার স্পন্দনের অভিমুখ তরঙ্গ প্রবাহের অভিমুখের সমকোণে ঘটেছে। অতএব এটা **আড় তরঙ্গ**।

উদাহরণ ঃ

(১) পুকুরের পানিতে ঢিল ছুঁড়লে দেখা যায় যে পানির কণাগুলো উপরে-নিচে দুলতে থাকে এবং এই আন্দোলন কিনারার দিকে অগ্রসর হতে থাকে। সৃষ্ট এরূপ আন্দোলনই আড় তরঙ্গ বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ।

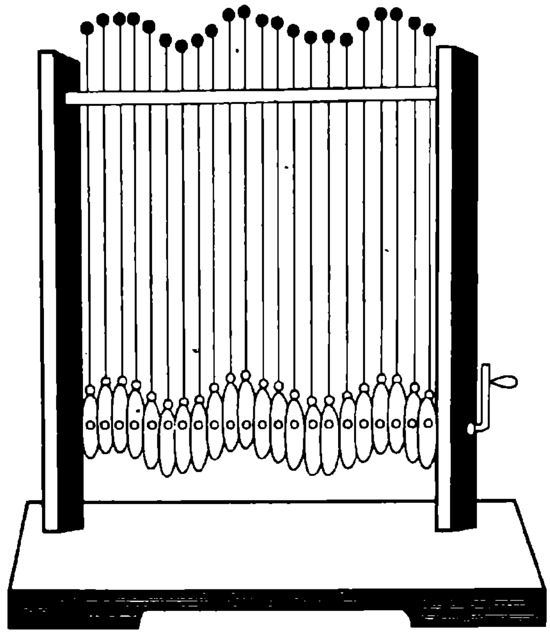
(২) একটি তার টান করে বেঁধে এর দৈর্ঘ্যের সমকোণে টেনে ছেড়ে দিলে তারে একটি তরঙ্গের সৃষ্টি হবে [চিত্র ১৭·২]। লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, তারটি এর দৈর্ঘ্যের সাথে সমকোণে আন্দোলিত হচ্ছে। এই আন্দোলন তারের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রবাহিত হচ্ছে। সুতরাং টানা তারের এরূপ কম্পন হতে স্পষ্ট যে, এই তরঙ্গ আড় তরঙ্গ।



চিত্র ১৭·২

আড় তরঙ্গ প্রদর্শন (Demonstration of Transverse wave) ঃ পরীক্ষায় সমান দৈর্ঘ্যের কতকগুলো দণ্ড নেয়া হয় যাদের প্রত্যেকের এক মাথায় একটি করে বল এবং অপর মাথায় একটি করে চাকা যুক্ত আছে [চিত্র ১৭·৩]। চাকাগুলো একটি হাতলযুক্ত ঘূর্ণনক্ষম দণ্ডের সাথে এমনভাবে লাগানো আছে যে চাকাগুলো কম-বেশি উৎকেন্দ্রিক (eccentric) অবস্থায় থাকে অর্থাৎ দণ্ডগুলো এক এক চাকার এক এক স্থান দিয়ে পরানো থাকে এবং দণ্ডগুলো খাড়াভাবে অবস্থান করে। হাতল ঘুরালে চাকাগুলোও ঘুরতে থাকে এবং দণ্ডগুলো উঠা-নামা করে। চাকাগুলো কম-বেশি উৎকেন্দ্রিক হওয়ায় বিভিন্ন দণ্ডের উপরের প্রান্তের বলগুলো একসঙ্গে উপরে উঠে না বা নিচে

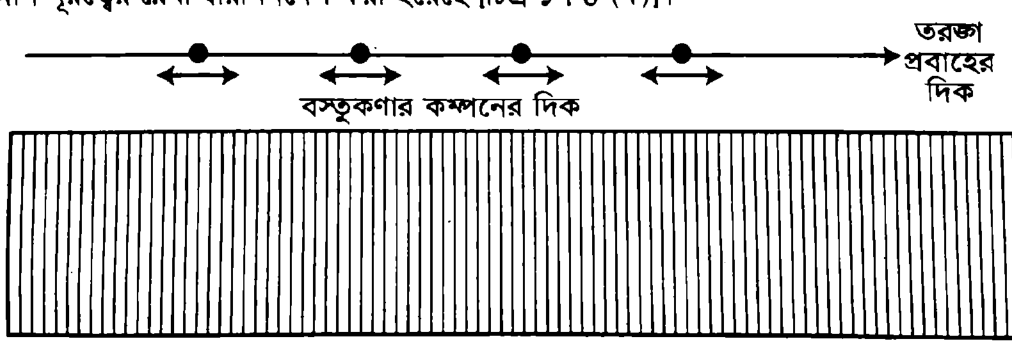
নামে না—পর্যায়ক্রমে উঠা-নামা করে। ভালভাবে লক্ষ করলে দেখা যাবে যে বলগুলো যে দিকে উঠা-নামা করে তার সমকোণে তরঙ্গ প্রবাহিত হচ্ছে। সুতরাং এস্থলে উদ্ভূত তরঙ্গ আড় তরঙ্গ।



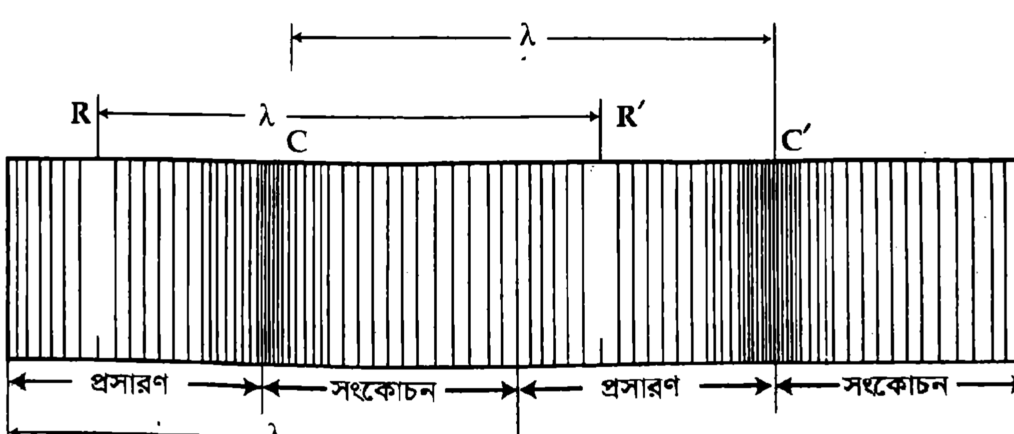
চিত্র ১৭·৩

(২) লম্বিক তরঙ্গ বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ ঃ মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের গতির অভিমুখের সমান্তরালে কম্পিত হতে থাকলে, সেই তরঙ্গকে লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বলে।

ব্যাখ্যা ঃ চিত্র ১৭·৪-এ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ প্রবাহ দেখান হয়েছে। মাধ্যমের বিভিন্ন স্তরের সাম্যাবস্থান কতগুলো সমান দূরত্বের রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে [চিত্র ১৭·৪ (ক)]।



(ক)



(খ)

চিত্র ১৭·৪

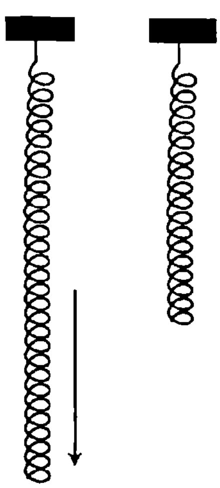
মাধ্যমের ভেতর দিয়ে লম্বিক তরঙ্গ প্রবাহিত হতে থাকলে যে কোন সময়ে স্তরগুলোর অবস্থান কিরূপ হবে তা ১৭·৪(খ) চিত্রে দেখান হয়েছে। অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে মাধ্যমের কণাগুলো সাম্যাবস্থানের উভয় পার্শ্বে তরঙ্গের গতিপথের সমান্তরালে কম্পিত হয়, ফলে তরঙ্গশীর্ষ বা তরঙ্গপাদ সৃষ্টি হয় না। এক্ষেত্রে কম্পনের সময় কিছু কিছু স্থানে কণাগুলো কাছাকাছি চলে আসে আবার কোথাও দূরে সরে যায়। কণাগুলো কাছাকাছি আসায় মাধ্যমের সংকোচন বা ঘনীভবন (compression or condensation) হয় এবং কণাগুলো সরে গেলে মাধ্যমের প্রসারণ (rarefaction) হয়। চিত্রে রেখাগুলোর মধ্যবর্তী দূরত্ব কম দ্বারা সংকোচন এবং রেখাগুলোর দূরত্ব বৃদ্ধি দ্বারা সম্প্রসারণ বুঝান হয়েছে। সংকোচনের স্থানগুলোতে মাধ্যমের ঘনত্ব ও চাপ বেড়ে যায় এবং প্রসারণের স্থানগুলোতে মাধ্যমের ঘনত্ব ও চাপ কমে যায়। এভাবে মাধ্যমের কণাগুলোর সংকোচন ও প্রসারণের মধ্য দিয়ে অনুদৈর্ঘ্য ও লম্বিক তরঙ্গ সঞ্চালিত হয়। **পাশাপাশি একটি সংকোচন ও একটি প্রসারণ নিয়ে একটি তরঙ্গদৈর্ঘ্য গঠিত হয়।**

উদাহরণ ঃ

(১) কথা বলার সময় আমরা জিহ্বার সাহায্যে মুখের মধ্যকার বায়ু কণাতে কম্পন সৃষ্টি করি। বায়ুকণাগুলোর কম্পনের দিক শব্দ তরঙ্গের গতির অভিমুখে সংঘটিত হয়। অতএব শব্দ লম্বিক তরঙ্গ। বক্তা বা গায়কের মুখ হতে শব্দ বায়ু মাধ্যমে সঙ্কোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি করে লম্বিক তরঙ্গের আকারে শ্রোতার কানে পৌছায় [চিত্র ১৭·৪]।

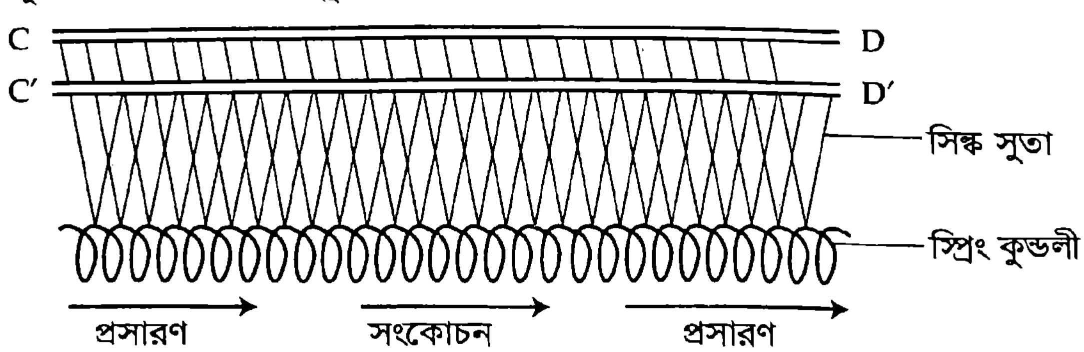
(২) একটি স্প্রিং খাড়াভাবে ঝুলিয়ে দিয়ে এর নিচের প্রান্ত খানিকটা নিচের দিকে টেনে ছেড়ে দিলে দেখা যাবে যে স্প্রিং-এর কুণ্ডলী পর্যায়ক্রমে সংকুচিত ও প্রসারিত হতে থাকে [চিত্র ১৭·৫] এবং এই স্পন্দন তারের দৈর্ঘ্য বরাবর প্রবাহিত হয়।

অর্থাৎ, কুণ্ডলীগুলো সরল দোলন গতিতে তরঙ্গের গতির সমান্তরালে আন্দোলিত হচ্ছে। সুতরাং স্প্রিং-এ সৃষ্ট এই তরঙ্গ লম্বিক তরঙ্গ।



চিত্র ১৭·৫

লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ প্রদর্শন (Demonstration of longitudinal wave) ঃ পরীক্ষায় একটি সরু তারের স্প্রিং নিয়ে এর প্রত্যেক কুণ্ডলীকে দুটি অনুভূমিক দণ্ড CD ও C′D′ হতে V-আকারে সিল্ক সুতা দ্বারা এমনভাবে ঝুলানো হয় যে, তারটি অনুভূমিক থাকে [চিত্র ১৭·৬]।



চিত্র ১৭·৬

এই স্প্রিং-এর এক প্রান্ত ধরে হঠাৎ অনুভূমিকভাবে ধাক্কা দিলে দেখা যাবে যে, তারের কুণ্ডলীগুলো পর্যায়ক্রমে সঙ্কুচিত ও প্রসারিত হচ্ছে এবং এই স্পন্দন ক্রমে ক্রমে তার বরাবর এগিয়ে যাচ্ছে। অর্থাৎ কুণ্ডলীগুলো তরঙ্গ প্রবাহের দিকেই সরল দোল গতিতে আন্দোলিত হচ্ছে। সুতরাং উদ্ভূত তরঙ্গই লম্বিক তরঙ্গ।

Important
Ob. Que.

১৭.৪ আড় তরঙ্গ ও লম্বিক তরঙ্গের মধ্যে পার্থক্য
Distinction between transverse and longitudinal waves

আড় তরঙ্গ ও লম্বিক তরঙ্গের মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য পরিলক্ষিত হয়।

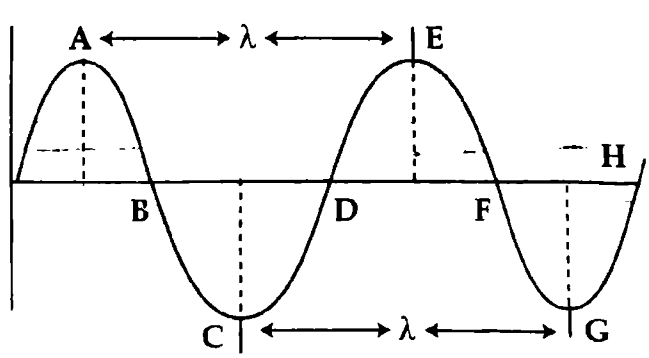
আড় তরঙ্গ	লম্বিক তরঙ্গ
১। যে তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলির কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমকোণী হয়, তাকে আড় তরঙ্গ বলে।	১। যে তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলির কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমান্তরাল হয় তাকে লম্বিক তরঙ্গ বলে।
২। তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমে তরঙ্গ শীর্ষ এবং তরঙ্গ পাদ সৃষ্টি হয়।	২। তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমে সংকোচন ও প্রসারণ সৃষ্টি হয়।
৩। পর পর দুটি তরঙ্গ শীর্ষ বা পর পর দুটি তরঙ্গ পাদের মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বলে।	৩। পর পর দুটি সংকোচন বা পর পর দুটি প্রসারণের মধ্যবর্তী দূরত্বকে বা একটি প্রসারণ ও একটি সংকোচনের মিলিত দৈর্ঘ্যকে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বলে।
৪। মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে।	৪। মাধ্যমে এর সমবর্তন বা পোলারণ ঘটে না।
৫। অনম্যতার বা আকৃতির স্থিতিস্থাপক ধর্মসম্পন্ন মাধ্যমে (কঠিন) এই তরঙ্গ উৎপন্ন হয়। প্রবাহীতে পৃষ্ঠ টানের দরুন আড় তরঙ্গের সৃষ্টি হয়।	৫। আয়তনের স্থিতিস্থাপক ধর্মসম্পন্ন মাধ্যমে (কঠিন, তরল ও গ্যাস) এই তরঙ্গ উৎপন্ন হয়।

১৭.৫ তরঙ্গ সংক্রান্ত কয়েকটি সংজ্ঞা
Some definitions relating waves

তরঙ্গ সংক্রান্ত কয়েকটি রাশির সংজ্ঞা নিম্নে দেয়া হল ঃ

(১) পূর্ণ কম্পন (Complete oscillation) ঃ **কম্পমান বস্তু একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে আবার একই দিক হতে সে বিন্দুতে ফিরে এলে একে পূর্ণ কম্পন বলে।**

(খ) তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (Wave length) ঃ **তরঙ্গ সৃষ্টিকারী কোন কম্পনশীল কণার একটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করতে যে সময় লাগে, ঐ সময়ে তরঙ্গ যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে।** তরঙ্গের উপরিস্থিত পরপর দুটি সমদশাসম্পন্ন কণার ন্যূনতম দূরত্বই হল তরঙ্গ দৈর্ঘ্য। একে λ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



চিত্র ১৭.৭

আড় তরঙ্গে ক্ষেত্রে পরপর দুটি তরঙ্গশীর্ষ বা পরপর দুটি তরঙ্গ পাদ-এর মধ্যবর্তী দূরত্বকে তরঙ্গদৈর্ঘ্য বলে। চিত্র ১৭.৭-এ AE বা BF বা CG আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য এবং চিত্র ১৭.৪-এ RR′ বা CC′ লম্বিক তরঙ্গের ক্ষেত্রে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।

কোন একটি মাধ্যমে বিভিন্ন শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বিভিন্ন। একই শব্দের তরঙ্গ বিভিন্ন মাধ্যমেও বিভিন্ন।

(গ) কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা (Frequency) : কোন একটি কম্পমান বস্তু বা কণা এক সেকেণ্ডে যতগুলো পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে তাকে তার কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা বলে।

কম্পাঙ্ক n বা f দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

কোন বস্তু বা কণা t সময়ে N সংখ্যক কম্পন সম্পন্ন করলে কম্পাঙ্ক, f বা $n = \frac{N}{t}$

কম্পাঙ্কের এককক হার্টজ (Hertz সংক্ষেপে Hz) বলে। অনেক সময় সাইকেল/সেকেণ্ড (cs^{-1}) এককও ব্যবহার করা হয়।

(ঘ) দোলনকাল বা পর্যায়কাল (Time period) : কোন একটি কম্পমান বস্তু একটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করতে যে সময় নেয়, তাকে এর দোলনকাল বা পর্যায়কাল বলে। একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি t সেকেণ্ডে একটি উৎস Nটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন করে।

$\therefore$ দোলন কাল, $T = \frac{t}{N}$ এবং কম্পাঙ্ক, $n = \frac{N}{t}$

চিত্র ১৭.৭-এ তরঙ্গের B হতে F বা D হতে H-এ যেতে ব্যয়িত সময়ই পর্যায়কাল বা দোলনকাল।

বিভিন্ন তরঙ্গের পর্যায়কাল বা কম্পাঙ্ক একই মাধ্যমে বিভিন্ন। কিন্তু একই তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বা পর্যায়কাল বিভিন্ন মাধ্যমে সমান।

(ঙ) বিস্তার (Amplitude) : কোন একটি কম্পমান বস্তু তার সাম্যাবস্থান হতে ডানে বা বামে অথবা উপরে বা নিচে যে সর্বাধিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে এর বিস্তার বলে। বিস্তার দুই প্রকার, যথা— (ক) রৈখিক বিস্তার; একে সাধারণত 'a' দ্বারা সূচিত করা হয় এবং (খ) কৌণিক বিস্তার; একে সাধারণত 'θ' দ্বারা সূচিত করা হয়। চিত্র ১৭.৭-এ BF হতে E বা C বা A-এর লম্ব দূরত্বই রৈখিক বিস্তার 'a'।

কোন শব্দের প্রাবল্য I বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। অর্থাৎ $\boxed{I \propto a^2}$

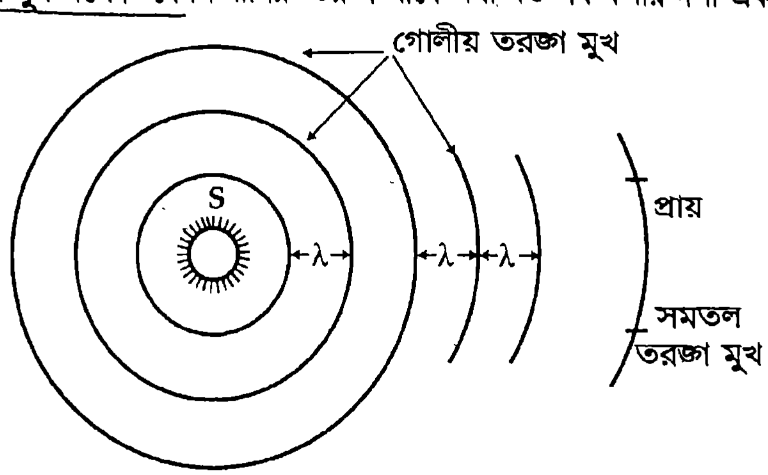
(চ) দশা (Phase) : দশা কোন একটি কম্পমান বস্তুর কোন মুহূর্তের দোলনের অবস্থা প্রকাশ করে। আরও বিস্তারিতভাবে বলা যায়—তরঙ্গাস্থিত কোন একটি কণার কোন মুহূর্তের অবস্থান এবং তার গতির **অবস্থা ও দিক যার দ্বারা নির্দেশ করা হয় তাকে দশা বলে।**

(ছ) আদি দশা (Epoch) : কোন একটি কম্পমান বস্তু যে দশা নিয়ে কম্পন শুরু করে, তাকে আদি দশা বলে।

(জ) তরঙ্গ বেগ (Wave velocity) : কোন একটি তরঙ্গ কোন মাধ্যমে এক সেকেণ্ডে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে সেই মাধ্যমে এর তরঙ্গ বেগ বলে। একে v দ্বারা সূচিত করা হয়।

মাধ্যম ভেদে একই শব্দের বেগ বিভিন্ন। কিন্তু বিভিন্ন শব্দের বেগ একই মাধ্যমে সমান।

(ঝ) তরঙ্গ মুখ (Wave front) : কোন তরঙ্গের উপরিস্থিত সমদশাসম্পন্ন সব বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত তলকে তরঙ্গ মুখ বলে। যেমন পানির তরঙ্গ শীর্ষে অবস্থিত সব কণার দশা একই। তেমনি এর তরঙ্গ



চিত্র ১৭.৮

পাদে অবস্থিত সব কণার দশাও একই। কাজেই তরঙ্গ শীর্ষ বরাবর অঙ্কিত তল হবে একটি তরঙ্গ মুখ এবং তরঙ্গ পাদ বরাবর অঙ্কিত তল হবে আর একটি তরঙ্গ মুখ। পরপর দুটি তরঙ্গ শীর্ষ বা তরঙ্গপাদ বরাবর অঙ্কিত তলের তরঙ্গ মুখের মধ্যবর্তী দূরত্ব এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্য [চিত্র ১৭.৮]।

(ঞ) **তরঙ্গ শীর্ষ (Crest) ঃ আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ধনদিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ শীর্ষ বলে** [চিত্র ১৭.৭-এ A ও E বিন্দু]।

(ট) **তরঙ্গ পাদ (Trough) ঃ আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ঋণদিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ পাদ বলে** [চিত্র ১৭.৭-এ C বিন্দু]

(ঠ) **তরঙ্গের তীব্রতা (Intensity of wave) ঃ কোন তরঙ্গের সমকোণে একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে এক সেকেন্ডে যে পরিমাণ শক্তি প্রবাহিত হয় তাকে ঐ তরঙ্গের তীব্রতা বলে। একে মাধ্যমের শক্তি প্রবাহও (energy current or energy flux) বলা হয়। একে I দ্বারা সূচিত করা হয়।**

তরঙ্গের তীব্রতা, I = শক্তি ঘনত্ব × তরঙ্গ বেগ

গাণিতিকভাবে দেখান যায় যে,

$$I = 2\rho\pi^2 a^2 n^2 v$$

এখানে,

ρ মাধ্যমের ঘনত্ব

n তরঙ্গের কম্পাঙ্ক

a তরঙ্গের বিস্তার এবং

v তরঙ্গের বেগ।

উপরের সমীকরণ হতে দেখা যায় যে,

$I \propto a^2$

$= Ka^2$, এখানে K ধ্রুবক।

অর্থাৎ তীব্রতা (I) বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

এস. আই. পদ্ধতিতে তীব্রতার একক $\boxed{Jm^{-2}s^{-1}}$ বা Wm^{-2}।

তরঙ্গ তীব্রতা, I এর একক $Jm^{-2}s^{-1}$ / Wm^{-2}

১৭.৬ তরঙ্গ বেগ, তরঙ্গ দৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between wave length, frequency and wave velocity or speed

মনে করি, কোন মাধ্যমে কোন একটি তরঙ্গের বেগ = v, তরঙ্গ উৎসের কম্পাংক = n এবং তরঙ্গ দৈর্ঘ্য = λ। তাদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে। যেহেতু v তরঙ্গ বেগ, অতএব আমরা পাই,

v = তরঙ্গ কর্তৃক এক সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব (1)

পুনঃ, তরঙ্গ দৈর্ঘ্য = λ, সুতরাং শব্দ উৎসের একটি পূর্ণ কম্পনে তরঙ্গ কর্তৃক অতিক্রান্ত দূরত্ব = λ। কম্পাঙ্ক n হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে nটি পূর্ণ কম্পন সম্পন্ন হয়। অতএব nটি পূর্ণ কম্পনের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব = $n\lambda$

$n\lambda$ = তরঙ্গ কর্তৃক এক সেকেন্ডের অতিক্রান্ত দূরত্ব (2)

সমীকরণ (1) এবং (2) হতে পাই,

$$v = n\lambda \qquad (3)$$

অর্থাৎ তরঙ্গ বেগ = কম্পাঙ্ক × তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।

এটিই হল তরঙ্গ বেগ, কম্পাঙ্ক এবং তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের মধ্যে সম্পর্ক।

১৭.৭ দোলনকাল এবং কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক
Relation between time period and frequency

মনে করি কোন একটি কম্পমান বস্তুর দোলনকাল T এবং কম্পাঙ্ক n। এদের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে হবে।

দোলনকাল T-এর অর্থ কম্পমান বস্তুর একটি পূর্ণ কম্পনে অতিবাহিত সময়। অতএব nটি পূর্ণ কম্পনে অতিবাহিত সময় = nT

nT = nটি পূর্ণ কম্পনে ব্যয়িত সময় (4)

আবার কম্পাঙ্ক শব্দের অর্থ—এক সেকেন্ডের পূর্ণ কম্পন সংখ্যা।

কাজেই nটি পূর্ণ কম্পন দিতে সময় লাগবে 1 সেকেন্ড।

1 সে. = nটি পূর্ণ কম্পনে ব্যয়িত সময় (5)

সমীকরণ (4) এবং (5) হতে পাই

$$\left.\begin{aligned} nT &= 1 \\ \text{বা,}\quad T &= \frac{1}{n} \\ \text{বা,}\quad \boxed{n = \frac{1}{T}} & \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

এটিই হল দোলনকাল ও কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক।

১৭.৮ অগ্রগামী তরঙ্গ এবং স্থির তরঙ্গ
Progressive waves and stationary waves

যে তরঙ্গ উৎস হতে উৎপন্ন হয়ে সময়ের সাথে সাথে অগ্রসরমান বা চলমান হয় তাকে অগ্রগামী তরঙ্গ বলে। অগ্রগামী তরঙ্গ আড় বা অনুদৈর্ঘ্য এবং লম্বিক বা অনুপ্রস্থ উভয় ধরনের হতে পারে।

আবার দুটি বিপরীতমুখী তরঙ্গের উপরিপাতের ফলে উৎপন্ন তরঙ্গ মাধ্যমের একটি সীমিত অংশে আবদ্ধ থাকে। এই তরঙ্গকে স্থির তরঙ্গ বলে।

অগ্রগামী তরঙ্গের সংজ্ঞা ঃ কোন তরঙ্গ যদি কোন বিস্তৃত মাধ্যমের এক স্তর হতে অন্য স্তরে সঞ্চালিত হয়ে ক্রমাগত সম্মুখের দিকে অগ্রসর হতে থাকে, তবে তাকে অগ্রগামী বা চলমান তরঙ্গ বলে।

উদাহরণ ঃ (ক) পুকুরের পানিতে ঢিল ছুঁড়লে আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। এই ঢেউ বা তরঙ্গ পানির মধ্য দিয়ে কিনারার দিকে ক্রমাগত অগ্রসর হতে থাকে। সুতরাং **পানির ঢেউ অগ্রগামী আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ।**

(খ) বক্তা কথা বললে শব্দ উৎপন্ন হয়। শব্দ লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ। এই শব্দ বক্তার মুখ হতে বাতাসের মধ্য দিয়ে ক্রমাগত সম্মুখের দিকে অগ্রসর হয়ে শ্রোতার কানে পৌঁছায়। অতএব **শব্দ অগ্রগামী লম্বিক তরঙ্গ।**

অগ্রগামী তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য ঃ অগ্রগামী তরঙ্গের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়, যথা—

(ক) কোন মাধ্যমের একই প্রকার কম্পনে এই তরঙ্গের উৎপত্তি হয়।

(খ) এটি একটি সুষম মাধ্যমের মধ্য দিয়ে একটি নির্দিষ্ট দ্রুতি বা বেগে প্রবাহিত হয়।

(গ) অগ্রগামী তরঙ্গের বেগ মাধ্যমের ঘনত্ব ও স্থিতিস্থাপকতার উপর নির্ভর করে।

(ঘ) মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পন তরঙ্গ প্রবাহের সাপেক্ষে আড় ও লম্বিক হতে পারে।

(ঙ) মাধ্যমের কণাগুলো কখনও স্থির থাকে না।

(চ) তরঙ্গ মুখের অভিলম্ব বরাবর শক্তি বহন করে এ তরঙ্গ প্রবাহিত হয়।

(ছ) তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমের বিভিন্ন অংশের চাপ ও ঘনত্বের একই প্রকার পরিবর্তন ঘটে।

(জ) মাধ্যমের প্রতিটি কণার কম্পাঙ্ক ও বিস্তার একই হয় এবং তারা একই ধরনের কম্পনে কম্পিত হয়।

(ঝ) তরঙ্গ প্রবাহের দরুন মাধ্যমের কণার দশা পরবর্তী কণাতে স্থানান্তরিত হয়। এরূপ দুটি কণার দশা বৈষম্য তাদের দূরত্বের সমানুপাতিক।

(ঞ) মাধ্যমের যে কোন কণার বিভিন্ন ধর্ম—যেমন বেগ, ত্বরণ, শক্তি প্রভৃতি একইরূপ পরিবর্তনের মধ্য দিয়ে যায়।

১৭.৯ অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ
Equation of progressive wave

কোন মাধমের কণাগুলো সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত বা আন্দোলিত হলে অগ্রগামী তরঙ্গের সৃষ্টি হয় এবং মাধ্যমের এক কণা হতে পরবর্তী কণায় আন্দোলন স্থানান্তরিত হয়। সুতরাং স্বাভাবিকভাবেই এক কণা হতে পরবর্তী কণায় আন্দোলন পৌঁছতে একটি নির্দিষ্ট সময় লাগে। ফলে তরঙ্গের অভিমুখ বরাবর কণাগুলোর দশার পরিবর্তন ঘটে। এখন তরঙ্গ যদি বামদিক থেকে ডানদিকে অগ্রসর হতে থাকে তবে বামদিকের কণা আন্দোলিত হওয়ার একটি নির্দিষ্ট সময় পরে ডানদিকের কণা আন্দোলিত হবে; ফলে এদের মধ্যে দশার পার্থক্য সৃষ্টি হবে। এভাবে ডানদিকের পরের কণাগুলো পরে আন্দোলিত হবে। সুতরাং প্রথম কণার সঙ্গে দূরবর্তী কণার দশা পার্থক্য বৃদ্ধি পেতে থাকবে। তবে **প্রতি দুটি পার্শ্ববর্তী কণার দশা পার্থক্য একই হবে**। এখন এই অগ্রগামী তরঙ্গের গাণিতিক সমীকরণ বের করব।

মনে করি একটি অগ্রগামী তরঙ্গ X-অক্ষের ধনাত্মক দিকে অগ্রসর হচ্ছে [চিত্র ১৭.৯]। ধরি t সময়ে মাধ্যমের কোন একটি কণা O-এর সরণ $= y$ (লম্বিক তরঙ্গের ক্ষেত্রে কণার সরণ X-অক্ষ বরাবর এবং আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে কণার সরণ Y-অক্ষ বরাবর ঘটে)। যেহেতু মাধ্যমের কণাগুলো সরল ছন্দিত স্পন্দনে আন্দোলিত হচ্ছে, কাজেই O-কণাটির গতির সমীকরণ হবে,

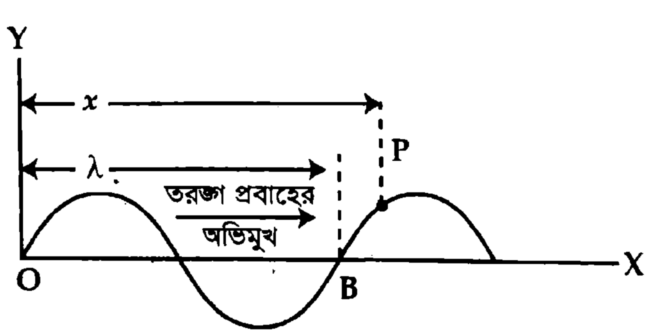
$$y = A \sin \omega t \quad \ldots \quad (7)$$

এখানে, A = কণার বিস্তার

ω = কণার কৌণিক কম্পাঙ্ক $= 2\pi n = \dfrac{2\pi}{T}$

এবং ωt = কণার দশা কোণ, সংক্ষেপে দশা।

এখন, যদিও মাধ্যমের প্রতিটি কণার গতি অভিন্ন, কিন্তু কণাগুলোর দশা এক নয়।



চিত্র ১৭.৯

ধরা যাক, O বিন্দুস্থ কণার এ গতি ডানদিকের কণাগুলোতে একের পর এক সঞ্চালিত হচ্ছে। এর অর্থ হল O-এর পরবর্তী কণা কিছু সময় পরে O কণার দশাপ্রাপ্ত হবে। তারপরের কণা আরও একটু পরে O-কণার দশাপ্রাপ্ত হবে। ফলে O বিন্দু থেকে ডানদিকের কণাগুলোর দূরত্ব বাড়ার সঙ্গে দশা পার্থক্যও বাড়বে। এক্ষেত্রে তরঙ্গের গতিপথের উপর অবস্থিত প্রতিটি কণার দশা এর পূর্ববর্তী বাম দিকের কণার দশার পশ্চাদগামী (Lagging) হবে।

আমরা জানি একটি পূর্ণ কম্পনে তরঙ্গ যে পরিমাণ দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (λ) বলে এবং এই সময় দশা পার্থক্য হয় 2π। এখন O বিন্দু হতে x দূরত্বে অবস্থিত P বিন্দুর কণা বিবেচনা করি। ধরি O বিন্দুর কণার

সাথে এর দশা পার্থক্য δ। সেহেতু λ দূরত্ব অতিক্রমকালে দশা পরিবর্তন বা দশা পার্থক্য হয় 2π; সুতরাং x দূরত্বের জন্য দশা পার্থক্য হবে, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}x$।

অর্থাৎ, দশা পার্থক্য $= \frac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য

[λ দূরত্বের জন্য দশা পার্থক্য 2π
1 দূরত্বের জন্য দশা পার্থক্য $\frac{2\pi}{\lambda}$
x দূরত্বের জন্য দশা পার্থক্য $\frac{2\pi}{\lambda}x$]

P বিন্দুর কণার গতির সমীকরণ হবে

$$y = A\sin(\omega t - \delta) \quad (8)$$

$$= A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$= A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad \left[\because \omega = \frac{2\pi}{T}\right]$$

$$= A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= A\sin 2\pi\left(nt - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \left[\frac{1}{T} = n\right]$$

$$= A\sin 2\pi\left(\frac{vt}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right) \qquad \left[v = n\lambda,\ n = \frac{v}{\lambda}\right]$$

$$\boxed{= A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)} \quad (9)$$

যদি তরঙ্গ X-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অগ্রসর হয়, তবে গতির সমীকরণ হবে,

$$\boxed{y = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)} \quad (10)$$

অতএব **সমীকরণ (9) ও (10)-ই হল অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ বা রাশিমালা।** উপরোক্ত সমীকরণ দুটি তরঙ্গের উপরিপাতন এবং আবদ্ধ নলে শব্দ তরঙ্গের প্রতিফলনের ক্ষেত্রে অতি প্রয়োজনীয়।

দ্রষ্টব্য ঃ আমরা জানি, সরল দোলগতির ক্ষেত্রে সরণ সাইন অপেক্ষক (sine function) না হয়ে কোসাইন অপেক্ষক (consine function) হতে পারে। সেক্ষেত্রে, উপরের সমীকরণগুলোতে সাইন-এর স্থলে কোসাইন বসালেই অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

১৭·১০ তরঙ্গ উপরিপাতনের নীতি
Principle of superposition of waves

দুই বা ততোধিক তরঙ্গ যদি একই মাধ্যমের মধ্য দিয়ে অগ্রসর হয়, তবে তরঙ্গগুলো পরস্পর নিরপেক্ষভাবে সঞ্চালিত হয়। মাধ্যমের যে অংশে তরঙ্গগুলো পরস্পরের উপর আপতিত হয়, সে অঞ্চলে কোন কণার লব্ধি সরণ কি হবে তা নির্ণয়ের নিমিত্তে একটি নীতি প্রবর্তিত হয়। এর নাম তরঙ্গের উপরিপাতন নীতি বা সূত্র। সূত্রটি হচ্ছে ঃ

"দুটি শব্দ তরঙ্গ একই সঙ্গে কোন মাধ্যমের একটি কণাকে অতিক্রম করলে ঐ কণা তরঙ্গ দুটির সম্মিলিত প্রভাবে আলোড়িত হবে। কোন মুহূর্তে কণাটির লব্ধি সরণ প্রত্যেকটি তরঙ্গ পৃথকভাবে ঐ বিন্দুতে যে সরণ সৃষ্টি করে তাদের ভেক্টর যোগফলের সমান হবে।"

মনে করি একটি তরঙ্গ মাধ্যমের কোন কণার y_1 সরণ এবং আর একটি তরঙ্গ মাধ্যমের উক্ত কণার y_2 সরণ ঘটছে।

উপরিপাতন সূত্র অনুসারে কণাটির লব্ধি সরণ

$$y = y_1 + y_2$$

এখানে, y_1 ও y_2 উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক কিংবা একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হতে পারে।

উপরিপাতন সূত্রের সাহায্যে আমরা স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি, শব্দের ব্যতিচার ও বীট ব্যাখ্যা করতে পারি।

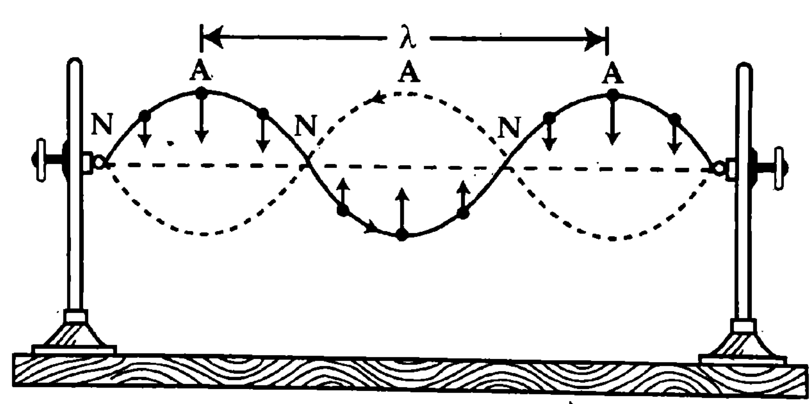
উদাহরণ ঃ পুকুরে কাছাকাছি অবস্থানে দুটি ঢিল ছুড়লে যে দুটি বৃত্তাকার তরঙ্গের উৎপত্তি হয়, তাদের মধ্যে উপরিপাতন লক্ষ করা যায়। পানিতে যে বিন্দুতে দুটি তরঙ্গের চূড়া একই দিক থেকে মিলিত হয় সেখানে তরঙ্গচূড়ার উচ্চতা সর্বোচ্চ হয়। পক্ষান্তরে, যে বিন্দুতে দুটি তরঙ্গপাদ একই দিক থেকে মিলিত হয় সেখানে তরঙ্গপাদে গভীরতা সর্বাধিক হয়। আবার সে বিন্দুতে একটি তরঙ্গশীর্ষ ও একটি তরঙ্গপাদ মিলিত হয় সেখানে পানিতে আন্দোলন স্তিমিত হয়ে যায়।

১৭.১১ স্থির তরঙ্গ
Stationary Waves

সংজ্ঞা ঃ কোন মাধ্যমের একটি সীমিত অংশে পরস্পর বিপরীতমুখী সমান বিস্তার ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের দুটি অগ্রগামী তরঙ্গ একে অপরের উপর আপতিত হলে যে নতুন তরঙ্গ সৃষ্টি হয় তাকে স্থির তরঙ্গ বলে।

এই তরঙ্গ মাধ্যমের ঐ অংশে সীমাবন্ধ থাকে, মাধ্যমের ভেতর দিয়ে অগ্রসর হয় না। সাধারণভাবে বলা যায় যে, এ স্থলে সীমাবন্ধ থেকে পর্যায়ক্রমে গতিশক্তি (স্থিতিস্থাপক) স্থিতি বা বিভব শক্তিতে পরিবর্তিত হয়।

উদাহরণ ঃ একটি টানা তারের কোথাও আঘাত করলে একটি তরঙ্গ সৃষ্টি হয় [চিত্র ১৭.১০]] এবং এই তরঙ্গ তার বেয়ে দুই প্রান্তের দিকে অগ্রসর হয় এবং পরিশেষে দুই প্রান্ত হতে প্রতিফলিত হয়ে ফিরে আসে। এই প্রতিফলিত তরঙ্গ ও মূল তরঙ্গের প্রকৃতি অভিন্ন থাকলেও তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য 180° হয়। ফলে তারে প্রতিফলিত তরঙ্গ ও এর বিপরীত দিকে গতিশীল (নতুন) মূল তরঙ্গ মিলে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি হয়। এই তরঙ্গ তারের বাইরে যায় না—তারের মধ্যেই পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয়। তারটি ভালভাবে লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, তারের সকল বিন্দুর বিস্তার সমান নয়। **স্থির তরঙ্গের ক্ষেত্রে কোন কোন বিন্দুতে বস্তুকণার বিস্তার শূন্য এবং কোন কোন বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক। যে বিন্দুগুলোতে বিস্তার সর্বাধিক (চিত্রে A চিহ্নিত বিন্দুগুলো) তাদেরকে সুস্পন্দ বিন্দু (Antinode) এবং যে সকল বিন্দুতে বিস্তার শূন্য (চিত্রে N চিহ্নিত বিন্দুগুলো) তাদেরকে নিস্পন্দ বিন্দু (Node) বলে।**



চিত্র ১৭.১০

স্থির তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য ঃ স্থির তরঙ্গের কতকগুলো ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য রয়েছে। বৈশিষ্ট্যগুলো নিম্নে উল্লেখ করা হল ঃ

(ক) এই তরঙ্গ কোন একটি মাধ্যমের সীমিত অংশে উৎপন্ন হয়।

(খ) অগ্রগামী তরঙ্গের ন্যায় অগ্রসর না হয়ে একই স্থানে সীমাবন্ধ থাকে।

(গ) তরঙ্গের বিভিন্ন বিন্দুতে কম্পনের বিস্তার সমান নয়।

(ঘ) তরঙ্গের যে বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক তাকে 'সুস্পন্দ' বিন্দু বলে এবং তরঙ্গের যে বিন্দুতে বিস্তার শূন্য তাকে 'নিস্পন্দ' বিন্দু বলে।

(ঙ) তরঙ্গের সুস্পন্দ বিন্দুর বিস্তার তরঙ্গ সৃষ্টিকারী মূল তরঙ্গের বিস্তারের দ্বিগুণ-এর সমান।

(চ) দুটি পর পর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী কণার সরণ একই দিকে হয় এবং তাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব $\lambda/2$। পর পর নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী অংশকে লুপ (Loop) বলে।

(ছ) পর পর দুটি লুপের সরণ পরস্পর বিপরীত দিকে হয়।

(জ) নিস্পন্দ বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন সর্বাধিক, কিন্তু সুস্পন্দ বিন্দুতে চাপ ও ঘনত্বের পরিবর্তন শূন্য।

(ঝ) পর পর তিনটি সুস্পন্দ বিন্দু বা পর পর তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু বা দুটি লুপের মধ্যবর্তী দূরত্বই স্থির তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।

(ট) স্থির তরঙ্গের স্থির বিন্দুস্থ কণাগুলো ছাড়া সকল কণার গতি সরল ছন্দিত গতি।

(ঠ) কোন মাধ্যমে স্থির তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (λ) বা কম্পাঙ্ক (n) তরঙ্গ সৃষ্টিকারী যে কোন একটি মূল তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (λ) বা কম্পাঙ্ক (n)-এর সমান।

১৭·১২ স্থির তরঙ্গের সমীকরণ

ধরা যাক, ধনাত্মক X-অক্ষের অভিমুখে একটি অগ্রগামী তরঙ্গ চলছে। এই তরঙ্গের সমীকরণ হচ্ছে—

$$y_1 = A_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

এবং ঋণাত্মক X-অক্ষ অভিমুখে অগ্রগামী তরঙ্গের সরণ সমীকরণ,

$$y_2 = A_0 \sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

এখানে A_0 = তরঙ্গের বিস্তার, $T = 2\pi/\omega$ = পর্যায়কাল এবং v = বেগ। এ স্থলে, y_1 ও y_2 হচ্ছে উৎস হতে x দূরত্বে অবস্থিত একটি কণার t সময়ে দুটি পৃথক তরঙ্গের জন্য দুটি সরণ। ধরা যাক, তরঙ্গ দুটি একটি অপরটির উপর আপতিত হল। এখন এই দুটি তরঙ্গের লব্ধি সরণ—

$$\begin{aligned}
y &= y_1 + y_2 = A_0\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right) + A_0\sin\omega\left(t+\frac{x}{v}\right)\\
&= A_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) + A_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt+x)\\
&= 2A_0\sin\frac{2\pi}{\lambda}vt, \cos\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x \quad = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}vt\\
\text{বা, } y &= y_1+y_2 = A\sin 2\pi nt \quad = A\sin\omega t \qquad (11)\\
\text{এখানে, } A &= 2A_0\cos\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x \quad = \text{স্থির তরঙ্গের উপর } x \text{ দূরত্বে অবস্থিত কণার বিস্তার।}
\end{aligned}$$

সমীকরণ (11) হতে দেখা যায় যে সমাপতিত তরঙ্গ দুটি একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন তরঙ্গ উৎপন্ন করে। এই সরল ছন্দিত গতিটি অগ্রগামী তরঙ্গ নয় ; কারণ এতে অগ্রগামী তরঙ্গের ন্যায় দশার কোন পার্থক্য নেই। অর্থাৎ অগ্রগামী তরঙ্গের ন্যায় দশা কোণের ভিতর $(vt - x)$ জাতীয় কোন রাশি অন্তর্ভুক্ত নেই। সুতরাং, সমীকরণ (11) দুটি তরঙ্গের উপরিপাতের ফলে সৃষ্ট স্থির তরঙ্গ প্রকাশ করে।

সমীকরণ (11) হল স্থির তরঙ্গের গাণিতিক রাশিমালা বা সমীকরণ।

নিস্পন্দ বিন্দু (Nodes) : সমীকরণ (11)-এ বিস্তার, $A = 2A_0\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$। এটা কণার অবস্থান x-এর উপর নির্ভরশীল। কাজেই বিভিন্ন কণার বিভিন্ন অবস্থানের জন্য A ভিন্ন ভিন্ন হবে। যে সব বিন্দুতে A = 0 অর্থাৎ বিস্তার শূন্য হবে, সে সব বিন্দুতে নিস্পন্দ বিন্দুর সৃষ্টি হবে।

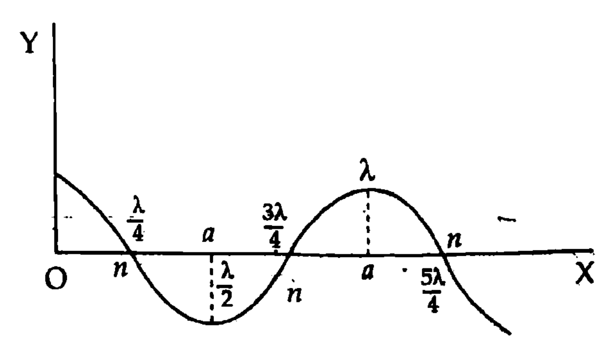
এখন $A = 2A_0\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$ হওয়ার শর্ত হলঃ

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \qquad [\; A_0 \neq 0]$$

বা $\frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ ইত্যাদি।

বা, $x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}$ ইত্যাদি।

এই সকল বিন্দুই নিস্পন্দ বিন্দু।



চিত্র ১৭·১১

পরপর সংলগ্ন দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left(\frac{3\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}\right) = \frac{\lambda}{2}$ [চিত্র ১৭.১০]।

সুস্পন্দ বিন্দু (Antinodes) : যে সকল বিন্দুতে লব্ধি বিস্তার, A সর্বাধিক ; অর্থাৎ $A = \pm 2A_0$ সে সকল বিন্দুতে সুস্পন্দ বিন্দুর উদ্ভব হবে। সুতরাং, সুস্পন্দ বিন্দু তৈরির শর্ত হল :

$$A = 2A_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 2A_0$$

বা, $\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$

বা, $\frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi$ ইত্যাদি।

বা, $x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \quad \frac{n\lambda}{2}$ হবে $(n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots)$

∴ পরপর সংলগ্ন দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \left(\frac{2\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}$ [চিত্র ১৭.১০] এবং একটি সুস্পন্দ ও একটি সন্নিহিত নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বা ব্যবধান $\frac{\lambda}{4}$। চিত্র ১৭.১১-এ a এবং n দ্বারা যথাক্রমে সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দুর অবস্থান দেখান হয়েছে। পাশাপাশি দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে একটি সুস্পন্দ বিন্দু থাকে।

অগ্রগামী তরঙ্গ ও স্থির তরঙ্গের পার্থক্য

অগ্রগামী তরঙ্গ	স্থির তরঙ্গ
১। মাধ্যমের সকল কণাই পর্যাবৃত্ত গতি লাভ করে।	১। মাধ্যমের নিস্পন্দ বিন্দুর কণাগুলি ছাড়া অন্যান্য সব কণাই পর্যাবৃত্ত গতি লাভ করে।
২। মাধ্যমের কণাগুলো কখনও স্থির অবস্থা প্রাপ্ত হয় না।	২। প্রতিটি পূর্ণ কম্পনে কণাগুলো দুই বার স্থির অবস্থাপ্রাপ্ত হয়।
৩। মাধ্যমের প্রতিটি কণার বিস্তার সমান; কিন্তু তাদের ভেতর দশার পার্থক্য থাকে।	৩। মাধ্যমের প্রতিটি কণার দশা সমান ; কিন্তু বিস্তার বিভিন্ন। সুস্পন্দ বিন্দুতে বিস্তার সর্বাধিক এবং নিস্পন্দ বিন্দুতে বিস্তার সর্বাপেক্ষা কম।
৪। মাধ্যমের ভেতর দিয়ে নির্দিষ্ট বেগে অগ্রসর হয়।	৪। মাধ্যমের মধ্যে স্থিরভাবে অবস্থান করে এবং সীমাবদ্ধ স্থানে পর্যায়ক্রমে উৎপন্ন ও বিলুপ্ত হয়।
৫। মাধ্যমের প্রতিটি কণাকে সরণ, ঘনত্ব, চাপের পরিবর্তন, শক্তি ও বেগের একই রকম পরিবর্তন চক্রের মধ্য দিয়ে যেতে হয়।	৫। মাধ্যমের প্রতিটি কণাকে একই রকম পরিবর্তন চক্রের ভেতর দিয়ে যেতে হয়।
৬। অগ্রগামী অনুপ্রস্থ তরঙ্গের ক্ষেত্রে পরপর দুটি তরঙ্গশীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব এবং অগ্রগামী অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে একটি সংকোচন ও একটি প্রসারণের মোট দৈর্ঘ্যকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বলে।	৬। পরপর তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু অথবা তিনটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বই স্থির তরঙ্গের এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।
৭। অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হচ্ছে $y = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$	৭। স্থির তরঙ্গের সমীকরণ হচ্ছে $y = 2A_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t$

১৭.১৩ শব্দ
Sound

শব্দ এক প্রকার শক্তি। কোন কম্পমান বস্তুর দ্বারা সৃষ্ট অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গই হল শব্দ। যেমন গীটারের তার, মানুষের বাকযন্ত্র, মাইক্রোফোনের পর্দা ইত্যাদি হতে উৎপন্ন তরঙ্গ শব্দ।

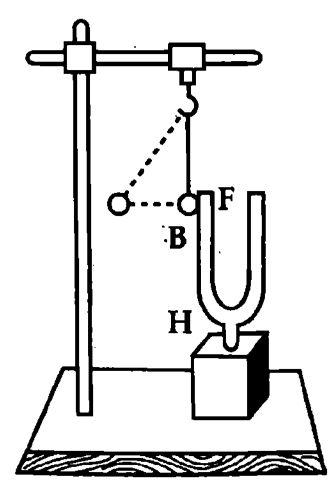
শব্দ সঞ্চালনের জন্য মাধ্যম অত্যাবশ্যক। শব্দ তরঙ্গ যখন বায়ু মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হয়ে আমাদের কানে প্রবেশ করে তখন স্নায়ু মাধ্যমে আমাদের মস্তিষ্কে এক প্রকার অনুভূতি জাগায়, যার ফলে আমরা শুনতে পাই। বায়ু বা গ্যাসীয় পদার্থ ছাড়া তরল ও কঠিন পদার্থও শব্দের মাধ্যম হিসেবে কাজ করে। যেমন রেল লাইনে কান পাতলে বহুদূর হতে আগত ট্রেনের শব্দ শোনা যায়। শূন্য মাধ্যমে শব্দের উৎপত্তি ও সঞ্চালন কোনটিই সম্ভব নয়।

সংজ্ঞা ঃ শব্দ এক প্রকার শক্তি যা একটি কম্পনশীল বস্তু হতে উৎপন্ন হয়ে ঐ বস্তু সংলগ্ন একটি নিরবচ্ছিন্ন স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের মধ্য দিয়ে আমাদের কানে পৌঁছে শ্রুতির অনুভূতি জন্মায় বা জন্মাবার চেষ্টা করে। কম্পমান বস্তুটিকে স্বনক বা শব্দের উৎস (Source of sound) বলে।

১৭.১৪ শব্দের উৎপত্তি
Production of sound

শব্দ উৎপত্তির মূল উৎসই বস্তুর কম্পন। বস্তুতে যতক্ষণ কম্পন থাকে ততক্ষণই এর শব্দ নিঃসরণ হয়। এ শব্দ নিরবচ্ছিন্ন স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের মধ্য দিয়ে আমাদের কানে পৌঁছে শ্রবণের অনুভূতি জন্মায়। উদাহরণস্বরূপ ঃ

একটি সুরশলাকা বা সুরেলী কাঁটাকে [চিত্র ১৭.১২] আঘাত করলে সুরেলী কাঁটা কম্পিত হবে ও শব্দ উৎপন্ন হবে। সুরেলী কাঁটা হাত দ্বারা স্পর্শ করলে কম্পন বন্ধ হবে। ফলে শব্দ নিঃসরণও বন্ধ হবে। চিত্রে সুর নিঃসরণকালে একটি সুরশলাকার এক বাহুর সংস্পর্শে রক্ষিত একটি ঝুলন্ত পিথবল সুরশলাকার কম্পনের দরুন বার বার ধাক্কা খেয়ে সরে যাচ্ছে বুঝানো হয়েছে [চিত্র ১৭.১২]।



চিত্র ১৭.১২

আমাদের দৈনন্দিন অভিজ্ঞতা থেকেও শব্দের উৎপত্তি ও প্রকৃতি বুঝতে পারি। যেমন কোন ধাতব পদার্থ মেঝেতে পড়ে গেলে বা ধাতব পদার্থকে কোন ধাতব দন্ড দিয়ে আঘাত করলে শব্দের সৃষ্টি হয় ; কিন্তু হাত বা শক্ত কিছু দিয়ে চেপে ধরলে শব্দ বন্ধ হয়ে যায়। বাঁশিতে ফুঁ দিয়ে কিংবা বাদ্যযন্ত্রের তারে টান দিয়ে বা ঢাক-ঢোলের চামড়ার পর্দা কাঁপিয়ে শব্দ সৃষ্টি করা হয়। সুতরাং বুঝা যাচ্ছে যে কম্পন থেকেই শব্দ সৃষ্টি হয়। এই কম্পন মাধ্যমে তরঙ্গের সৃষ্টি করে যা আমাদের কানের পর্দাকেও আন্দোলিত করে এবং আমরা শব্দ শুনতে পাই।

সিদ্ধান্ত ঃ কোন বস্তুর কম্পনের দরুন শব্দ উৎপন্ন হয়। সর্বপ্রকার শব্দ উৎপত্তির মূল উৎস বস্তুর কম্পন। কম্পনের ফলে যান্ত্রিক শক্তি হতে শব্দ উৎপন্ন হয়।

১৭.১৫ শব্দ একটি অগ্রগামী অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ
Sound is a longitudinal travelling wave

আমরা জানি, তরঙ্গ দু'রকমের—অনুপ্রস্থ এবং অনুদৈর্ঘ্য। শব্দ এক প্রকার তরঙ্গ। নিম্নের কারণগুলো প্রমাণ করে যে শব্দ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ।

১। তরঙ্গ সৃষ্টির জন্য বস্তুর কম্পন প্রয়োজন। শব্দ সৃষ্টির জন্যও বস্তুর কম্পন প্রয়োজন।

২। তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের প্রয়োজন হয়, শব্দ সঞ্চালনের জন্যও স্থিতিস্থাপক মাধ্যমের প্রয়োজন হয়।

৩। তরঙ্গ সঞ্চালনের জন্য মাধ্যম স্থানান্তরিত হয় না। শব্দের সঞ্চালনের সময়ও মাধ্যমের কণাগুলোর স্থানান্তর ঘটে না।

৪। একস্থান হতে অন্যস্থানে সঞ্চালিত হতে তরঙ্গের কিছু সময়ের প্রয়োজন হয়, শব্দ সঞ্চালনের জন্যও সময় প্রয়োজন হয়।

৫। তরঙ্গের বেগ মাধ্যমের প্রকৃতির উপর নির্ভর করে। শব্দের বেগও মাধ্যমের উপর নির্ভর করে।

৬। প্রত্যেক তরঙ্গের যেমন প্রতিফলন, প্রতিসরণ, ব্যতিচার এবং অপবর্তন ঘটে শব্দের বেলায়ও তা ঘটে।

৭। শব্দতরঙ্গের ক্ষেত্রে মাধ্যমের সঙ্কোচন ও প্রসারণ ঘটে যা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য।

৮। গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের সমবর্তন (polarization) হয় না। সমবর্তন কেবল আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে ঘটে। এতে প্রমাণিত হয় যে শব্দ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ।

৯। শব্দ কঠিন, তরল ও বায়বীয় মাধ্যমে সঞ্চালিত হতে পারে যা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের ক্ষেত্রে ঘটে।

উপরের ঘটনাসমূহ হতে প্রমাণিত হয় যে, শব্দ উৎসের কম্পনের ফলে শব্দ উৎপন্ন হয় এবং অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গাকারে বায়ু মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হয়ে আমাদের কানে পৌঁছায় এবং আমরা তা শুনতে পাই।

অতএব, **শব্দ একটি অগ্রগামী অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ।**

১৭·১৬ দুটি মাধ্যমে একটি শব্দের বেগের মধ্যে সম্পর্ক

Relation between velocities of a sound in two media

মনে করি A ও B দুটি মাধ্যম।

ধরি কোন একটি শব্দের বেগ ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্য যথাক্রমে A মাধ্যমে v_A এবং λ_A ও B মাধ্যমে যথাক্রমে v_B এবং λ_B। যদি শব্দের কম্পাঙ্ক n হয়, তবে

A মাধ্যমে শব্দের বেগ $v_A = n\lambda_A$ (18)

এবং B মাধ্যমে শব্দের বেগ $v_B = n\lambda_B$ (19)

(18) নং সমীকরণকে (19)নং সমীকরণ দ্বারা ভাগ করে পাই, (20)

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} \qquad (21)$$

এটাই হল দুটি মাধ্যমে শব্দের বেগের মধ্যে সম্পর্ক।

কোন এক মাধ্যমে দুটি শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক : মনে করি একটি মাধ্যমে দুটি তরঙ্গ প্রবাহিত হচ্ছে। একটির তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_1 এবং কম্পাঙ্ক n_1। অপরটির তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_2 এবং কম্পাঙ্ক n_2।

মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ v হলে,

প্রথম তরঙ্গের ক্ষেত্রে $v = n_1\lambda_1$ (22)

এবং দ্বিতীয় তরঙ্গের ক্ষেত্রে $v = n_2\lambda_2$ (23)

এখন (22) ও (23) সমীকরণ হতে পাই,

$n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$

বা, $$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (24)$$

এটিই হল তরঙ্গ দৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক।

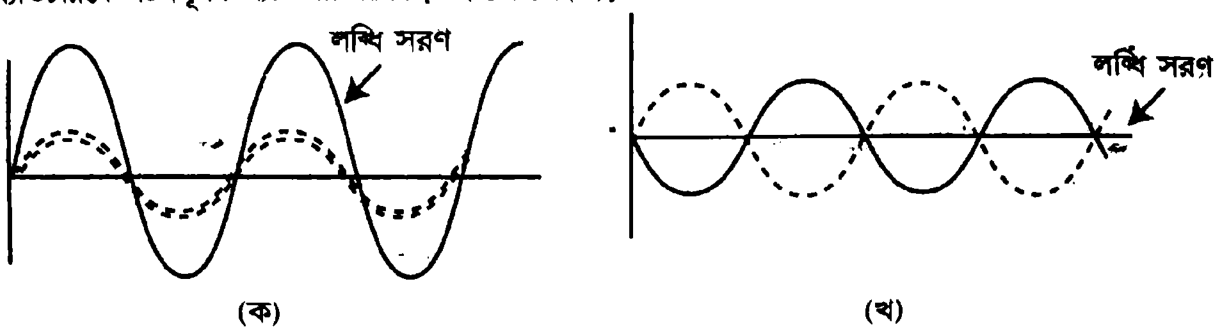
১৭·১৭ শব্দের ব্যতিচার

Interference of sound

সংজ্ঞা : সমান কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুটি শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতনের দরুন নীরব বা জোরালো শব্দের সৃষ্টি হলে ঐ ঘটনাকে শব্দের ব্যতিচার বলে।

ব্যতিচার দুই ধরনের। যথা—(ক) গঠনমূলক ব্যতিচার এবং (খ) ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার।

(ক) গঠনমূলক ব্যতিচার (Constructive interference) : সমান বিস্তার ও কম্পাঙ্কের দুটি শব্দতরঙ্গ উপরিপাতনের ফলে যে স্থানে একই দশায় মিলিত হয়, সেখানে লব্ধি সরণ শব্দের প্রত্যেকটি তরঙ্গের সরণের যোগফলের সমান হয়। এক্ষেত্রে $y_1 = y_2$ হলে, লব্ধি সরণ দ্বিগুণ হয়। ফলে লব্ধি সরণের তীব্রতা সবচেয়ে বেশি হয়। এ ব্যতিচারকে গঠনমূলক ব্যতিচার বলে। [চিত্র ১৭·১৩(ক)]



চিত্র ১৭·১৩

(খ) ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার (Destructive interference) : সমান বিস্তার ও কম্পাঙ্কের দুটি শব্দতরঙ্গ উপরিপাতনের ফলে যে স্থানে বিপরীত দশায় মিলিত হয়, সেখানে লব্ধি সরণ শূন্য হওয়ায় কোন শব্দ শোনা যায় না। একে শব্দের ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার বলে [চিত্র ১৭·১৩(খ)]। লব্ধি সরণ মোটা সরলরেখা দ্বারা দেখান হয়েছে।

সুসংগত উৎস (Coherent source) : দুটি উৎস সর্বদা একই দশায় থাকলে অথবা এদের দশা পার্থক্য সর্বদা স্থির থাকলে উৎস দুটিকে সুসংগত উৎস বলা হয়।

দুটি উৎসকে সুসংগত করতে হলে উভয়কে একই উৎস হতে সৃষ্টি করতে হয়।

শব্দের ব্যতিচারের গাণিতিক ব্যাখ্যা :

ধরা যাক সমান বিস্তার ও কম্পাঙ্কের দুটি শব্দ তরঙ্গ একই রেখায় সঞ্চালিত হয়ে এক বিন্দুতে মিলিত হল। t সময় পরে যে কোন বিন্দুতে এদের সরণ যথাক্রমে y_1 এবং y_2 হলে আমরা পাই,

$$y_1 = A_0 \sin\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right)$$

ও $$y_2 = A_0 \sin\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda} x_2\right)$$

এখানে n = সুরশলাকার কম্পাঙ্ক, λ = মাধ্যমে শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য ও A_0 = তরঙ্গের বিস্তার।

এ স্থলে প্রথম তরঙ্গ আলোচ্য বিন্দুতে যেতে x_1 পথ ও দ্বিতীয় তরঙ্গ ঐ বিন্দুতে যেতে x_2 পথ অতিক্রম করে।

এখন তরঙ্গদ্বয়ের উপরিপাতের ফলে এদের লব্ধি সরণ Y হলে,

$$Y = y_1 + y_2$$

বা, $$Y = A_0 \sin\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda} x_1\right) + A_0 \sin\left(2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda} x_2\right)$$

$$= 2A_0 \cos\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda}\right) \times \sin\left[2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\right]$$

$$= A \sin\left[2\pi nt - \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right]$$

$$= A \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left[vt - \frac{x_1 + x_2}{2}\right] \qquad [\because v = n\lambda] \qquad (25)$$

এখানে, $A = 2A_0 \cos\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda}\right)$ হল লব্ধি বিস্তার।

সমীকরণ (25) একটি নতুন তরঙ্গের সমীকরণ। সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে দুটি তরঙ্গের উপরিপাতের ফলে একটি নতুন তরঙ্গ সৃষ্টি হয়।

গঠনমূলক ব্যতিচার ঃ দুটি তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে উৎপন্ন তরঙ্গের বিস্তার $A = 2A_0 \cos \pi \left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda}\right)$ এবং এর মান মূল তরঙ্গদ্বয়ের পথ পার্থক্য $(x_2 - x_1)$-এর উপর নির্ভর করে। গাণিতিকভাবে পাওয়া যায়, শব্দের তীব্রতা I তরঙ্গের বিস্তারের (A) বর্গের সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, $I \propto A^2$

বা, $I = KA^2$

$$= K\left[2A_0 \cos \pi \left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda}\right)\right]^2$$

$$= 4\,KA_0^2 \cos^2 \pi \left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda}\right)$$

শব্দের তীব্রতা I সর্বোচ্চ হলে গঠনমূলক ব্যতিচার হয়। এটি হবে যখন $\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda}\right) = 0, \pi, 2\pi$

বা, $x_2 - x_1 = 0,\ \lambda\ \ 2\lambda\ \ \ n\lambda$

বা, $x_2 - x_2 = 0\ \ \frac{2\lambda}{2}, \frac{4\lambda}{2}, \ldots\ldots\ 2n\frac{\lambda}{2}$

তখন $I = 4\,KA_0^2$ হবে। এটি I-এর সর্বোচ্চ মান।

অর্থাৎ যে সকল বিন্দুতে তরঙ্গ দুটির পথ পার্থক্য $2n\frac{\lambda}{2}$ হয়, সে সকল বিন্দুতে তরঙ্গ দুটি একই দশায় মিলিত হওয়ায় গঠনমূলক ব্যতিচার সৃষ্টি হবে। এই অবস্থায় তরঙ্গদ্বয়ের পথ পার্থক্য শূন্য অথবা $\lambda/2$-এর যুগ্ম গুণিতক হবে।

ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার ঃ শব্দের তীব্রতা I শূন্য হলে ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার হয়। ধ্বংসাত্মক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে,

$$\pi\left(\frac{x_2 - x_1}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{\lambda}, \frac{5\pi}{\lambda} \ldots\ldots \text{ ইত্যাদি}$$

$$\text{বা, } (x_2 - x_1) = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2} \ldots\ldots \text{ ইত্যাদি}$$

$$= (2n + 1)\frac{\lambda}{2}\ (n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots \text{ ইত্যাদি})$$

ধ্বংসাত্মক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে তরঙ্গদ্বয়ের পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক হবে।

শব্দের ব্যতিচারের শর্ত ঃ উপরের গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে দেখা যায় যে, দুটি শব্দ তরঙ্গ নিম্নলিখিত শর্তগুলো পূরণ করলে ব্যতিচার হবে ঃ

১। তরঙ্গ দুটির কম্পাঙ্ক ও বিস্তার সমান হতে হবে।

২। তরঙ্গ দুটির আকৃতি ও দশা অপরিবর্তিত থাকবে।

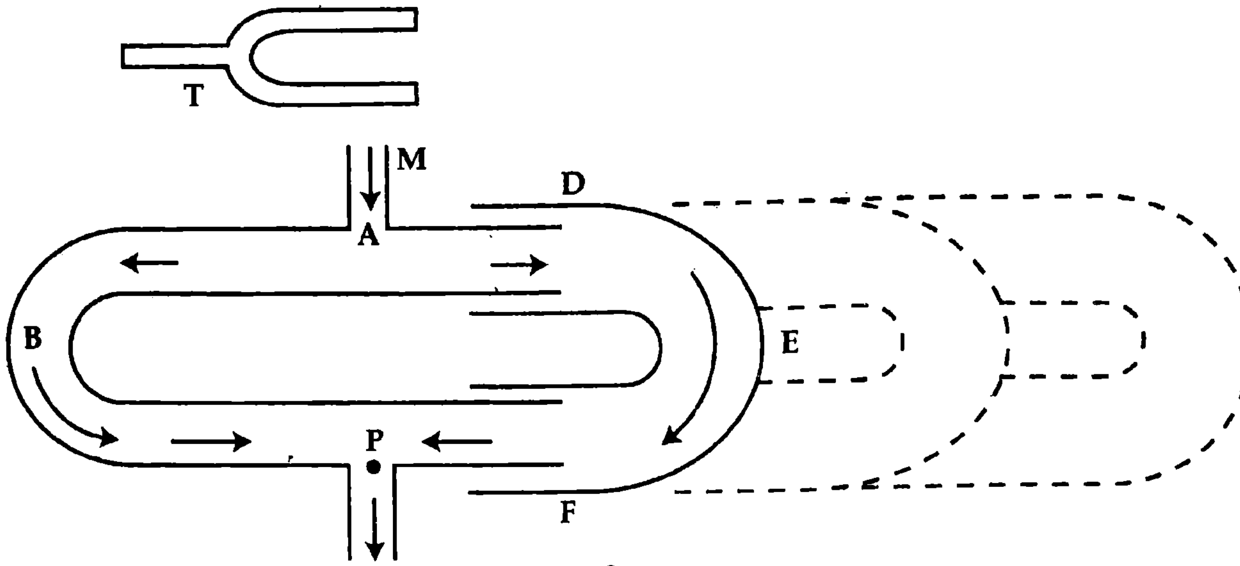
৩। তরঙ্গ দুটির দরুণ মাধ্যমের কোন একটি কণার সরণ একই রেখায় হবে।

৪। শব্দের উৎস হতে নিঃশব্দ বা ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার বিন্দুতে তরঙ্গদ্বয়ের অতিক্রান্ত পথ পার্থক্য $\frac{\lambda}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক হবে এবং জোরালো বা গঠনমূলক ব্যতিচারের ক্ষেত্রে তরঙ্গদ্বয়ের অতিক্রান্ত পথ-পার্থক্য শূন্য অথবা $\frac{\lambda}{2}$-এর যুগ্ম গুণিতক হবে।

১৭·১৮ শব্দের ব্যতিচার প্রদর্শনের পরীক্ষা
Demonstration of interference of sound

বাস্তবে দুটি ভিন্ন উৎস দ্বারা ১৭·১৪-এ বর্ণিত শর্তগুলো পুরাপুরি পূর্ণ করে শব্দের ব্যতিচার দেখানো যায় না। এজন্য কুইঙ্ক (Quincke)-এর উদ্ভাবিত পরীক্ষা ব্যবস্থা দ্বারা একটি শব্দ তরঙ্গকে কোন একটি বিন্দু হতে দুটি ভিন্ন

পথে প্রবাহিত হতে দিয়ে উপযুক্ত দশা বৈষম্যে পুনরায় অপর এক বিন্দুতে আপতিত করে শব্দের ব্যতিচার সৃষ্টি করা হয়। ১৭.১৪নং চিত্রে পরীক্ষার প্রয়োজনীয় ব্যবস্থা দেখানো হয়েছে।



চিত্র ১৭.১৪

এ পরীক্ষায় দুটি U-আকৃতির দুই মুখ খোলা নল AB ও DEF নেয়া হয়। AB নলের দুই বাহুতে দুটি পার্শ্ব নল M ও N আছে। DEF নলের দুই বাহুর ভেতর AB নলের বাহু দুটি প্রবেশ করানো যায়।

পরীক্ষা ঃ একটি সুর-শলাকাকে শব্দায়িত করে M নলের মুখে ধরা হয়। এতে সুর-শলাকা হতে শব্দ তরঙ্গ AB ও DEF পথে প্রবাহিত হয়ে N নল দিয়ে বের হয়ে যাবার কালে P বিন্দুতে মিলিত হবে। ঐ দুই পথে প্রবহমান তরঙ্গের কম্পাঙ্ক, বিস্তার ও জাতি অভিন্ন থাকবে এবং তারা N নলে একই রেখায় সরণ সৃষ্টি করবে। এখন DEF নলটিকে বাইরের দিকে টেনে অথবা ভিতরের দিকে ঠেলে ABP ও AEP পথের দূরত্বের পার্থক্য বাড়ালে অথবা কমালে N নলের মুখে শব্দের তীব্রতার নিম্নলিখিত পরিবর্তনগুলো লক্ষ্য করা যাবে ঃ

(ক) যখন ABP ও AEP-এর মধ্যে দৈর্ঘ্যের পার্থক্য অর্থাৎ তরঙ্গ দুটির অতিক্রান্ত পথের পার্থক্য তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অযুগ্ম গুণিতক হবে অর্থাৎ $(AEP - ABP) = \frac{\lambda}{2}, 3\left(\frac{\lambda}{2}\right), 5\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ ইত্যাদি হবে তখন তরঙ্গ দুটি P বিন্দুতে বিপরীত দশায় মিলিত হওয়ায় N নলের মুখে কোন শব্দ শোনা যাবে না। **এটাই ধ্বাংসাত্মক ব্যতিচার।**

(খ) যখন AEP ও ABP পথের দৈর্ঘ্যের পার্থক্য শূন্য অথবা $\frac{\lambda}{2}$-এর যুগ্ম গুণিতক হবে অর্থাৎ $(AEP - ABP) = 0, 2\left(\frac{\lambda}{2}\right), 4\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ ইত্যাদি হবে, তখন তরঙ্গ দুটি P বিন্দুতে সমদশায় মিলিত হবে এবং N-এর মুখে জোরালো শব্দ শোনা যাবে। **এটিই শব্দের গঠনমূলক ব্যতিচার।**

ব্যবহার ঃ কুইঙ্ক নলের সাহায্যে শব্দের বেগ নির্ণয় করা যায়। AEP ও ABP পথের দৈর্ঘ্যের ন্যূনতম পার্থক্য N নলের মুখে কোন শব্দ শোনা না গেলে আমরা পাই, $AEP - ABP = \lambda/2$। এখন, সুর শলাকার কম্পাঙ্ক n হলে,

$$v = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2} = 2n\,(AEP - ABP)$$

কাজেই, λ জেনে নলের বায়ুতে শব্দের বেগ জানা যাবে।

বইঘর.কম

স্মরণিকা

তরঙ্গ : কোন স্থিতিস্থাপক জড় মাধ্যমের বিভিন্ন কণার সমষ্টিগত পর্যাবৃত্ত কম্পনের ফলে মাধ্যমে যে আলোড়ন সৃষ্টি হয়, তাকে তরঙ্গ বলে।

তরঙ্গের প্রকারভেদ : কম্পনের সাথে তরঙ্গ প্রবাহের দিকের তারতম্য ভেদে তরঙ্গকে দু'ভাগে ভাগ করা হয়েছে। যথা—(১) আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ ; (২) লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ।

আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ : যে সব তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পনের দিক তরঙ্গ প্রবাহের দিকের সমকোণী হয়, তাদেরকে আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ বলে।

লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ : যে সব তরঙ্গের ক্ষেত্রে জড় মাধ্যমের কণাগুলোর কম্পনের দিক এবং তরঙ্গ প্রবাহের দিক একই দিকে হয় তাদেরকে লম্বিক বা অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ বলে।

শব্দ : শব্দ এক প্রকার শক্তি যা একটি স্থিতিস্থাপক নিরবচ্ছিন্ন মাধ্যমের মধ্য দিয়ে আমাদের কানে পৌঁছে শ্রুতির অনুভূতি জন্মায় বা জন্মাতে চেষ্টা করে।

শব্দের উৎপত্তি : কোন বস্তুর কম্পনের দরুন শব্দ উৎপন্ন হয়। সর্ব প্রকার শব্দ উৎপত্তির মূল উৎস বস্তুর কম্পন।

পূর্ণ কম্পন : তরঙ্গাস্থিত কোন একটি কম্পমান বস্তু একটি বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে আবার একই দিক হতে সেই বিন্দুতে ফিরে এলে তাকে পূর্ণ কম্পন বলে।

তরঙ্গ বেগ : কোন একটি তরঙ্গ কোন মাধ্যমে এক সেকেন্ডে যতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে তরঙ্গ দ্রুতি বলে।

তরঙ্গ দৈর্ঘ্য : কোন মাধ্যমে কোন একটি কম্পমান বস্তু একটি পূর্ণ কম্পনে যে দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে ঐ তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বলে। একে λ দিয়ে সূচিত করা হয়।

কম্পাঙ্ক বা স্পন্দন সংখ্যা : কোন একটি কম্পমান বস্তু এক সেকেন্ডে যত সংখ্যক পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে, তাকে উক্ত বস্তুর কম্পাঙ্ক বলে। একে n দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

দোলনকাল বা পর্যায়কাল : কোন একটি কম্পমান বস্তুর একটি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করতে যে সময় লাগে তাকে ঐ বস্তুর দোলন বা পর্যায়কাল বলে। একে T দিয়ে সূচিত করা হয়।

বিস্তার : কোন একটি কম্পমান বস্তু তার সাম্যাবস্থান থেকে ডানে বা বামে যে সর্বাধিক দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে ঐ বস্তুর বিস্তার বলে।

দশা : দশা কোন একটি কম্পমান বস্তুর কোন মুহূর্তের দোলনের অবস্থা প্রকাশ করে।

আদি দশা : কোন একটি কম্পমান বস্তু যে দশা নিয়ে কম্পন শুরু করে, তাকে আদি দশা বলে।

তরঙ্গ মুখ : কোন একটি তরঙ্গের উপরিস্থিত সমদশাসম্পন্ন সকল বিন্দুর মধ্য দিয়ে অংকিত তলকে তরঙ্গ মুখ বলে।

তরঙ্গ শীর্ষ : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ধন দিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ শীর্ষ বলে।

তরঙ্গ পাদ : আড় তরঙ্গের ক্ষেত্রে এর ঋণদিকে এক তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে সর্বাধিক সরণের বিন্দুকে তরঙ্গ পাদ বলে।

তরঙ্গ রেখা : কোন এক মুহূর্তে মাধ্যমের কণাগুলো তরঙ্গের উপর যে রেখায় আপনা-আপনি অবস্থান করে সে রেখাকে তরঙ্গ রেখা বলে।

অগ্রগামী তরঙ্গ : কোন তরঙ্গ যদি কোন বিস্তৃত মাধ্যমের এক স্তর হতে অন্য স্তরে সঞ্চালিত হয়ে সামনের দিকে অগ্রসর হতে থাকে, তবে তাকে অগ্রগামী তরঙ্গ বলে।

স্থির তরঙ্গ : যদি কোন মাধ্যমের সীমিত অংশে দুটি পরস্পর বিপরীতমুখী অগ্রগামী তরঙ্গের দোলন কাল ও বিস্তার সমান হয়, তবে তাদের মিলিত ক্রিয়ায় ঐ অংশে যে নতুন তরঙ্গ সৃষ্টি হয় তাকে স্থির তরঙ্গ বলে।

তরঙ্গের উপরিপাতন : দুটি শব্দ তরঙ্গ একই সঙ্গে কোন মাধ্যমের একটি কণাকে অতিক্রম করলে ঐ কণা তরঙ্গ দুটির সম্মিলিত প্রভাবে আলোড়িত হবে। কোন মুহূর্তে কণাটির লব্ধি সরণ প্রত্যেকটি তরঙ্গ পৃথকভাবে ঐ বিন্দুতে যে সরণ সৃষ্টি করে তাদের ভেক্টর যোগফলের সমান। এর নাম তরঙ্গের উপরিপাতন।

শব্দের ব্যতিচার : সমান কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুটি শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে নীরবতা অথবা প্রবলতর শব্দের সৃষ্টি হলে ঐ ঘটনাকে শব্দের ব্যতিচার বা শব্দ সংঘাত বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

$I \propto a^2$ (1)
(I = তীব্রতা, a = বিস্তার)

$v = n\lambda = n\dfrac{S}{N}$ (2)

$nT = 1$ (3)

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi n$ (4)

দশা পার্থক্য, $\delta = \dfrac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য (5)

অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ ঃ

$$y = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad (6)$$

$$y = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x) \quad (7)$$

স্থির তরঙ্গের সমীকরণ ঃ

$$y = 2A_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}x \sin\omega t \quad (8)$$

নিস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির শর্ত ঃ $\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda} = 0$ (9)

বা, $\dfrac{2\pi}{\lambda}x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}$ (10)

সুস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির শর্ত ঃ $\dfrac{\cos 2\pi x}{\lambda} = \pm 1$ (11)

বা, $\dfrac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi......$ (12)

দুটি মাধ্যমে ঃ $\dfrac{v_A}{v_B} = \dfrac{\lambda_A}{\lambda_B}$ (13)

একই মাধ্যমে ঃ $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$ (14)

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। দুটি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 128 Hz এবং 384 Hz। বায়ুতে শলাকা দুটি হতে সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৪, ২০০১]

মনে করি তরঙ্গ দৈর্ঘ্য যথাক্রমে λ_1 ও λ_2

আমরা পাই, $v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$

$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{n_2}{n_1}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{384 \text{ Hz}}{128 \text{ Hz}} = \dfrac{3}{1}$

$\lambda_1 : \lambda_2 = 3 : 1$

এখানে, $n_1 = 128$ Hz

$n_2 = 384$ Hz

২। একটি সুর শলাকা যে সময়ে 200 বার কম্পন দেয় সে সময়ে এটি দ্বারা সৃষ্ট শব্দতরঙ্গ বাতাসে 140 m দূরত্ব অতিক্রম করে। সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 500 Hz হলে বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$v = n\lambda$

$= 500 \times \dfrac{140}{200}$

$= 350 \text{ ms}^{-1}$

এখানে,

$\lambda = \dfrac{s}{N} = \dfrac{140}{200}$m

$n = 500$ Hz

$v = ?$

৩। বায়ুতে শব্দের বেগ 332 ms^{-1}। বায়ুতে 664 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুরেলী কাঁটার শব্দ কাটাটির 100টি পূর্ণ কম্পনকালে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ?

ধরি নির্ণেয় দূরত্ব $= s$

আমরা পাই, $s = N\lambda = N\dfrac{v}{n}$ (1)

$[\because v = n\lambda]$

এখানে, $N = 100$ কম্পন

$v = 332\ ms^{-1}$

$n = 664\ Hz = 664\ s^{-1}$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $s = 100 \times \dfrac{332\ ms^{-1}}{664\ s^{-1}} = 50\ m$

৪। একটি সুর শলাকা কর্তৃক সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বায়ুতে 1·006 m ও হাইড্রোজেনে 3·824 m। বায়ুতে শব্দের বেগ 332 ms^{-1} হলে, হাইড্রোজেনে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n$ ও হাইড্রোজেনে শব্দের বেগ $= v_h$

আমরা $v = n\lambda$ সমীকরণ হতে পাই,

$n = \dfrac{v_a}{\lambda_a} = \dfrac{v_h}{\lambda_h}$ (1)

এখানে, $v_a = 332\ ms^{-1}$

$\lambda_a = 1{\cdot}006\ m$

$\lambda_h = 3{\cdot}824\ m$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $v_h = \dfrac{\lambda_h}{\lambda_a} \times v_a = \dfrac{3{\cdot}824\ m}{1{\cdot}006\ m} \times 332\ ms^{-1} = 1262\ ms^{-1}$

৫। বায়ু ও পানিতে 300 Hz কম্পাঙ্কের একটি শব্দ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পার্থক্য 4·16 m, বায়ুতে শব্দের বেগ 352 ms^{-1} হলে, পানিতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০১ ; সি. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$$\lambda_a = \frac{v_a}{n} = \frac{352}{300}$$

$$\lambda_w = \frac{v_w}{n} = \frac{v_w}{300}$$

এখানে,

$\lambda_w - \lambda_a = 4{\cdot}16\ m$

$n = 300\ Hz$

$v_a = 352\ ms^{-1}$

$v_w = ?$

প্রশ্নানুসারে,

$$\lambda_w - \lambda_a = \frac{v_w}{300} - \frac{352}{300}$$

বা, $4{\cdot}16 = \dfrac{1}{300}(v_w - 352)$

বা, $v_w - 352 = 300 \times 4{\cdot}16$

$v_w = 300 \times 4{\cdot}16 + 352$

$= 1600\ ms^{-1}$

৬। 0·325m ব্যবধানে অবস্থিত তরঙ্গের দুটি কণার মধ্যে দশা পার্থক্য 3·14 rad। তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক 512 Hz হলে মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর।

ধরি মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ $= v$

$\therefore$ আমরা পাই, দশা পার্থক্য $= \dfrac{2\pi}{\lambda} \times$ পথ পার্থক্য (1)

এখানে,

পথ পার্থক্য $= 0{\cdot}325\ m$

দশা পার্থক্য $= 3{\cdot}14\ rad$

$n = 512$

কাজেই সমীকরণ (1) অনুসারে,

$$3{\cdot}14\ rad = \frac{2 \times 3{\cdot}14\ rad}{\lambda} \times 0{\cdot}325\ m$$

$$\lambda = 2 \times 0{\cdot}325\ m = 0{\cdot}65\ m$$

নির্ণেয় বেগ, $v = n\lambda = 512\ Hz \times 0{\cdot}65\ m$

$= 332{\cdot}8\ ms^{-1}$

৭। একটি শব্দ তরঙ্গ বায়ুতে 3 মিনিটে 1020 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে, এই শব্দ তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 50 cm হলে তরঙ্গের পর্যায়কাল কত ? [কু. বো. ২০০৩]

এখানে,
$t = 3$ মি.
$= 3 \times 60$ সে.
$s = 1020$ মি.
$\lambda = 50\,\text{cm} = 0{\cdot}5\,\text{m}$
$T = ?$

$v = \frac{s}{t} = \frac{1020}{3 \times 60} = 5{\cdot}67\ \text{ms}^{-1}$

আবার, $v = n\lambda$

বা, $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{5{\cdot}67}{0{\cdot}5} = 11{\cdot}34\ \text{Hz}$

পর্যায়কাল, $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{11{\cdot}34} = 0{\cdot}09\ \text{s}$

৮। A মাধ্যমে শব্দের বেগ B মাধ্যমে শব্দের বেগের চেয়ে 5 গুণ বেশি। B মাধ্যমে একটি শব্দের উৎসের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 10 cm হলে A মাধ্যমে উৎসের 100 বার কম্পনে শব্দ কত দূর যাবে ? [ব. বো. ২০০৩]

এখানে,
B মাধ্যমে বেগ $v_B = v$
A মাধ্যমে বেগ $v_A = 5v$
$\lambda_B = 10\,\text{cm} = 0{\cdot}1\,\text{m}$
$N = 100$ বার

আমরা জানি, $S_A = N\lambda_A$

আবার, $n = \frac{v_A}{\lambda_A} = \frac{v_B}{\lambda_B}$

$\lambda_A = \frac{v_A}{v_B} \times \lambda_B$

$= \frac{5v}{v} \times 0{\cdot}1 = 0{\cdot}5\,\text{m}$

$S_A = 100 \times 0{\cdot}5$

$S_A = 50\,\text{m}$

৯। কোন মাধ্যমে 480 Hz এবং 320 Hz কম্পাঙ্কের দুটি শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পার্থক্য 2m হলে মাধ্যমে শব্দের বেগ কত হবে ? [রা. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৩]

এখানে,
$n_1 = 480\ \text{Hz}$
$n_2 = 320\ \text{Hz}$
$\lambda_2 - \lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 2 + \lambda_1$
$v = ?$

আমরা জানি,

$v = n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{320}{480}$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2} = \frac{320}{480}$

বা, $480\,\lambda_1 = 320\,\lambda_1 + 640$

বা, $480\,\lambda_1 - 320\,\lambda_1 = 640$

বা, $160\,\lambda_1 = 640$

বা, $\lambda_1 = \frac{640}{160} = 4\,\text{m}$

$v = n_1\lambda_1$
$= 480 \times 4$
$= 1920\ \text{ms}^{-1}$

১০। কোন একটি সীমাবদ্ধ মাধ্যমে সৃষ্ট স্থির তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 480 Hz। তরঙ্গাস্থ পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব 0·346 m। মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর।

এখানে,
$n = 480\ \text{Hz}$
পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব, $\frac{\lambda}{2} = 0{\cdot}346$
$v = ?$

আমরা জানি,

পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2}$

$\frac{\lambda}{2} = 0{\cdot}346\,\text{m}$

বা, $\lambda = 0{\cdot}346 \times 2 = 0{\cdot}692\,\text{m}$

তরঙ্গের বেগ, $v = n\lambda$

$v = 480 \times 0{\cdot}692\ \text{ms}^{-1}$
$= 332{\cdot}2\ \text{ms}^{-1}$

১১। 332 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুরশলাকাকে বাতাসে বাজালে, এটি দ্বারা সৃষ্ট তরঙ্গ শলাকাটির 150 বার কম্পনকালে কত দূরত্ব অতিক্রম করবে ? (বাতাসে শব্দের বেগ 332 ms^{-1})

আমরা জানি,

$$v = n\lambda$$

বা, $$\lambda = \frac{v}{n}$$

$$\lambda = \frac{332}{332}\text{m}$$

$$= 1\text{ m}$$

এখানে,

কম্পাঙ্ক, $n = 332$ Hz

কম্পন সংখ্যা, $N = 150$

শব্দের বেগ, $v = 332\ ms^{-1}$

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ?$

একবার কম্পনের জন্য শব্দ λ অর্থাৎ 1 m দূরত্ব অতিক্রম করে।

150 বার কম্পনের জন্য দূরত্ব অতিক্রম করে, $s = 1 \times 150 = 150$ m

১২। কোন নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কে কম্পনরত একটি বস্তু A মাধ্যমে 0·5 m তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং 340 ms^{-1} বেগ সম্পন্ন অগ্রগামী তরঙ্গ উৎপন্ন করে। তা B মাধ্যমে 550 ms^{-1} বেগের অগ্রগামী তরঙ্গ উৎপন্ন করলে এই তরঙ্গের তরঙ্গদৈর্ঘ্য কত হবে ?

আমরা জানি,

$$v_A = n\lambda_A$$

এবং $$v_B = n\lambda_B$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$$

বা, $$\lambda_B = \lambda_A \times \frac{v_B}{v_A}$$

$$\lambda_B = 0{\cdot}5 \times \frac{550}{340}\text{ m} = 0{\cdot}81\text{ m}$$

এখানে,

$\lambda_A = 0{\cdot}5$ m

$v_A = 340\ ms^{-1}$

$v_B = 550\ ms^{-1}$

$\lambda_B = ?$

১৩। কোন তরঙ্গের বিস্তার 0·2 m হলে $t = \frac{T}{3}$ সময়ে কম্পনের উৎস হতে $x = \frac{\lambda}{6}$ দূরত্বে অবস্থিত বিন্দুর সাম্যাবস্থান হতে সরণ কত হবে ?

আমরা জানি,

সরণ, $$y = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$$

বা, $$y = A\sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$y = A\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad \left[\because \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}\right]$$

$$= 0{\cdot}2\sin\left(\frac{2\pi T}{T\times 3} - \frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{6}\right)$$

$$= 0{\cdot}2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{6}\right)$$

$$= 0{\cdot}2\sin\left(\frac{4\pi - 2\pi}{6}\right)$$

$$= 0{\cdot}2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 0{\cdot}173\text{ m}$$

এখানে,

তরঙ্গের বিস্তার, $A = 0{\cdot}2$ m

সময়, $t = T/3$

উৎস হতে দূরত্ব, $x = \frac{\lambda}{6}$

সরণ, $y = ?$

১৪। কোন সুরশলাকা একটি মাধ্যমে 30 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের এবং 330 ms^{-1} বেগের তরঙ্গ উৎপন্ন করে। অপর একটি মাধ্যমে তরঙ্গ বেগ যদি 300 ms^{-1} তবে ঐ মাধ্যমে সুরশলাকার 100টি কম্পনে শব্দ কতদূর যাবে ?

এখানে,

প্রথম মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v_A = 330\ ms^{-1}$

প্রথম মাধ্যমে তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda_A = 30\ cm = 0.3\ m$

দ্বিতীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ, $v_B = 300\ ms^{-1}$

দ্বিতীয় মাধ্যমে তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda_B = ?$

আমরা জানি,

$$v_A = n\lambda_A \quad (1)$$

এবং $v_B = n\lambda_B \quad (2)$

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$$

বা, $\lambda_B = \lambda_A \frac{v_B}{v_A}$

$$\lambda_B = 0.3 \times \frac{300}{330}$$

$$= 0.273\ m$$

আমরা $= S = S/10$ $\therefore S = 100 \times S = 27.27$ Ans

১৫। দুটি সুরশলাকার কম্পাঙ্কের পার্থক্য 118 Hz। বাতাসে শলাকা দুটি যে তরঙ্গ উৎপন্ন করে, তাদের একটির দুটি পূর্ণ তরঙ্গদৈর্ঘ্য অপরটির তিনটি পূর্ণ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সমান। শলাকাদ্বয়ের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [কু. বো. ২০০৪]

মনে করি A ও B দুটি সুর শালাকা প্রশ্নানুসারে,

$$n_2 - n_1 = 118 \quad (1)$$

এবং $2\lambda_1 = 3\lambda_2$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{3}{2}$$

আমরা জানি, $v = n_1\lambda_1$

এবং $v = n_2\lambda_2$

$$n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$$

বা, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$

বা, $\frac{3}{2} = \frac{n_2}{n_1}$

$$n_1 = \frac{2n_2}{3}$$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$n_2 - \frac{2n_2}{3} = 118$$

বা, $n_2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 118$

$$n_2 = \frac{118 \times 3}{1} = 354\ Hz$$

$$354 - n_1 = 118$$

বা, $n_1 = 354 - 118 = 236\ Hz$

১৬। বাতাসে একটি সুর শলাকার সৃষ্ট শব্দ তরঙ্গের দৈর্ঘ্য 50 cm এবং অপর একটি সুর শলাকার সৃষ্ট শব্দ তরঙ্গের দৈর্ঘ্য 70 cm। প্রথম সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 350 Hz হলে দ্বিতীয় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক কত? [রা. বো. ২০০০]

দেয়া আছে,

$\lambda_1 = 50\ cm$

$\lambda_2 = 70\ cm$

$n_1 = 350\ Hz$

$n_2 = ?$

আমরা জানি, $n_1\lambda_1 = n_2\lambda_2$

বা, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

বা, $n_2 = \frac{n_1\lambda_1}{\lambda_2}$

$$= \frac{350 \times 50}{70}$$

$$= 250\ Hz$$

১৭। P ও Q দুটি মাধ্যমে শব্দের বেগ যথাক্রমে 300 ms^{-1} এবং 350 ms^{-1}। মাধ্যম দুটিতে শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পার্থক্য = 0·1 m হলে সুর শলাকার 50 কম্পনে শব্দ Q মাধ্যমে কত দূর যাবে ?

[য. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ঢা. বো. ২০০০]

যেহেতু 'Q' মাধ্যমে শব্দের বেগ বেশি তাই 'Q' মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 'P' মাধ্যমে সৃষ্ট তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের চেয়ে বড় হবে। অর্থাৎ $\lambda_Q > \lambda_P$

$$\lambda_Q - \lambda_P = 0{\cdot}1 \quad (1)$$

আবার, $v_P = n\lambda_P$

বা, $300 = n\lambda_P \quad (2)$

আবার, $v_Q = n\lambda_Q$

বা, $350 = n\lambda_Q \quad \ldots \quad (3)$

(3) নং হতে (2) নং বিয়োগ করলে পাই,

$n(\lambda_Q - \lambda_P) = 50$

বা, $n = \dfrac{50}{\lambda_Q - \lambda_P} = \dfrac{50}{0{\cdot}1}$

$= 500$ Hz

এখানে, $t = \dfrac{N}{n} = \dfrac{50}{500} = 0{\cdot}1$ s

Q মাধ্যমে 50 কম্পনে অতিক্রান্ত দূরত্ব ,

$s = vt$

$= 350 \times 0{\cdot}1$

$= 35$ m

১৮। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ, $Y = 5 \sin (200\pi t - 1{\cdot}57 x)$, এখানে সব কয়টি রাশি S. I. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, বেগ ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০০]

দেওয়া আছে,

$$y = 5 \sin (200\pi t - 1{\cdot}57 x) \quad (1)$$

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) = A \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} vt - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (2)$$

সমীকরণ (1) ও (2) তুলনা করে পাই,

$A = 5$ m

$\dfrac{2\pi}{\lambda} v = 200\pi$

বা, $2\pi n = 200\pi \qquad [\because \dfrac{v}{\lambda} = n]$

$n = 100$ Hz

আবার, $\dfrac{2\pi}{\lambda} = 1{\cdot}57$

$\lambda = \dfrac{2\pi}{1{\cdot}57} = 4$m

এখন, $\dfrac{v}{\lambda} = n$

বা, $v = \lambda n = 4 \times 100 = 400\ ms^{-1}$

$T = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{100} = 0{\cdot}01$s

উত্তর : বিস্তার 5m ; কম্পাঙ্ক = 100 Hz ; বেগ = 400 ms^{-1} এবং পর্যায়কাল = 0·01s

BG & JEWEL

১৯। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0.5 \sin(20\pi t - 1.57x)$। এখানে সবকটি রাশি এস. আই. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, বেগ ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৫]

দেওয়া আছে,

$$y = 0.5 \sin(20\pi t - 1.57x) \quad (1)$$

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - x) \quad (2)$$

বা, $$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (3)$$

সমীকরণ (1) ও (3) তুলনা করে পাই,

বিস্তার, $A = 0.5\text{m}$

এবং $$20\pi = \frac{2\pi}{\lambda}v \quad (4)$$

ও $$\frac{2\pi}{\lambda} = 1.57 \quad (5)$$

বা, $\lambda = \frac{2\pi}{1.57} = \frac{2 \times 3.14}{1.57} = 4\,\text{m}$

সমীকরণ (4) হতে পাই,

$$20\pi = \frac{2\pi}{\lambda}v$$

বা, $v = \frac{4 \times 20\pi}{2\pi} = 40\,\text{ms}^{-1}$

কম্পাঙ্ক, $n = \frac{v}{\lambda} = \frac{40}{4} = 10\,\text{Hz}$

পর্যায়কাল, $T = \frac{1}{n} = \frac{1}{10} = 0.1\text{s}$

উত্তর ঃ বিস্তার 0.5m ; কম্পাঙ্ক 10Hz ; বেগ $40\,\text{ms}^{-1}$ এবং পর্যায়কাল 0.1s

২১। $y = 1.15 \sin(2000t + 0.01x)$, যেখানে সকল রাশি SI এককে প্রকাশিত। তরঙ্গের বিস্তার, কম্পাঙ্ক, তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং তরঙ্গবেগ নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৫]

দেওয়া আছে, $y = 1.15 \sin(2000t + 0.01x)$ (1)

আমরা জানি, অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ

$$y = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)$$

বা, $$y = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (2)$$

সমীকরণ (1) ও (2) তুলনা করে পাই,

$$A = 1.15\,\text{m}$$

এবং $$2000 = \frac{2\pi}{\lambda}v \quad (3)$$

ও $$\frac{2\pi}{\lambda} = 0.01 \quad (4)$$

বা, $\lambda = \frac{2\pi}{0.01} = \frac{2 \times 3.14}{0.01} = 628\,\text{m}$

সমীকরণ (3)-এ λ-এর মান বসিয়ে পাই,

$$2000 = \frac{2\pi}{628} \times v$$

বা, $$v = \frac{2000 \times 628}{2 \times 3.14} = 200000\,\text{ms}^{-1} = 2 \times 10^5\,\text{ms}^{-1}$$

কম্পাঙ্ক, $$n = \frac{v}{\lambda} = \frac{200000}{628} = 318.5\,\text{Hz}$$

উত্তর ঃ বিস্তার 1.15m ; কম্পাঙ্ক 318.5 Hz ; তরঙ্গ দৈর্ঘ্য 628m ; বেগ $2 \times 10^5\,\text{ms}^{-1}$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। দশা কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০১]
২। স্থির তরঙ্গ কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০৩]
৩। শব্দের তীব্রতা বলতে কি বুঝ ? [কু. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০২ ; রা. বো. ২০০২]
৪। তরঙ্গমুখ কি ? [রা. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০৫]
৫। স্থির তরঙ্গ অঙ্কন কর এবং এতে λ চিহ্নিত কর। [য. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৩]
৬। তরঙ্গদৈর্ঘ্য ও বিস্তার কাকে বলে ? [চ. বো. ২০০৪]
৭। তরঙ্গের উপরিপাতন কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০২]
৮। উপরিপাতন নীতি কি ? [সি. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২]
৯। শব্দের প্রাবল্য বলতে কি বুঝ ? [ব. বো. '০৪]
১০। শব্দের ব্যতিচার কি ? [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; ব. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০০ ; ঢা. বো. ২০০০ ; রা. বো. ২০০০]
বা, শব্দের ব্যতিচার কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৪]
১১। আড় তরঙ্গ ও লম্বিক তরঙ্গ কাকে বলে ? [রা. বো. ২০০৩]
১২। শব্দের ব্যতিচার ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৩]
১৩। অগ্রগামী তরঙ্গ কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০২]
১৪। শব্দ কি ? কিভাবে উৎপন্ন হয় ? [চ. বো. ২০০০]
১৫। সংজ্ঞা দাও ঃ
(ক) স্থির তরঙ্গ [কু. বো. ২০০৪]
(খ) অগ্রগামী তরঙ্গ [কু. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০২ ; ব. বো. ২০০১]
(গ) তরঙ্গ [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০০]
(ঘ) শব্দের তীব্রতা [চ. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৩]
(ঙ) তরঙ্গমুখ [চ. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; সি. বো. ২০০৬, ২০০১ ; রা. বো. ২০০০ ; য. বো. ২০০০]
(চ) দশা [চ. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০১]
(ছ) স্থির তরঙ্গ [ঢা. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০০]
(জ) বিস্তার [ঢা. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০০]
(ঝ) আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গ [কু. বো. ২০০২; ঢা. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০০ ; কু. বো. ২০০০]
(ঞ) অনুদৈর্ঘ্য বা লম্বিক তরঙ্গ [কু. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০০]
(ট) সুস্পন্দ বিন্দু [সি. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০১]
(ঠ) নিস্পন্দ বিন্দু [সি. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০১]
(ড) তরঙ্গদৈর্ঘ্য [কু. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০১ ; ব. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]
(ঢ) তরঙ্গ শীর্ষ বা চূড়া ;
(ণ) তরঙ্গপাদ বা খাঁজ।
১৬। পরপর দুটি সুস্পন্দ বিন্দু বা দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব কত ?
১৭। একটি তরঙ্গের বেগ, তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং কম্পাঙ্কের সম্পর্ক লিখ।
১৮। তরঙ্গের দশা পার্থক্য ও পথ পার্থক্যের সম্পর্ক লিখ।

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। অনুদৈর্ঘ্য ও অনুপ্রস্থ তরঙ্গ কি? অগ্রগামী তরঙ্গের তিনটি বৈশিষ্ট্য লিখ। [কু. বো. ২০০৫]
২। অনুপ্রস্থ ও অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গের মধ্যে পার্থক্যগুলো লিখ। [ঢা. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০০]
৩। অগ্রগামী তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যগুলো লিখ। [রা. বো. ২০০১]
৪। অগ্রগামী তরঙ্গের ক্ষেত্রে $y = A \sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠা কর। যেখানে প্রতীকগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [সি. বো. ২০০৪; ঢা. বো. ২০০১]
অথবা, একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ প্রতিপাদন কর। [ঢা. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; কু. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৬; চ. বো. ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; য. বো. ২০০২ ; ব. বো. ২০০২]
৫। স্থির তরঙ্গ কিভাবে সৃষ্টি হয় ? স্থির তরঙ্গের বৈশিষ্ট্য লিখ। [ব. বো. ২০০৪]
৬। স্থির তরঙ্গের বৈশিষ্ট্যসমূহ কি কি ? [কু. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১]
৭। গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে স্থির তরঙ্গ কিভাবে সৃষ্টি হয় তা আলোচনা কর (বা ব্যাখ্যা কর)। [ব. বো. ২০০৬, ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৪; রা. বো. ২০০৫; কু. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০২ ;
অথবা, স্থির তরঙ্গের গাণিতিক রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [রা. বো. ২০০৩]

৮। অগ্রগামী ও স্থির তরঙ্গের মধ্যে পার্থক্য আলোচনা কর। [রা. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৪]

৯। দেখাও যে, শব্দ একটি অগ্রগামী অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ। [ব. বো. '০৩]

১০। সুস্পন্দ বিন্দু ও নিস্পন্দ বিন্দুর শর্তগুলো দেখাও। [রা. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০২]

১১। স্থির তরঙ্গে সুস্পন্দ বিন্দু উদ্ভবের শর্ত আলোচনা কর। [য. বো. ২০০১]

১২। স্থির তরঙ্গে নিস্পন্দ বিন্দু উদ্ভবের শর্ত আলোচনা কর।

১৩। শব্দের উপরিপাতন ব্যাখ্যা কর।

১৪। স্থির তরঙ্গের সমীকরণ প্রতিপাদন করে সুস্পন্দ বিন্দু ও নিস্পন্দ বিন্দু সৃষ্টির শর্ত আলোচনা কর। [কু. বো. ২০০৬, ২০০১; চ. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৩]

১৫। শব্দের ব্যতিচার সৃষ্টির গাণিতিক বিশ্লেষণ বর্ণনা কর এবং ব্যতিচার হওয়ার শর্ত প্রতিপাদন কর। [সি. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৩ ; কু. বো. ২০০১ ; চ. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]

১৬। গাণিতিকভাবে শব্দতরঙ্গের ব্যতিচার ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০১]

১৭। শব্দের ব্যতিচারের বিশ্লেষণ দাও। ধ্বংসাত্মক ও গঠনমূলক ব্যতিচারের শর্ত প্রতিপাদন কর। [য. বো. ২০০৬, ২০০৪]

১৮। $v = n\lambda$ সমীকরণটি প্রতিপাদন কর। [কু. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০১]

১৯। গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে গঠনমূলক ও ধ্বংসাত্মক ব্যতিচার ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০৬; রা. বো. ২০০৫]

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। দুটি সুর শলাকা কর্তৃক বায়ুতে উৎপন্ন শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য যথাক্রমের 0·65 m ও 1·95 m। এদের কম্পাঙ্ক তুলনা কর। [উঃ 3 ঃ 1]

২। তিনটি সুর শলাকার কম্পনের পর্যায়কাল যথাক্রমে 0·008, 0·0025 ও 0·00125 s। বায়ুতে এদের শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর। [উঃ 32 ঃ 10 ঃ 5]

৩। তিনটি সুর শলকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে 123, 369 এবং 615 Hz। এরা বায়ুতে যে তরঙ্গ সৃষ্টি করে তাদের দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর। [উঃ 5 ঃ 5 ঃ 3]

৪। একটি সুর শলাকার কম্পাংক 264 Hz। সুর শলাকা হতে 42·5 m দূরে শব্দ যাওয়ার সময় অবকাশে শলাকাটি কতটি কম্পন সম্পন্ন করবে ? [বায়ুতে শব্দের বেগ = 340 ms^{-1}] [উঃ 33 বার]

৫। তরঙ্গাস্থিত একটি কণার 10টি পূর্ণ কম্পনের সময়ে তরঙ্গ কোন মাধ্যমে 7 m দূরত্ব অতিক্রম করে। তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক 480 Hz হলে ঐ মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 336 ms^{-1}.]

৬। তরঙ্গ উৎস যে সময়ে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যক পূর্ণ কম্পন দেয় ঐ সময়ে মাধ্যমের 12 m দূরে অবস্থিত দুটি কণার একটি অপরটি অপেক্ষা 10টি পূর্ণ কম্পন কম দেয়। তরঙ্গ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। মাধ্যমে তরঙ্গের দ্রুতি 360 ms^{-1} হলে, তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $\lambda = 1·2$ m ও $n = 300$ Hz]

৭। 0·65 m ব্যবধানে অবস্থিত তরঙ্গের দুটি কণার মধ্যে দশা পার্থক্য 6·28 rad। মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ 332·8 m^{-1} হলে তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 512 Hz]

৮। দুটি সুর শলাকার কম্পাঙ্কের পার্থক্য 32 Hz। বায়ুতে শলাকা দুটির একটির শব্দ তরঙ্গ 9টি ও অপরটির শব্দ তরঙ্গ 10টি পূর্ণ কম্পন দিয়ে একই দূরত্ব অতিক্রম করলে কম্পাঙ্কদ্বয় নির্ণয় কর। [উঃ 288 Hz ও 320 Hz]

৯। কোন একটি মাধ্যমে 640 Hz এর 480 Hz কম্পাঙ্কের দুটি শব্দ তরঙ্গের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পার্থক্য 1m হলে শব্দের বেগ কত ? [চ. বো. ২০০৪] [উত্তর ঃ 1920 m]

১০। একটি সুর শলাকা A মাধ্যমে 0·1 m ও B মাধ্যমে 0·15 m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট তরঙ্গ উৎপন্ন করে। A মাধ্যমে শব্দের বেগ 3 ms^{-1} হলে B মাধ্যমে শব্দ 6 s-এ কতদূর যাবে নির্ণয় কর। [উঃ 27 m]

১১। বায়ু ও পানিতে 480 Hz কম্পাঙ্কের একটি শব্দ তরঙ্গদৈর্ঘ্যের পার্থক্য 2·4 m। বায়ুতে শব্দের বেগ 348 ms^{-1} হলে পানিতে শব্দের বেগ কত ? [উঃ 1500 ms^{-1}]

১২। বায়ুতে শব্দ প্রবাহে সৃষ্ট তরঙ্গের পরপর দুটি বিপরীত দশাগ্রস্ত কণার মধ্যবর্তী দূরত্ব 0·6 m। তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক 300 Hz হলে বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 360 ms^{-1}]

১৩। একটি শব্দ উৎস হতে সৃষ্ট শব্দ তরঙ্গ উৎসটির 30 বার কম্পনের সময়ে বায়ুতে 24 m দূরত্ব অতিক্রম করে। উৎসটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [বায়ুতে শব্দের বেগ = 332 ms^{-1}] [উঃ 415 Hz]

১৪। 500 s^{-1} কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি তরঙ্গের বেগ কোন মাধ্যমে 350 ms^{-1}। তরঙ্গাস্থিত 60° দশা পার্থক্যে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। কোন বিন্দুতে 10^{-3} s সময়ের ব্যবধানে দুটি সরণের মাঝে দশা পার্থক্য কত হবে ? [উঃ 0·116 m ও π rad]

১৫। একই সরলরেখায় গতিশীল দুটি সাইন সদৃশ তরঙ্গের উভয়ের বিস্তার 0·05 m ও কম্পাঙ্ক 80 Hz। এদের দশা পার্থক্য 60° হলে তরঙ্গ দুটির মিলিত ক্রিয়ার কম্পাঙ্ক ও বিস্তার নির্ণয় কর। [উঃ 80 Hz ও 0·05$\sqrt{3}$ m]

১৬। A মাধ্যমে শব্দের বেগ B মাধ্যমে শব্দের বেগের 5 গুণ। মাধ্যম দুটিতে একটি শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পার্থক্য 4 m। B মাধ্যমে শব্দের বেগ 380 ms^{-1} হলে শব্দ উৎসের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 380 Hz]

১৭। P ও Q দুটি মাধ্যমে শব্দের বেগ যথাক্রমে $300\ ms^{-1}$ ও $340\ ms^{-1}$। মাধ্যম দুটিতে শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের পার্থক্য 0'2m হলে সুরশলাকার 50 কম্পনে শব্দ Q মাধ্যমে কতদূর যাবে ? [কু. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 85m]

১৮। একটি তরঙ্গের দুটি কণা 0'175 m ব্যবধানে অবস্থিত। কণাদ্বয়ের মধ্যে দশা পার্থক্য 1'57 রেডিয়াম। তরঙ্গ উৎসের কম্পাঙ্ক 470 Hz হলে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ $329\ ms^{-1}$]

১৯। গড় হিসাবে শব্দের সর্বনিম্ন উদঘাটিত পিচ হল 20 Hz ও সর্বোচ্চ উদঘাটিত পিচ হল 20000 Hz। বায়ুতে উভয় পিচযুক্ত শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ধর $v = 320\ ms^{-1}$] [উঃ 16 m ও 0'016 m]

২০। 512 Hz কম্পাঙ্কের একটি শব্দ দুটি ভিন্ন পথে চলে আবার এক বিন্দুতে মিলিত হয়ে একই দিকে চলতে থাকে। পথদ্বয়ে তরঙ্গ দুটির অতিক্রান্ত দূরত্বের ব্যবধান ন্যূনতম ·35 m হলে ঐ বিন্দুতে আদৌ কোন শব্দ শোনা যায় না। বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ $358{\cdot}4\ ms^{-1}$]

২১। একটি স্থির তরঙ্গের সমীকরণ $y = 8 \sin \frac{\pi x}{6} \cos 64\pi t$ । এখানে x ও y সেন্টিমিটারে ও t সেকেণ্ডে নির্দিষ্ট। যে দুটি তরঙ্গের মিলিত ক্রিয়ায় স্থির তরঙ্গটি উৎপত্তি হয়েছে তাদের বিস্তার, কম্পাঙ্ক ও বেগ নির্ণয় কর।
[উঃ 0'04 m, 32 Hz ও 3'84 ms^{-1}]

২২। কোন একটি রশিতে সঞ্চারণরত একটি অনুপ্রস্থ তরঙ্গের সমীকরণ, $y = 0{\cdot}1 \sin (2\pi t - \pi x)$, এখানে y ও x মিটারে ও t সেকেণ্ডে প্রকাশিত। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, বেগ ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। কণার সর্বাধিক অনুপ্রস্থ বেগ নির্ণয় কর। [উঃ (i) 0'1 m, (ii) 1 Hz, (iii) 2 ms^{-1} (iv) 2 m, (v) 0'628 ms^{-1}]

২৩। $y = 10 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0{\cdot}02} - \frac{x}{15}\right)$. সমীকরণটি একটি অগ্রগামী তরঙ্গ প্রকাশ করছে। এক্ষেত্রে দৈর্ঘ্যের একক সেণ্টিমিটারে এবং সময়ের একক সেকেণ্ডে দেয়া হয়েছে। এ তরঙ্গের বিস্তার, কম্পাঙ্ক, তরঙ্গদৈর্ঘ্য এবং তরঙ্গ বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 10 cm ; 50 Hz ; 15 cm ; 75 cms^{-1}]

২৪। $y = 10 \sin (140\ \pi t - 0{\cdot}08\ \pi x)$, x ও y এর একক সেণ্টিমিটার ও t-এর একক সেকেণ্ডে হলে ঐ তরঙ্গের দ্রুতি, বিস্তার ও কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 1750 cm s^{-1}, 10 cm, 70 Hz]

২৫। একটি তরঙ্গের পর্যায়কাল T = 0'03 s এবং বিস্তার $A = 5 \times 10^{-3}$ m। তরঙ্গস্থিত কোন কণার গতি সরলছন্দিত গতি হলে 60° দশা পার্থক্যে কণাটির সরণ ও বেগ নির্ণয় কর। [উঃ $4{\cdot}3 \times 10^{-3}$ m ; 0'523 ms^{-1}]

২৬। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0{\cdot}1 \sin \left(20\ \pi t - \frac{20\pi}{17} x\right)$ মিটার হলে তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গ বেগ কত ? [য. বো. ২০০৩] [উঃ 0'1m ; 100 Hz ; 170 ms^{-1}]

২৭। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0{\cdot}5 \sin \pi \left(100t - \frac{x}{3{\cdot}4}\right)$, এখানে সব কয়টি রাশি S. I. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, কম্পাঙ্ক, পর্যায়কাল ও বেগ নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬] [উত্তরঃ 0'5 ; 50 Hz, 0'02s ; 340 ms^{-1}]

২৮। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ হচ্ছে, $y = 0{\cdot}00237 \sin (72{\cdot}1x - 2{\cdot}72\ t)$। এখানে সবকটি রাশি S. I. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, কম্পাঙ্ক, পর্যায়কাল এবং বেগ বের কর।
[উঃ — 0'00237 m ; 0'0871 m ; 0'43 Hz ; 2'31s ; 0'0375 ms^{-1}]

২৯। একটি অগ্রগামী তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0{\cdot}05 \sin (100\pi t - 3{\cdot}14\ x)$; এখানে সবকটি রাশি এস. আই. এককে প্রদত্ত। তরঙ্গটির বিস্তার, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, কম্পাঙ্ক, বেগ ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।
[উঃ 0'05 m ; 2 m ; 50 Hz ; 100 ms^{-1} ; 0'02s]

৩০। একটি তারের উপর উৎপন্ন একটি অনুপ্রস্থ তরঙ্গের সমীকরণ $y = 0{\cdot}5 \sin 2\pi \left(\frac{t}{0{\cdot}5} - \frac{x}{50}\right)$; এখানে x, y সেন্টিমিটারে এবং t সেকেণ্ডে প্রকাশ করা হয়েছে। তরঙ্গটির বিস্তার, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, কম্পাঙ্ক, বেগ ও পর্যায়কাল নির্ণয় কর।
[উঃ 0'5 cm ; 50 cm ; 2 Hz ;100 cms^{-1} ; 0'5s]

১৮ শব্দ SOUND

১৮.১ সূচনা Introduction

আমরা জানি, শব্দ প্রকার শক্তি। এই শক্তি শব্দ উৎস হতে নিঃসৃত হয়ে পারিপার্শ্বিক মাধ্যমের মধ্য দিয়ে তরঙ্গারূপে প্রবাহিত হয়। এই তরঙ্গাগুলো আমাদের কানে শ্রবণানুভূতি জন্মায়। প্রতিদিন আমরা বিভিন্ন ধরনের শব্দ শুনি। এগুলোর কোনটা শ্রুতিমধুর, আবার কতগুলো বিরক্তিকর। বাদ্যযন্ত্রের শব্দ, সুরেলা কণ্ঠের গান শুনতে ভাল লাগে, কিন্তু হাট-বাজার, রেল স্টেশনের কোলাহল, গাড়ির হর্ণ ইত্যাদি বিরক্তিকর মনে হয়। এই অধ্যায়ে সুরযুক্ত শব্দ, অপসুর, শব্দের তীব্রতা, স্বরকম্প, টানা তারে কম্পন, বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্র প্রভৃতি আলোচনা করা হবে।

১৮.২ সুর, স্বর, সমমেল বা হারমোনিক Tone, Note and Harmonics

সুর ঃ একটি মাত্র কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দকে সুর বলে। যেমন একটি সুরশলাকা হতে যে শব্দ নিঃসৃত হয় তা সুর কেননা এর একটিই কম্পাঙ্ক থাকে। শব্দ সৃষ্টিকারী উৎসের সরল ছন্দিত স্পন্দনের জন্য সুর সৃষ্টি হয়।

স্বর ঃ একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দকে স্বর বলে। যেমন বেহালা, ভায়োলিন, হারমোনিয়াম প্রভৃতি বাদ্যযন্ত্র হতে যে শব্দ নিঃসৃত হয় তা স্বর। আমরা যে কথা বলি তাও স্বর, কেননা তা অনেকগুলো কম্পনের সমষ্টি। উৎসের পর্যাবৃত্ত গতির জন্য স্বর সৃষ্টি হয়।

কোন স্বর যে সব সুরের মিশ্রণে উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যকার ন্যূনতম কম্পাঙ্কের সুরকে **মূল সুর** (Fundamental tone) বলে। সুর ছাড়া অন্য সকল সুর যার কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি তাদের **উপসুর** (over tone) বলে।

সমমেল বা হারমোনিক ঃ উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক হলে তাদেরকে সমমেল বা হারমোনিক বলে। যেমন কোন উপসুর মূল সুরের দ্বিগুণ হলে তাকে দ্বিতীয় হারমোনিক, তিনগুণ হলে তৃতীয় হারমোনিক ইত্যাদি বলে। প্রথম হারমোনিক বা মূল সুর ছাড়া সকল সমমেলই উপসুর। সুতরাং, **সকল হারমোনিক উপসুর ; কিন্তু সকল উপসুর হারমোনিক নয়।**

উদাহরণ ঃ কোন বাদ্যযন্ত্র থেকে নিঃসৃত স্বরে 275, 290, 550, 762, 825 কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর আছে। তাহলে 275 কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরকে মূল সুর বলা হয়। বাকিগুলো সবই উপসুর। কিন্তু এদের মধ্যে 550, 825 কম্পাঙ্ক-বিশিষ্ট সুর যথাক্রমে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমমেল বা হারমোনিক; 290, 762 কম্পাঙ্কের সুর দুটি উপসুর ; কিন্তু সমমেল বা হারমোনিক নয়।

কোন স্বরের বেশির ভাগ শক্তি মূল সুরে বর্তমান থাকে, বাকি শক্তি উপসুরগুলোর মধ্যে থাকে। শক্তির এই বণ্টনের উপর স্বরের বৈশিষ্ট্য নির্ভর করে। কোন স্বরে সমমেল উপসুরের সংখ্যা যত বেশি হবে এবং অসমমেল উপসুরের সংখ্যা যত কম হবে, শব্দ তত শ্রুতিমধুর হবে।

১৮·৩ সুরযুক্ত ও সুরবর্জিত শব্দ

Musical sound and noise

আমরা যে শব্দ শুনি তাকে প্রধানত দু'ভাগে ভাগ করা যায়। যথা—

(ক) **সুরযুক্ত শব্দ বা সুশ্রাব্য শব্দ** এবং

(খ) **সুরবর্জিত শব্দ বা কোলাহল।**

(ক) **সুরযুক্ত শব্দ বা সুশ্রাব্য শব্দ ঃ উৎসের কম্পন নিয়মিত বা পর্যাবৃত্ত হলে যে শব্দের সৃষ্টি হয় তাকে সুরযুক্ত বা সুশ্রাব্য শব্দ বলে।** যেমন পিয়ানো, ভায়োলিন, গীটার, বাঁশি ইত্যাদি হতে নির্গত শব্দ সুশ্রাব্য শব্দ।

সুরযুক্ত বা সুশ্রাব্য শব্দ শ্রুতিমধুর। এটা কানে আনন্দের অনুভূতি জন্মায়।

(খ) **সুরবর্জিত শব্দ বা কোলাহল ঃ উৎসের কম্পন অনিয়মিত বা অপর্যাবৃত্ত হলে নিঃসৃত শব্দকে সুরবর্জিত শব্দ বা কোলাহল বলে।** হাট-বাজারের হট্টগোল, মোটর গাড়ির হর্ণ, কল-কারখানার শব্দ ইত্যাদি সুরবর্জিত শব্দ। সুরবর্জিত শব্দ বা কোলাহল বিরক্তিকর ও পীড়াদায়ক।

তবে সুশ্রাব্য শব্দ ও শ্রুতিকটু শব্দের মধ্যে কোন সুস্পষ্ট বিভেদ রেখা টানা যায় না। শ্রোতার আপেক্ষিক পছন্দের দ্বারা সাধারণত এই দুই প্রকার শব্দের পার্থক্য করা যায়। অনেক সময় সুশ্রাব্য শব্দের মধ্যে স্বনকের অনিয়মিত কম্পন পরিলক্ষিত হয়, আবার সুরাবাহিত বা শ্রুতিকটু শব্দের মধ্যেও অনেক সময় স্বনকের নিয়মিত কম্পন লক্ষ, করা যায়। একই শব্দ অবস্থাভেদে কারও নিকট সুশ্রাব্য আবার কারও নিকট কলরব মনে হয়। বর্ষাকালে ভেকের ডাক, বৃষ্টির টাপুর টুপুর শব্দ, ঝরণার পানির শব্দ কলরব হলেও আমাদের নিকট এরা সুশ্রাব্য মনে হয়।

১৮·৪ সুরযুক্ত শব্দের বৈশিষ্ট্য

Characteristics of Musical sound

শব্দের উৎসের কম্পনের পার্থক্যভেদে বিভিন্ন প্রকার শব্দের উৎপত্তি হয়। সুরযুক্ত শব্দের তিনটি প্রধান বৈশিষ্ট্য রয়েছে। যথা—(১) শব্দোচ্চতা ও তীব্রতা বা প্রাবল্য ; (২) তীক্ষ্ণতা এবং (৩) জাতি বা গুণ।

১। শব্দোচ্চতা ও তীব্রতা বা প্রাবল্য (Loudness and Intensity) ঃ

শব্দোচ্চতা ঃ যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা একটি শব্দ অন্য একটি শব্দ হতে কত বেশি জোরালো তা বুঝা যায় তাকে শব্দের শব্দোচ্চতা বলে।

তীব্রতা বা প্রাবল্য ঃ শব্দের গতিপথে লম্বভাবে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারপাশে একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে যে পরিমাণ শক্তি প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তাকে শব্দের তীব্রতা বা প্রাবল্য বলে।

শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার উপর নির্ভরশীল হলেও তা তীব্রতার সমানুপাতিক নয়। শব্দোচ্চতা ব্যক্তির অনুভূতি নির্ভর। একই তীব্রতার শব্দ ভিন্ন ভিন্ন লোকের কাছে ভিন্ন ভিন্ন শব্দোচ্চতার অনুভূতি সৃষ্টি করতে পারে।

শব্দের তীব্রতা বা প্রাবল্যের একক Wm^{-2}।

পূর্বের অধ্যায়ে আমরা তরঙ্গের তীব্রতা I-এর সমীকরণ পেয়েছি, $\boxed{I = 2\pi^2 \rho\, a^2 n^2 v}$, এখানে ρ = মাধ্যমের ঘনত্ব, a = তরঙ্গের বিস্তার, n = কম্পাঙ্ক এবং v = মাধ্যমে তরঙ্গের দ্রুতি। শব্দ অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গ। সুতরাং শব্দের তীব্রতার সমীকরণও একই। উপরের সমীকরণ হতে দেখা যায় যে শব্দের তীব্রতা মাধ্যমের ঘনত্ব, শব্দ তরঙ্গের বিস্তার, কম্পাঙ্ক ও দ্রুতির উপর নির্ভরশীল।

(ক) **মাধ্যমের ঘনত্ব ঃ** শব্দের তীব্রতা মাধ্যমের ঘনত্বের সমানুপাতিক। শব্দের তীব্রতা I এবং মাধ্যমের ঘনত্ব ρ হলে, $I \propto \rho$। মাধ্যম যত ঘন হবে শব্দের তীব্রতাও তত বেশি হবে।

(খ) **উৎসের কম্পন বিস্তার ঃ** শব্দের তীব্রতা শব্দ সৃষ্টিকারী উৎসের কম্পনের বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। তীব্রতা I এবং বিস্তার a হলে, $I \propto a^2$। শব্দ তরঙ্গের বিস্তার বাড়লে শব্দের তীব্রতা বাড়ে। এ কারণে একটি বস্তুকে মৃদু আঘাত করলে ক্ষীণ সুর নির্গত হয়, কিন্তু জোরে আঘাত করলে কম্পনের বিস্তার ও সুরের তীব্রতা বৃদ্ধি পায়।

(গ) **উৎসের কম্পাঙ্ক ঃ** শব্দের তীব্রতা কম্পাঙ্কের বর্গের সমানুপাতিক। তীব্রতা I এবং কম্পাঙ্ক n হলে, $I \propto n^2$। কম্পাঙ্ক বাড়লে শব্দের তীব্রতাও বাড়ে।

(ঘ) **মাধ্যমের দ্রুতি ঃ** কোন মাধ্যমে শব্দের তীব্রতা ঐ মাধ্যমে শব্দের দ্রুতির সমানুপাতিক। যে মাধ্যমে শব্দের দ্রুতি বেশি ঐ মাধ্যমে শব্দের তীব্রতাও বেশি হবে। $E \propto v$

উপরের বিষয়গুলো ছাড়াও শব্দের তীব্রতা উৎসের আকার, উৎস হতে শ্রোতার দূরত্ব, অন্যান্য বস্তুর উপস্থিতি এবং মাধ্যমের গতির উপর নির্ভর করে।

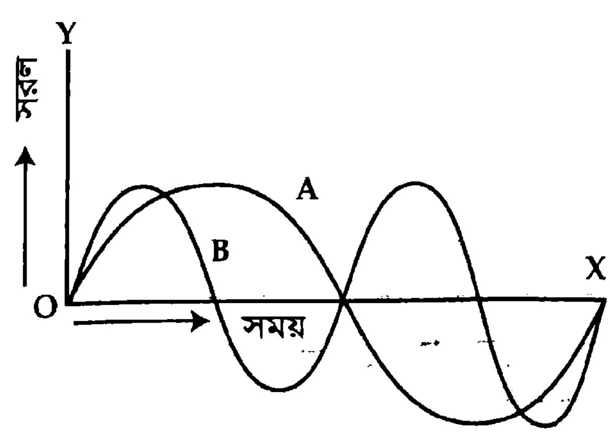
(ঙ) **উৎসের আকার ঃ** শব্দ সৃষ্টিকারী উৎসের আকার বড় হলে শব্দতরঙ্গ বেশি পরিমাণে শক্তি সঞ্চালিত করতে পারে, ফলে শব্দের তীব্রতাও বৃদ্ধি পায়। এ কারণে বড় বড় ঘণ্টার শব্দ বহুদূর থেকে শোনা যায়।

(চ) **উৎস থেকে শ্রোতার দূরত্ব ঃ** শব্দ উৎস হতে গোলীয় তরঙ্গাকারে চতুর্দিকে ছড়িয়ে পড়ে। উৎস হতে শব্দশক্তি যত দূরে যায় শব্দ তত বেশি এলাকায় ছড়িয়ে পড়ে, ফলে একক ক্ষেত্রফলের উপর শব্দ প্রবাহের হার কমে যায়। তীব্রতা দূরত্বের বর্গের ব্যস্তানুপাতিক। তীব্রতা I এবং উৎস হতে শ্রোতার দূরত্ব r হলে, $I \propto \frac{1}{r^2}$। এ জন্য শব্দের উৎস হতে শ্রোতার দূরত্ব যত বৃদ্ধি পাবে শব্দের তীব্রতা তত হ্রাস পাবে।

(ছ) **অন্যান্য বস্তুর উপস্থিতি ঃ** উৎসের কাছাকাছি অনুনাদ ও পরবশ কম্পন সৃষ্টিকারী কোন বস্তু থাকলে শব্দের তীব্রতা বৃদ্ধি পায়। এজন্যই তারের বাদ্যযন্ত্রের তারগুলোকে ফাঁকা কাঠের বাক্সের উপর বসানো হয়। উৎসের নিকটে প্রতিফলক থাকলেও শব্দের তীব্রতা বৃদ্ধি পায়।

(জ) **মাধ্যমের গতি ঃ** মাধ্যমের গতির দিকে শব্দ সঞ্চালিত হলে শব্দের তীব্রতা বৃদ্ধি পায়, বিপরীত দিকে সঞ্চালিত হলে তীব্রতা কমে।

২। তীক্ষ্ণতা (Pitch) ঃ শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন্ সুর চড়া ও কোন্ সুর মোটা তা বুঝা যায় তাকে তীক্ষ্ণতা বলে। হারমোনিয়ামের বাম দিক হতে ডান দিকের সুর ক্রমশ চড়া হয়।



চিত্র ১৮.১

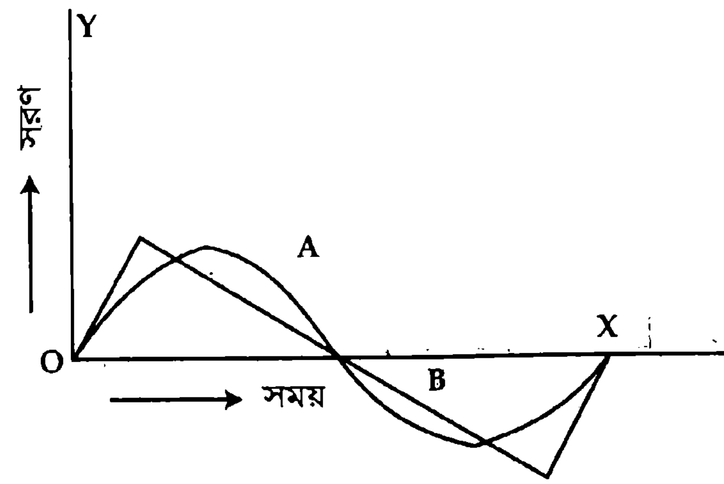
শব্দের তীক্ষ্ণতা শব্দ সৃষ্টিকারী বস্তুর কম্পাঙ্কের উপর নির্ভর করে। কম্পাঙ্ক যত বেশি হবে শব্দের তীক্ষ্ণতা তত বৃদ্ধি পাবে। কাজেই ক্ষুদ্র তরঙ্গ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট শব্দের তীক্ষ্ণতা বেশি ও বড় তরঙ্গ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট শব্দের তীক্ষ্ণতা কম। পুরুষ অপেক্ষা স্ত্রীলোক ও শিশুর কণ্ঠস্বরের কম্পাঙ্ক বেশি হয় বলে তাদের স্বরও চড়া হয়।

দুটি শব্দের মধ্যে তীক্ষ্ণতা ভিন্ন অন্য কোন পার্থক্য না থাকলে তাদের শব্দ তরঙ্গের কম্পাঙ্ক আলাদা হবে, কিন্তু আকার ও বিস্তারের মধ্যে কোন পার্থক্য থাকবে না। ১৮.১ নং চিত্রে তীক্ষ্ণতা ভিন্ন অন্য কোন পার্থক্য নেই এরূপ দুটি শব্দ তরঙ্গের সময়-সরণ রেখা A ও B দেখানো হয়েছে।

৩। জাতি বা গুণ (Quality) ঃ যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি ভিন্ন উৎস হতে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা এক হলেও তাদের একটিকে অন্যটি হতে পৃথক করা যায়, তাকে তার জাতি বলে। এ বৈশিষ্ট্য দ্বারা একই গান বাঁশি ও সেতার হতে বাজালে ঐ গানের শব্দগুলো বাঁশির না সেতারের তা শোনামাত্র বুঝা যায়।

একটি সুরযুক্ত শব্দ যেসব সুরের মিশ্রণে সৃষ্টি হয় তাদের মধ্যে মূল সুরের কম্পাঙ্ক দ্বারা তার তীব্রতার পরিচয় পাওয়া যায় ; কিন্তু ঐ শব্দের জাতির পরিচয় পাওয়া যায়, শব্দে উপস্থিত (i) উপসুরগুলোর সংখ্যা দ্বারা, (ii) মূল সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাত দ্বারা ও (iii) মূল সুরের তীব্রতা ও উপসুরগুলোর তীব্রতার অনুপাত দ্বারা।

কোন একটি সুরযুক্ত শব্দে উপস্থিত উপসুরের প্রভাবে শব্দ তরঙ্গের সময়-সরণ রেখার আকার ও সাথে সাথে জাতি বদলায়। ১৮.২ নং চিত্রে জাতি ভিন্ন অন্য কোন প্রভেদ নেই এরূপ দুটি সুরযুক্ত শব্দ তরঙ্গের সময়-সরণ রেখা A ও B দেখানো হয়েছে।



চিত্র ১৮.২

১৮.৫ সুরযুক্ত শব্দ ও সুরবর্জিত শব্দ বা কোলাহল-এর মধ্যে পার্থক্য

Distinction between musical sound and noise

সুরযুক্ত শব্দ এবং কোলাহলের মধ্যে নিম্নলিখিত পার্থক্য রয়েছে ঃ

সুরযুক্ত শব্দ	কোলাহল
(১) সুরযুক্ত শব্দ শ্রুতিমধুর ও আরামদায়ক।	(১) কোলাহল বা কলরব শ্রুতিকটু ও বিরক্তিকর।
(২) এটি শব্দ উৎসের নিয়মিত এবং পর্যায় কম্পনের ফলে সৃষ্টি হয়।	(২) এটি শব্দ উৎসের অনিয়মিত কম্পনের ফলে সৃষ্টি হয়।
(৩) এর তিনটি বৈশিষ্ট্য রয়েছে।	(৩) এর এরূপ কোন বৈশিষ্ট্য নেই।

১৮.৬ শব্দোচ্চতা, তীব্রতা ও তীব্রতা লেভেল

Loudness, Intensity and Intensity Level

মানুষের কান একটি স্বাভাবিক শব্দগ্রাহক যন্ত্র। উৎস হতে শব্দ তরঙ্গ মাধ্যমের মধ্য দিয়ে সঞ্চালিত হয়ে আমাদের কানের পর্দায় কম্পন সৃষ্টি করে। এই কম্পন সংকেত অনুসারে মস্তিষ্কে অনুভূতি সৃষ্টি করে এবং মস্তিষ্ক শব্দের প্রকৃতি বিশ্লেষণের মাধ্যমে শব্দ জোরালো না ক্ষীণ তা চিহ্নিত করে। মানুষের কান এত সংবেদনশীল (sensitive) যে অতি ক্ষীণ এবং অত্যন্ত জোরালো শব্দ শুনতে পায়। ক্ষীণ এবং জোরালো শব্দের অনুপাত 10^{13}। এই সীমার মধ্যে সৃষ্ট শব্দ আমরা শুনতে পাই।

শব্দোচ্চতা হচ্ছে মূলত কর্ণের অনুভূতি। এটি শারীরবৃত্তীয় বিষয় (physiological phenomenon), ভৌত বিষয় নয়। শব্দোচ্চতা শ্রবণের মাত্রা প্রকাশ করে। শব্দোচ্চতা বলতে শব্দ কতটা জোরে হচ্ছে তা বুঝায়। সুতরাং, শব্দোচ্চতার নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায় ঃ

সংজ্ঞা ঃ যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা একটি শব্দ অন্য একটি শব্দ হতে কত বেশি জোরালো তা বুঝা যায় তাকে শব্দোচ্চতা বলে। লক্ষণীয় যে, শব্দোচ্চতার সংজ্ঞা ব্যক্তি নির্ভর। একই তীব্রতার বিভিন্ন কম্পাঙ্কের শব্দ শ্রোতার কাছে কম-বেশি জোরে মনে হতে পারে। শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতা দ্বারা নির্ধারিত হয়। তীব্রতা যত বাড়ে শব্দোচ্চতা

তত বেশি জোরালো হয়। তবে শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার সাথে সমানুপাতিক হারে বাড়ে না। শব্দোচ্চতা ও শব্দের তীব্রতার সম্পর্ক নিচে আলোচনা করা হল।

তীব্রতা ঃ শব্দের তীব্রতা একটি সুনির্দিষ্ট ভৌত রাশি। তীব্রতার সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ

সংজ্ঞা ঃ শব্দ সঞ্চালনের অভিমুখের সাথে লম্বভাবে স্থাপিত একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে যে পরিমাণ শক্তি প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তাকে তীব্রতা বলে। একে I দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তীব্রতার একক $Js^{-1}\ m^{-2}$ বা Wm^{-2}।

পূর্বে উল্লেখ করা হয়েছে যে শব্দোচ্চতা তীব্রতার সাথে বাড়ে তবে সমানুপাতিক হারে নয়। ওয়েবার ফেচনার (Weber Fechner) সূত্র অনুসারে শব্দোচ্চতা শব্দের তীব্রতার লগারিদম (Logarithm)-এর সমানুপাতিক। এই সূত্রানুসারে শব্দোচ্চতা S এবং শব্দের তীব্রতা I হলে, এদের মধ্যে সম্পর্ক হল,

$$\boxed{\begin{aligned} & S \propto \log_{10} I \\ \text{বা}, \ & S = K \log_{10} I \end{aligned}} \qquad (1)$$

শব্দের তীব্রতার একক Wm^{-2} হলেও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রমাণ তীব্রতার সাপেক্ষে একে পরিমাপ করা হয়। প্রমাণ তীব্রতা কি তা জানা দরকার।

প্রমাণ তীব্রতা (Standard intensity) ঃ 1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের শ্রাব্যতার সীমা $10^{-12}\ Wm^{-2}$ তীব্রতার সমান ধরা হয় এবং একেই প্রমাণ বা আদর্শ তীব্রতা বলে। অর্থাৎ **1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট $10^{-12}\ Wm^{-2}$ তীব্রতাকে প্রমাণ তীব্রতা বলে।** একে I_0 দ্বারা সূচিত করা হয়। I_0 এর সাপেক্ষে সকল তীব্রতা পরিমাপ করা হয়।

তীব্রতা লেভেল ঃ যে কোন শব্দের তীব্রতা এবং আদর্শ বা প্রমাণ তীব্রতার শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে তীব্রতা লেভেল বলে। অন্যভাবে বলা যায়, কোন শব্দের তীব্রতা ও প্রমাণ তীব্রতার অনুপাতের লগারিদমকে ঐ শব্দের তীব্রতা লেভেল বলে। তীব্রতা লেভেলকে ডেসিবেল (dB) এককে প্রকাশ করা হয়।

ব্যাখ্যা ঃ ধরা যাক, দুটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের শব্দের তীব্রতা I ও I_0 এবং শব্দোচ্চতা যথাক্রমে S ও S_0। এখন সমীকরণ (1) হতে পাই

$$S \propto \log_{10} I$$

বা, $$S = K \log_{10} I$$

আবার, $$S_0 \propto \log_{10} I_0$$

বা, $$S_0 = K \log_{10} I_0$$

শব্দোচ্চতার পার্থক্য, $$\beta = S - S_0 = K(\log_{10} I - \log_{10} I_0)$$

$$= K \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad (2)$$

এখানে K হচ্ছে ধ্রুবক। এটি এককের উপর নির্ভর করে। শব্দোচ্চতার পার্থক্য β-কে তীব্রতা লেভেল বলা হয়। এখন I_0 যদি প্রমাণ তীব্রতা হয়, তবে যে কোন শব্দের তীব্রতা লেভেল এবং ঐ প্রমাণ তীব্রতা লগারিদম অনুপাতে নির্দেশিত হবে এবং একক বিহীন হবে।

এখন K = 1 এবং I_0 প্রমাণ তীব্রতা হলে শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে বেল (bels) বলা হয়। টেলিফোনের আবিষ্কারক আলেকজান্ডার গ্রাহাম বেলের নামকরণে এই এককের নামকরণ করা হয়েছে। শব্দোচ্চতার একক বেল খুবই বড় একক, তাই ডেসিবেল ব্যবহার করা হয়। 1 বেলের 1 দশমাংশকে 1 ডেসিবেল (dB) বলা হয়। এই ডেসিবেলই শব্দের তীব্রতার আদর্শ একক।

সমীকরণ (2)-কে ডেসিবেলে লেখা যায়,

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB \qquad (3)$$

যদি, $\beta = 1\,dB$ হয়, তবে

$$1 = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{বা,} \quad \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = \frac{1}{10}$$

$$\frac{I}{I_0} = 1{\cdot}26$$

এর অর্থ হল শব্দের তীব্রতার 26% পরিবর্তনের জন্য তীব্রতার লেভেল 1 dB পরিবর্তিত হয়। উল্লেখ্য, মানুষের কান 1dB এর কম শব্দোচ্চতার পার্থক্য বুঝতে পারে না।

সমীকরণ (3) হতে দেখা যায়—

(i) যখন $I = 100\,I_0$, তখন $\beta = 10\log_{10}(100) = 10\log_{10}10^2 = 20dB$

(ii) যখন $I = 1000\,I_0$, তখন $B = 10\log_{10}(1000) = 10\log_{10}10^3 = 30\,dB$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে দুটি শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্য 20 dB হলে জোরালো শব্দ ক্ষীণ শব্দের চেয়ে 100 গুণ তীব্র বুঝায়। আবার পার্থক্য 30 dB হলে জোরালো শব্দ 1000 গুণ বেশি তীব্র বুঝায়।

এখন $I = I_0$ হলে, সমীকরণ (3) হতে পাই

$$\beta = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 0$$

শব্দোচ্চতার পার্থক্য বা তীব্রতা লেভেল শূন্যকে নিম্নতর প্রান্তীয় সীমা বা শ্রাব্যতার সীমা বলে।

শব্দোচ্চতার সর্বোচ্চ সীমা, $L = 10\log_{10}10^{12} = 120\,dB$। এর চেয়ে বেশি তীব্রতার শব্দ কানে জ্বালা বা অস্বস্তির উদ্রেক করে।

উপরের আলোচনা থেকে বেল ও ডেসিবেলের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

বেল : শব্দের তীব্রতা যখন 10 গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যে পরিমাণ বাড়ে তাকে 1 বেল বলে।

ডেসিবেল : শব্দের তীব্রতা যখন $10^{0.1}$ গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যতটুকু বাড়ে তাকে 1 ডেসিবেল বলে। অন্যভাবে বলা যায়, 1 বেলের দশভাগের এক ভাগকে 1 ডেসিবেল বলে।

কোন শব্দ উৎসের তীব্রতা I_1 হতে I_2-তে পরিবর্তিত হলে তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন হবে,

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = 10\log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) dB \qquad (4)$$

অনুরূপভাবে, শব্দ উৎসের ক্ষমতা P_1 হতে P_2-তে পরিবর্তিত হলে তীব্রতা লেভেল বা ক্ষমতা লেভেলের পরিবর্তন হবে,

$$\Delta\beta = 10\log_{10}(P_2 / P_1)\,dB \qquad (5)$$

1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট প্রমাণ তীব্রতার এক ডেসিবেল-এর একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে ফন বলে। শব্দ প্রাবল্যের আরও একটি একক আছে। এর নাম সোন (Sone)। শ্রোতার শ্রাব্যতার সীমার 40 ডেসিবেল ঊর্ধ্বে 1000 Hz কম্পাঙ্কের একটি বিশুদ্ধ সুর যে প্রাবল্য সৃষ্টি করে তাকে 'সোন' বলে।

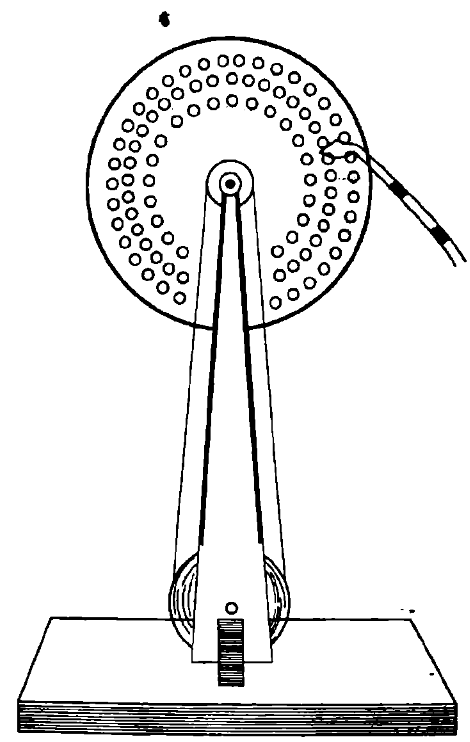
কয়েকটি শব্দের তীব্রতা ও তীব্রতা লেভেল

শব্দ	তীব্রতা, I (Wm^{-2})	আপেক্ষিক তীব্রতা, I/I_0	তীব্রতা লেভেল (db)
সর্বনিম্ন শ্রাব্য শব্দ	1×10^{-12}	10^0	0
পাতার মর্মর শব্দ	1×10^{-11}	10^1	10
ফিসফিসানী	1×10^{-9}	10^3	30
শ্রেণীকক্ষের শব্দ	1×10^{-7}	10^5	50
স্বাভাবিক কথাবার্তা	1×10^{-6}	10^6	60
ব্যস্ততম রাস্তার শব্দ	1×10^{-5}	10^7	70
কারখানার কোলাহল	1×10^{-3}	10^9	90
মাথার উপরের জেট প্লেনের শব্দ	1×10^{-2}	10^{10}	100
তীব্র বজ্রনির্ঘোষের শব্দ	1×10^{-1}	10^{11}	110
কানে বেদনা দানকারী সূচন শব্দ	1×10^{0}	10^{12}	120

১৮·৭ সিবেক-এর সাইরেনের সাহায্যে তীক্ষ্ণতা নির্ণয়
Determination of pitch by Seebeck's siren

গঠন ঃ এতে ধাতব পদার্থ নির্মিত একটি চাক্তি থাকে [চিত্র ১৮·৩]। এ চাক্তিতে বিভিন্ন ব্যাসযুক্ত বৃত্তের পরিধির উপর কতকগুলো ছিদ্র আছে। বৃত্তগুলো চাকতির সাথে সমকেন্দ্রিক এবং যে কোন বৃত্তের ছিদ্রগুলো পরস্পর হতে সমান দূরে অবস্থিত। চাকতিটি তার কেন্দ্রগামী একটি অনুভূমিক দণ্ডের উপর এমনভাবে বসানো থাকে যে তাকে যে কোন বেগে উল্লম্ব সমতলে ঘুরানো যায়। এ ঘূর্ণনের বেগ পরিমাপের জন্য চাকতির সাথে একটি গতিমাপক যন্ত্র থাকে। চাকতিটির সম্মুখে একটি সরু মুখযুক্ত নলও আছে।

কার্যপ্রণালী ঃ চাকতিটিকে একটি নির্দিষ্ট বেগে ঘুরতে দিয়ে নলের মুখ যে কোন একটি ছিদ্রের সম্মুখে ধরে নলের মধ্য দিয়ে জোরে বায়ু প্রবাহিত করলে ঐ বায়ু পর্যায়ক্রমে একবার ছিদ্রের মধ্য দিয়ে বের হয়ে যায় এবং পরক্ষণেই ছিদ্র সরে গেলে বাধা পায়। এভাবে নলের বায়ুপ্রবাহ পর্যায়ক্রমে বাধা প্রাপ্ত ও প্রবাহিত হবার ফলে চাকতির অপর পাশের বায়ু আলোড়িত হয় এবং একটি শব্দের সৃষ্টি হয়। এ শব্দের কম্পাঙ্ক প্রতি সেকেণ্ডে বায়ুতে সৃষ্ট আলোড়নের সংখ্যার সমান। কাজেই চাকতিটিতে m ছিদ্র থাকলে এবং প্রতি সেকেণ্ডে চাকতিটিকে n বার ঘুরালে বায়ুতে প্রতি সেকেণ্ডে সৃষ্ট আলোড়নের সংখ্যা, তথা নির্গত শব্দের কম্পাঙ্ক, $N = m \times n$ । এই সমীকরণ অনুসারে ঃ



চিত্র ১৮·৩

(১) চাকতিটিকে জোরে ঘুরালে n এবং সাথে সাথে সৃষ্ট শব্দের কম্পাঙ্ক ও তীক্ষ্ণতা বৃদ্ধি পাবে।

(২) নলের সরু মুখ যতই বাইরের ছিদ্র চক্র হতে ভিতরের ছিদ্র চক্রের দিকে সরানো যাবে, শব্দের কম্পাঙ্ক তথা তীক্ষ্ণতা তত হ্রাস পাবে, কেননা এতে m কম হবে।

সাইরেনে কোন শব্দের তীক্ষ্ণতা N নির্ণয় করতে হলে সাইরেনটিকে এমন একটি বেগে ঘুরাতে হবে যাতে সাইরেন কর্তৃক নিঃসৃত শব্দ ও পরীক্ষাধীন শব্দের তীক্ষ্ণতা সমান হয় অর্থাৎ শব্দ দুটি মিশে যায়। এ অবস্থায় ব্যবহৃত মোট ছিদ্রের সংখ্যা m এবং গতিমাপক যন্ত্রে চাকতির প্রতি সেকেণ্ডের আবর্তন সংখ্যা n হলে পরীক্ষাধীন শব্দের কম্পাঙ্ক, $N = m \times n$। অনুরূপভাবে বিভিন্ন শব্দের কম্পাঙ্ক পর পর নির্ণয় করে তাদের কম্পাঙ্ক বা তীক্ষ্ণতার অনুপাত নির্ণয় করা যাবে।

১৮·৮ বীট বা স্বরকম্প
Beats

সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা ও প্রায় সমান কম্পাঙ্কের দুটি শব্দ তরঙ্গ একসঙ্গে উৎপন্ন করলে দেখা যাবে যে, শব্দ একটানা হচ্ছে না—একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর একবার বাড়ছে ও একবার কমছে। শব্দের তীব্রতার এরূপ পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিকে **স্বরকম্প** বলে। **প্রতি সেকেণ্ডে শব্দের তীব্রতার পর্যায়ক্রমিক হ্রাস বা বৃদ্ধির দ্বারা স্বরকম্পের সংখ্যা (বা কম্পাঙ্ক) নির্ণয় করা হয়।**

সংজ্ঞা ঃ সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একই দিকে অগ্রগামী দুটি শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের হ্রাস-বৃদ্ধির ঘটনাকে স্বরকম্প বা বীট বলে।

ব্যাখ্যা ঃ সমান কম্পাঙ্কের দুটি সুর শালাকা লই এবং তাদেরকে খাড়াভাবে একটি ফাঁপা বাক্সের উপর পাশাপাশি স্থাপন করি। এখন সুর শলাকা দুটির একটিকে একবার এবং অপরটিকে আর একবার একটি রবারের প্যাডযুক্ত হাতুড়িতে আঘাত করি। দেখা যাবে তারা প্রায় একই রকম একটানা শব্দ উৎপন্ন করছে। এবার সুর শলাকা

দুটিকে একই সাথে আঘাত করলে দেখা যাবে এখনও তারা একটানা শব্দ উৎপন্ন করছে ; কিন্তু শব্দের তীব্রতা অনেকখানি বৃদ্ধি পাচ্ছে। এখন একটি সুর শলাকার এক বাহুতে কিছুটা মোম লাগিয়ে একে ভারী করি। এর কম্পাঙ্ক কিছুটা কমে যাবে এবং সুর শলাকা দুটির কম্পাঙ্কের মধ্যে কিছুটা পার্থক্য সৃষ্টি হবে। এ অবস্থায় সুর শলাকা দুটিকে একই সাথে আঘাত করে শব্দ উৎপন্ন করলে একটানা শব্দ শোনা যাবে না। শব্দ পর্যায়ক্রমে জোরে এবং ধীরে ধীরে শোনা যাবে। কাছাকাছি ভিন্ন কম্পাঙ্কের দুটি সুর শলাকা হতে উৎপন্ন শব্দ প্রাবল্যের এ রকম হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটবে। শব্দ তীব্রতার এ রকম হ্রাস-বৃদ্ধির নাম বীট বা স্বরকম্প এবং শব্দ তীব্রতার একটি বৃদ্ধি এবং একটি হ্রাস নিয়ে একটি বীট সৃষ্টি হয়।

দুটি শব্দ উৎসের ক্রিয়ায় প্রতি সেকেণ্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়—এটি বলতে কি বুঝ ?

এটি বলতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো বুঝা যায় ঃ

১। উৎসদ্বয়ের ক্রিয়ায় শব্দের তীব্রতা প্রতি সেকেণ্ডে 5 বার হ্রাস-বৃদ্ধি হয়।

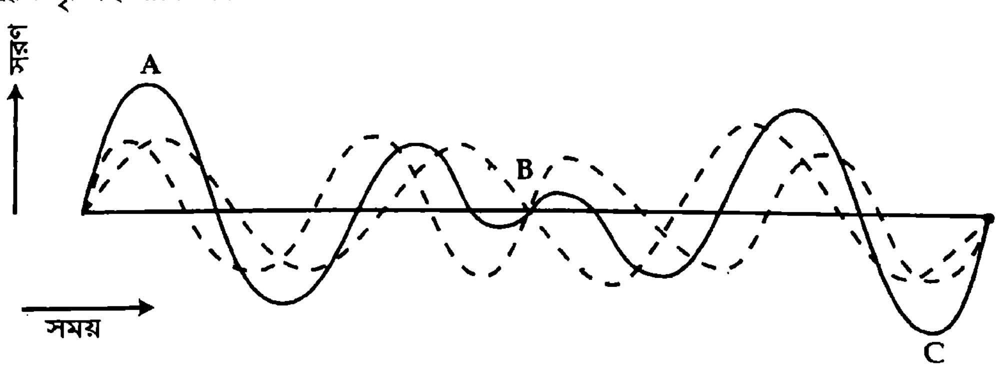
২। উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্য $N = 5$ Hz

৩। উৎসদ্বয় হতে আগত শব্দ কোন বিন্দুতে বা কানে প্রতি সেকেণ্ডে 5 বার সমদশায় ও 5 বার বিপরীত দশায় মিলিত হয়।

৪। পর পর একটি সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন তীব্রতার মধ্যে সময়ের ব্যবধান $= \frac{1}{2n} = 0{\cdot}1$ সেকেণ্ড।

১৮·৯ বীট বা স্বরকম্প গঠনের কৌশল
Mechanism of formation of beats

প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি শব্দ তরঙ্গ মাধ্যমের কোন একটি কণার উপর মিলিত হবার পর তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় এবং কোন এক মুহূর্তে কণাটির উপর তরঙ্গ সমদশায় আবার পরবর্তী মুহূর্তে তরঙ্গদ্বয় বিপরীত দশায় ক্রিয়া করে। এজন্য তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত ক্রিয়ায় একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর কণাটির সরণ তথা শব্দের তীব্রতা একবার সবচেয়ে বেশি হয় এবং আর একবার সবচেয়ে কম হয়। শব্দের তীব্রতার এই পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিই স্বরকম্প।



চিত্র ১৮·৪

প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট দুটি সুর শলাকা লই। তাদেরকে আঘাত করে শব্দ তরঙ্গ উৎপন্ন করি। এ তরঙ্গ দুটি মাধ্যমের মধ্য দিয়ে চলতে থাকবে। এতে মাধ্যমের এক বিন্দুতে শব্দ তরঙ্গ দুটি কোন এক সময় সমদশায় এবং পরবর্তী অপর এক সময় বিপরীত দশায় মিলিত হবে। ১৮·৪ নং চিত্রে A বিন্দুতে দুটি শব্দ তরঙ্গ একই দশায় মিলিত হওয়ায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের যোগফলের সমান হবে। ফলে লব্ধি শব্দের তীব্রতা বেশি হবে। এখানে তরঙ্গ দুটিকে সরু রেখা এবং লব্ধি শব্দ তরঙ্গকে অবিচ্ছিন্ন মোটা রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে।

যতই সময় অতিবাহিত হবে ততই একটি তরঙ্গ অপরটিকে অতিক্রম করার চেষ্টা করবে। B বিন্দুতে তরঙ্গ দুটি বিপরীত দশায় থাকায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের বিয়োগফলের সমান হবে। অতএব লব্ধি শব্দের তীব্রতা কম হবে। পুনরায় C বিন্দুতে তরঙ্গ দুটি একই দশায় থাকায় লব্ধি শব্দের বিস্তার তরঙ্গ দুটির বিস্তারের যোগফলের সমান হবে। ফলে লব্ধি শব্দের তীব্রতা অধিক হবে। এভাবে লব্ধি শব্দের তীব্রতার পর্যায়ক্রমে হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটবে। **প্রতি সেকেণ্ডে শব্দের পর্যায়ক্রমে হ্রাস বা বৃদ্ধি দ্বারা স্বরকম্পের সংখ্যা নির্ণীত হবে।**

১৮·১০ বীট বা স্বরকম্পের গাণিতিক বিশ্লেষণ
Mathematical analysis of beat

ধরা যাক দুটি শব্দায়িত সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2 $(n_1 > n_2)$ এবং কম্পাঙ্ক দুটির পার্থক্য খুব বেশি নয়। আরও ধরা যাক শলাকা দুটি হতে আগত শব্দ তরঙ্গ মাধ্যমের কোন একটি কণার উপর সমদশায় আপতিত হবার t সেকেন্ড পরে তরঙ্গ দুটির দরুন কণাটির পৃথক সরণ যথাক্রমে,

$$y_1 = a \sin 2\pi n_1 t \qquad (4)$$

ও $$y_2 = b \sin 2\pi n_2 t \qquad (5)$$

উপরিপাতনের নীতি অনুসারে লব্ধি সরণ,

$$y = y_1 + y_2 = a \sin 2\pi n_1 t + b \sin 2\pi n_2 t \qquad (6)$$

যদি তরঙ্গ দুটির বিস্তার সমান অর্থাৎ $a = b$ হয়, তবে

$$y = a(\sin 2\pi n_1 t + \sin 2\pi n_2 t)$$
$$= 2a \sin \left\{2\pi\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)t\right\} \cos 2\pi \frac{(n_1 - n_2)}{2} t$$
$$= \left[2a \cos 2\pi \frac{(n_1 - n_2)t}{2}\right] \sin 2\pi \left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right) t$$

ধরা যাক, $A = 2a \cos 2\pi \frac{(n_1 - n_2)t}{2}$ এবং $M = (n_1 + n_2)/2$

$$y = A \sin 2\pi M t \qquad (7)$$

এটি সমীকরণ (4) ও (5)-এর ন্যায় লব্ধি তরঙ্গের সমীকরণ। এর কম্পাঙ্ক M ও বিস্তার A। এই বিস্তার সময় ভেদে বিভিন্ন হবে। কারণ, শব্দ তরঙ্গ দুটি কোন একটি কণার উপর মিলিত হলে তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়। কোন এক মুহূর্তে কণাটির উপর তরঙ্গদ্বয় সমদশায় আবার পরবর্তী মুহূর্তে বিপরীত দশায় ক্রিয়া করে। এতে তরঙ্গদ্বয়ের মিলিত ক্রিয়ায় একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর কণাটির সরণ তথা শব্দের তীব্রতা একবার সবচেয়ে বেশি হয় এবং আর একবার সবচেয়ে কম হয়। শব্দের এ পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধিতে স্বরকম্পের উৎপত্তি হয়। যেমন—

$t = 0$, $\left(\frac{1}{n_1 - n_2}\right)$, $\left(\frac{2}{n_1 - n_2}\right)$, $\left(\frac{3}{n_1 - n_2}\right)$ ইত্যাদি হলে,

$A = 2a, -2a, 2a, -2a$ ইত্যাদি হবে।

সুতরাং এসব মুহূর্তে বিস্তার সর্বাধিক হবে এবং শব্দ সবচেয়ে জোরে শোনা যেতে পারে। কেননা শব্দের তীব্রতা বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

আবার, $t = \frac{1}{2(n_1 - n_2)}$ $\frac{3}{2(n_1 - n_2)}$, $\frac{5}{2(n_1 - n_2)}$ ইত্যাদি হলে, $A = 0$ হবে। সুতরাং এসব মুহূর্তে কোন শব্দ শোনা যাবে না। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, পর পর দুটি প্রবল শব্দ বা নিঃশব্দের মধ্যে সময়ের ব্যবধান $T = \frac{1}{(n_1 - n_2)}$ এবং এটিই শব্দের হ্রাস বা বৃদ্ধির তথা স্বরকম্পের পর্যায়কাল।

1 সেকেন্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা বা কম্পাঙ্ক = $\frac{1}{T} = (n_1 - n_2)$ = শব্দ দুটির কম্পাঙ্কের পার্থক্য।

সাধারণভাবে লেখা যায়, $N = (n_1 \sim n_2)$

এ সমীকরণ অনুযায়ী বীটের একক হবে "/ সেকেন্ড" বা "সেকেন্ড$^{-1}$"

বীট উৎপত্তির শর্ত ঃ

১। বীট সৃষ্টিকারী শব্দ তরঙ্গ দুটি একই সময়ে উৎপন্ন হতে হবে।

২। তরঙ্গ দুটির কম্পাঙ্ক ও তীব্রতা প্রায় সমান হতে হবে।

৩। তরঙ্গ দুটির দরুন মাধ্যমের কোন একটি কণার সরণ একই রেখায় হতে হবে।

৪। মাধ্যমের কোন একটি কণার উপর তরঙ্গ দুটি মিলিত হবার পর তাদের মধ্যে দশা বৈষম্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

৫। তরঙ্গ দুটির মিলিত ক্রিয়ার বিস্তার সময়ের সাথে পরিবর্তিত হবে।

১৮·১১ বীট বা স্বরকম্পের প্রয়োগ
Applications of beat

স্বরকম্পের তিনটি প্রয়োগ আছে ; যথা—

(১) স্বরকম্পের সাহায্যে সুর শলাকার অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

(২) স্বরকম্পের সাহায্যে খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় করা যায়।

(৩) বাদ্যযন্ত্রাদির সুর নির্ণয় করা যায়।

(১) অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় ঃ অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য দুটি সুর শলাকা লই। তাদের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 এবং n_2। এদের পার্থক্য সামান্য। n_2 জানা কম্পাঙ্ক। n_1 অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক। তা নির্ণয় করতে হবে।

সুর শলাকা দুটিকে একই সঙ্গে আঘাত করে টেবিলের উপর ধরি। স্বরকম্প সৃষ্টি হলে প্রতি সেকেণ্ডের স্বরকম্পের সংখ্যা গণনা করি।

মনে করি প্রতি সেকেণ্ডে স্বরকম্পের সংখ্যা = N

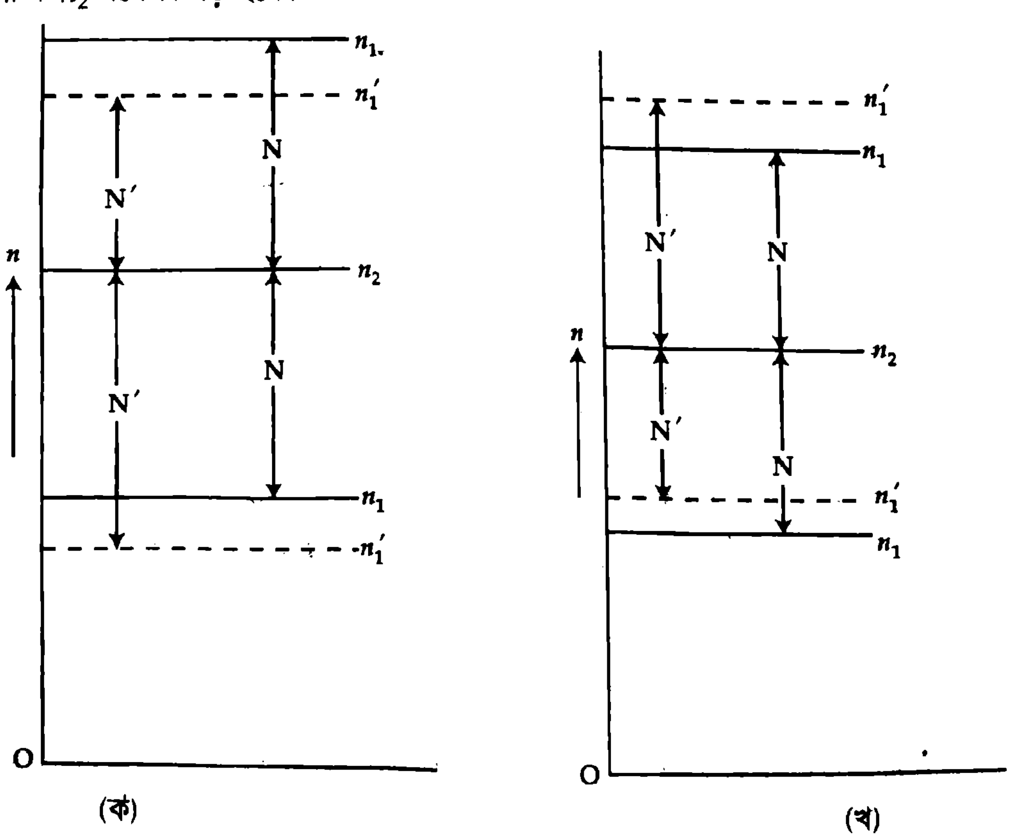
আমরা পাই, $N = n_1 \sim n_2$

এখন অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক n_1 জানা কম্পাঙ্ক n_2 অপেক্ষা বড় বা ছোট হতে পারে।

এবার পরীক্ষাধীন সুর শলাকা অর্থাৎ অজ্ঞাত কম্পাংকের সুর শলাকার গায়ে মোম লাগিয়ে শলাকা দুটিকে একত্রে শব্দায়িত করি এবং প্রতি সেকেণ্ডের স্বরকম্পের সংখ্যা গণনা করি। ধরি বর্তমানে প্রতি সেকেণ্ডে সৃষ্ট স্বরকম্পের সংখ্যা N′ [চিত্র ১৮·৫]। মোম লাগাবার ফলে সুর শলাকাটির ভার বাড়বে, ফলে তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক কমবে। ধরি তার বর্তমান কম্পাঙ্ক n_1'। এই পরীক্ষায় স্বরকম্পের সংখ্যা বাড়লে অর্থাৎ $N' > N$ হলে বুঝতে হবে যে, তাদের কম্পাঙ্কের পার্থক্য বৃদ্ধি পেয়েছে। অতএব অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক n_1 জানা কম্পাঙ্ক n_2 অপেক্ষা কম হবে।

অর্থাৎ, $N = n_2 - n_1$ বা, $n_1 = n_2 - N$

আবার স্বরকম্পের সংখ্যা কমলে অর্থাৎ $N' < N$ হলে বা স্বরকম্পের সংখ্যা পূর্বের সমান হলে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক n_1 জানা কম্পাঙ্ক n_2 অপেক্ষা বড় হবে।



চিত্র ১৮·৫

অর্থাৎ, $N = n_1 - n_2$

বা, $n_1 = n_2 + N$

সিদ্ধান্ত ঃ অজ্ঞাত কম্পাঙ্কের সুর শলাকায় ভর যুক্ত করলে যদি স্বরকম্পের সংখ্যা বৃদ্ধি পায় তবে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক অপেক্ষা ছোট হবে অর্থাৎ জানা কম্পাঙ্ক বড় ও অজানা কম্পাঙ্ক ছোট এবং স্বরকম্পের সংখ্যা হ্রাস পেলে বা পূর্বের সমান হলে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক অপেক্ষা বড় হবে।

এভাবে স্বরকম্প গণনা করে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।

পুনরায়, অজ্ঞাত কম্পাঙ্কের সুর শলাকাকে ঘষে ভর কমিয়ে তাদের একত্রে শব্দায়িত করি ও প্রতি সেকেন্ডে সৃষ্ট স্বরকম্পের সংখ্যা গণনা করি। ধরি বর্তমানে সৃষ্ট স্বরকম্পের সংখ্যা N′ [চিত্র ১৮.৫]। সুর শলাকাটির ভর কমালে তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায়। ধরি তার বর্তমান কম্পাঙ্ক n_1'। ভর কমানোর ফলে যদি স্বরকম্পের সংখ্যা বৃদ্ধি পায় অর্থাৎ $N' > N$ হয়, তবে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক n_1 জানা কম্পাঙ্ক n_2 অপেক্ষা বড় হবে,

অর্থাৎ, $N = n_1 - n_2$

বা, $n_1 = n_2 + N$

কিন্তু স্বরকম্পের সংখ্যা কমলে অর্থাৎ, $N' < N$ হলে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক n_1 জানা কম্পাঙ্ক n_2 অপেক্ষা ছোট হবে।

অর্থাৎ, $N = n_2 - n_1$

বা, $n_1 = n_2 - N$

সিদ্ধান্ত ঃ অজ্ঞাত কম্পাঙ্কের সুর শলাকা হালকা করলে যদি স্বরকম্পের সংখ্যা বৃদ্ধি পায় তবে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক অপেক্ষা বড় হবে এবং স্বরকম্পের সংখ্যা হ্রাস পেলে অথবা পূর্বের সমান থাকলে অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক জানা কম্পাঙ্ক অপেক্ষা ছোট হবে।

[বিঃ দ্রঃ দুটি কম্পমান বস্তুর কম্পাঙ্কের পার্থক্য 10-এর অধিক হলে স্বরকম্প গণনা করা সম্ভব হবে না।]

২। **খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় ঃ** খনিতে দূষিত বাতাসের অস্তিত্ব নির্ণয় করতে গিয়ে দুটি অভিন্ন প্রকৃতির অর্গান নল লই। একটি অর্গান নলে খনির বাতাস এবং অপরটিতে বিশুদ্ধ বাতাস নিয়ে নল দুটিতে একই সঙ্গে শব্দ উৎপন্ন করি। খনির বাতাস বিশুদ্ধ না হলে নল দুটিতে সৃষ্ট শব্দের কম্পাঙ্কের প্রভেদ থাকবে। ফলে স্বরকম্পের সৃষ্টি হবে। কিন্তু খনির বাতাস বিশুদ্ধ হলে কম্পাঙ্কের প্রভেদ থাকবে না। ফলে স্বরকম্প শোনা যাবে না।

সিদ্ধান্ত ঃ স্বরকম্পের সৃষ্টি হলে বুঝতে হবে যে, খনির বাতাস দূষিত।

৩। **বাদ্যযন্ত্রাদির সুর নির্ণয় ঃ** দুটি বাদ্যযন্ত্রকে এক সুরে আনতে হলে তাদেরকে একই সঙ্গে বাজিয়ে স্বরকম্পের উপস্থিতি লক্ষ করতে হয়। সুর মিললে স্বরকম্প আর শোনা যাবে না। এমনিভাবে বীটের সাহায্যে বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্রের সুর মিলানো এবং নির্ণয় করা যায়।

১৮.১২ বীট ও ব্যতিচারের পার্থক্য

বীট	ব্যতিচার
১। সমান বা প্রায় সমান তীব্রতা এবং প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একই দিকে অগ্রগামী দুটি শব্দতরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের পর্যায়ক্রমিক হ্রাস-বৃদ্ধির ঘটনাকে বীট বলে।	১। সমান কম্পাঙ্ক ও বিস্তারের দুটি শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতনের দরুণ নীরব বা জোরালো শব্দের সৃষ্টি হলে ঐ ঘটনাকে ব্যতিচার বলে।
২। বীটের ক্ষেত্রে কোন বিন্দুতে তরঙ্গ দুটির মধ্যে দশা পার্থক্য সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়।	২। ব্যতিচারের ক্ষেত্রে কোন বিন্দুতে তরঙ্গ দুটির মধ্যে দশা পার্থক্য সর্বদা ধ্রুব থাকে।
৩। শব্দের তীব্রতা সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয়।	৩। শব্দের তীব্রতা সময়ের সাথে অপরিবর্তিত থাকে।
৪। লব্ধি তরঙ্গের কম্পাঙ্ক বীট উৎপন্নকারী তরঙ্গদ্বয়ের গড় কম্পাঙ্কের সমান।	৪। লব্ধি তরঙ্গের কম্পাঙ্ক ব্যতিচার উৎপন্নকারী তরঙ্গদ্বয়ের উভয়েরই কম্পাঙ্কের সমান।

১৮.১৩ তারের কম্পন
Vibrations of string

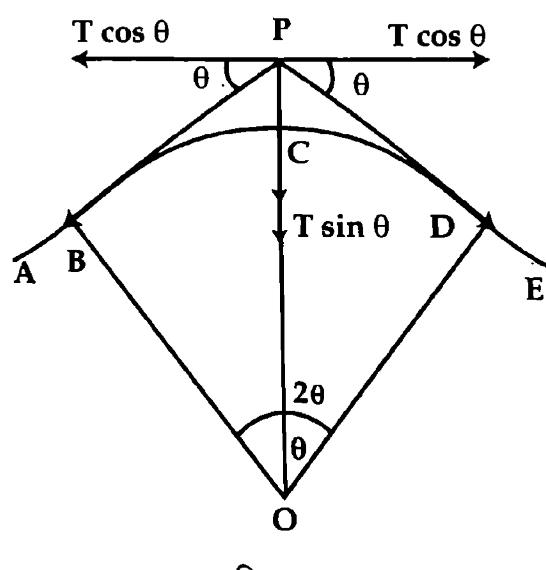
শব্দবিজ্ঞানে তারের কম্পন বলতে একটি সুষম, নমনীয় ও সরু তারের কম্পন বুঝায়। এই ধরনের একটি তারে আড় অথবা লম্বিক তরঙ্গ উৎপন্ন করা যায়। একটি টানা তারের দুই প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আবদ্ধ করে দৈর্ঘ্যের সমকোণে টেনে ছেড়ে দিলে অথবা দৈর্ঘ্যের আড়াআড়ি আঘাত করলে তারে আড় কম্পন সৃষ্টি হবে। আবার, তারের দৈর্ঘ্য বরাবর ফ্লানেল অথবা রজনমাখা কাপড় দ্বারা ঘর্ষণ করলে তারে লম্বিক তরঙ্গ সৃষ্টি হবে।

একটি টানা তারে আড় কম্পন সৃষ্টি করলে ঐ কম্পন তারের দুই প্রান্তের দিকে একটি নির্দিষ্ট বেগে প্রবাহিত হয় এবং উভয় প্রান্ত হতে প্রতিফলিত হয়ে ফিরে আসে। তারে সৃষ্ট নতুন তরঙ্গ এবং প্রান্ত হতে প্রতিফলিত হয়ে ফিরে আসা তরঙ্গ মিলে তারে আড় স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি করে যা তারের মধ্যেই সীমাবদ্ধ থাকে। বিভিন্ন বাদ্যযন্ত্রে তারের এই ধরনের কম্পন কাজে লাগান হয়। সেতার, এস্রাজ, গীটার, পিয়ানো ইত্যাদি বাদ্যযন্ত্রে তারের কম্পন কাজে লাগিয়ে শ্রুতিমধুর শব্দ উৎপন্ন করা হয়।

১৮.১৪ টানা তারে আড় বা অনুপ্রস্থ তরঙ্গের বেগের রাশিমালা
Equation of velocity of transverse wave in a stretched string

মনে করি T টানে টান করা একটি তার আছে। তারটির যে কোন বিন্দুতে এর দৈর্ঘ্যের অভিলম্বভাবে টেনে ছেড়ে দিলে তার বরাবর একটি আড় তরঙ্গ সৃষ্টি হবে। এই তরঙ্গ একটি নির্দিষ্ট বেগে তার বেয়ে চলতে থাকে। এই বেগের মান তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর ও তারের উপর প্রযুক্ত টানের উপর নির্ভর করে।

মনে করি আড় তরঙ্গ v বেগে AE তার বেয়ে বাম থেকে ডান দিকে চলছে। AE তারের বিচ্যুতি অংশের শীর্ষ BCD একটি বৃত্তচাপের আকার ধারণ করবে [চিত্র ১৮.৬]। ধরা যাক, চাপটির মধ্যবিন্দু C, চাপটির ব্যাসার্ধ r এবং চাপটি বক্রতার কেন্দ্রে 2θ কোণ উৎপন্ন করেছে। তারের শীর্ষবিন্দু C-এ বৃত্তাকার গতির জন্য প্রয়োজনীয় কেন্দ্রমুখী বল তরঙ্গের দু'প্রান্ত B এবং D-তে বিপরীতমুখী দুটি ক্রিয়াশীল টানা বল T থেকে পাওয়া যায়। এখন B ও D বিন্দুতে দুটি স্পর্শক টানা হয় এবং স্পর্শকদ্বয়কে বর্ধিত করলে এরা P বিন্দুতে মিলিত হয়। এই বিন্দুতে টান বল T-কে অনুভূমিক ও উল্লম্ব উপাংশে বিভক্ত করলে দেখা যায় যে অনুভূমিক উপাংশদ্বয়ের প্রত্যেকটির মান $T\cos\theta$; কিন্তু এদের দিক পরস্পর বিপরীত মুখী হওয়ায় একে অপরকে নাকচ করবে। PO বরাবর ক্রিয়াশীল প্রত্যেক উল্লম্ব উপাংশের মান $T\sin\theta$ এবং এদের দিক একই হওয়ায় মোট কার্যকর বল হবে $2T\sin\theta$।



চিত্র ১৮.৬

PO বরাবর মোট কার্যকর বল $= 2T\sin\theta$

θ-এর মান ক্ষুদ্র বলে $\sin\theta = \theta$

সুতরাং মোট কার্যকর বল $= 2T\theta$

$$= 2T\frac{\delta l}{2r} \qquad \left[\; 2\theta = \frac{\text{চাপ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \frac{\delta l}{r} \quad \therefore \theta = \frac{\delta l}{2r} \;\right]$$

$$= \frac{T\,\delta l}{r} \qquad (৪)$$

এখানে, δl = চাপ BCD-এর দৈর্ঘ্য।

এই বল কেন্দ্রমুখী ত্বরণ সৃষ্টি করবে এবং কেন্দ্রমুখী ত্বরণ $f = \frac{\text{বেগের বর্গ}}{\text{ব্যাসার্ধ}} = \frac{v^2}{r}$

$$\text{কেন্দ্রমুখী বল} = m.\frac{\delta l\, v^2}{r} \qquad (9)$$

সমীকরণ (8) ও (9) হতে পাই,

$$\frac{T\,\delta l}{r} = m.\frac{\delta l\, v^2}{r}$$

বা, $mv^2 = T$

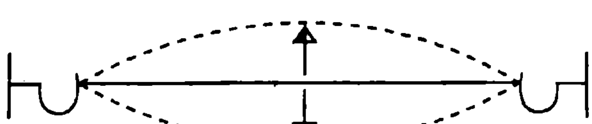
বা, $v^2 = \frac{T}{m}$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{m}}} \qquad (10)$$

এটি হল টানা তারে আড় তরঙ্গের বেগের রাশিমালা।

১৮·১৫ টানা তারে আড় কম্পনের সূত্র প্রতিপাদন
Deduction of laws of transverse vibration of a stretched string

টানা অবস্থায় দুই প্রান্ত দৃঢ়ভাবে আটকানো তারকে টানা তার বলে [চিত্র ১৮·৭]। টানা তারে আড় কম্পনের সৃষ্টি করলে তারটি ঢেউয়ের আকার ধারণ করে। তারে আড় তরঙ্গের বেগ দুটি শর্তের উপর নির্ভর করে—একটি তারের টান এবং অপরটি তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর। তাত্ত্বিকভাবে এ পরীক্ষার সাহায্যে প্রমাণিত হয়েছে যে, আড় তরঙ্গের বেগ তারে প্রযুক্ত টানের বর্গমূলের সমানুপাতিক এবং তারের একক দৈর্ঘ্যের ভরের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক অর্থাৎ



চিত্র ১৮·৭

$v = \sqrt{\frac{T}{m}}$; এখানে T = তারে প্রযুক্ত টান এবং m = তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর। কিন্তু $v = n\lambda$

$$n\lambda = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

আড় তরঙ্গ প্রবাহে যখন একটি টানা তারের সমগ্র দৈর্ঘ্য একযোগে উঠা-নামা করে, অর্থাৎ তার যখন মূলসুরে কাঁপে, তখন $\lambda = 2l$

$$n \times 2l = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

বা, $n = \frac{1}{2l}\sqrt{T/m}$ (11)

বা, $n = \frac{k}{l}\sqrt{T/m}$ [এখানে, $k = \frac{1}{2}$ = ধ্রুব সংখ্যা]

$$\boxed{\text{বা, } n \propto \frac{1}{l}\sqrt{\frac{T}{m}}} \qquad (12)$$

উক্ত সমীকরণ হতে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্কের জন্য **তিনটি সূত্র** পাওয়া যায়। **সূত্রগুলোকে টানা তারের আড় কম্পনের সূত্র বলে।**

যদি তারের উপাদানের ঘনত্ব ρ এবং ব্যাসার্ধ r হয়, তবে $m = \pi r^2\rho$; অতএব সমীকরণ (11) হতে পাই,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\pi r^2\rho}} = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \qquad (13)$$

১৮-১৬ টানা তারে আড় কম্পনের সূত্রাবলি
Laws of transverse vibration of a stretched string

আমরা জানি আড় তরঙ্গ প্রবাহের ক্ষেত্রে,

$$\boxed{n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}}} \qquad (14)$$

উপরের সমীকরণগুলো হতে দেখা যাচ্ছে যে, তারের আড় কম্পনের কম্পাঙ্ক n মূলত তারের দৈর্ঘ্য l, টান T এবং প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m-এর উপর নির্ভর করে। অতএব টানা তারের আড় কম্পনের **তিনটি** সূত্র পাওয়া যায়।

সূত্রগুলো নিম্নে বর্ণিত হল ঃ

(১) দৈর্ঘ্যের সূত্র ঃ T ও m স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তার দৈর্ঘ্যের ব্যস্তানুপাতিক।

কম্পাঙ্ক n এবং দৈর্ঘ্য l হলে, $n \propto \frac{1}{l}$ যখন T ও m স্থির থাকে।

(২) টানের সূত্র ঃ l ও m স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তার টানের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

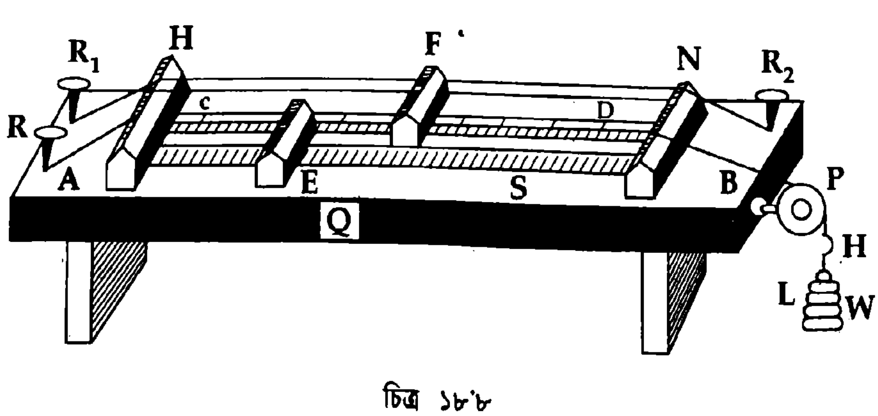
কম্পাঙ্ক n এবং টান T হলে, $n \propto \sqrt{T}$; যখন l ও m স্থির থাকে।

(৩) ভরের সূত্র ঃ T ও l স্থির থাকলে টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পাঙ্ক তারের একক দৈর্ঘ্যের ভরের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

কম্পাঙ্ক n এবং তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর m হলে, $n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$; যখন T ও l স্থির থাকে।

১৮-১৭ সনোমিটার
Sonometer

এ যন্ত্রে প্রায় এক মিটার লম্বা একটি ফাঁপা কাঠের বাক্স Q-এর উপর পাশাপাশি দুটি তার AB ও CD থাকে [চিত্র ১৮'৮]। এখানে AB পরীক্ষামূলক তার এবং CD সাহায্যকারী বা উপমা তার। AB তারের এক প্রান্ত একটি খুঁটি R-এর সাথে আটকানো থাকে এবং অপর প্রান্ত একটি কপিকল P-এর উপর দিয়ে চলে গেছে। তারের এই



চিত্র ১৮'৮

প্রান্তের সাথে একটি হুক H যুক্ত আছে। এই হুকে ওজন W চাপিয়ে তারটিকে প্রয়োজনীয় টানে রাখা হয়। CD তারের দুই প্রান্ত দুটি খুঁটি R_1 ও R_2-এর সাথে আটকানো আছে। বাক্সের উপর একটি স্কেল এবং দুই প্রান্তের দিকে উভয় তারের নিচে দুটি স্থির সেতু (Bridge) H ও N থাকে। এ স্কেলে তারের কোন অংশের দৈর্ঘ্যের পাঠ

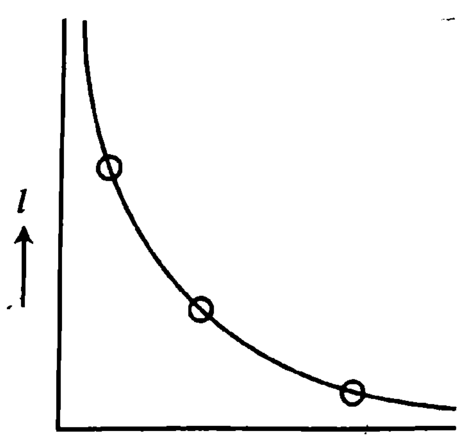
গ্রহণ করা হয়। AB ও CD তারের নিচে আরও দুটি সঞ্চরণশীল সেতু যথাক্রমে E ও F আছে। প্রয়োজনবোধে E ও F সেতু দুটির অবস্থান পরিবর্তন করে তারের কম্পাঙ্ক পরিবর্তন করা যায়।

সনোমিটারের বাক্স ফাঁপা হওয়ায় তারের কম্পনে বাক্সের সংস্পৃষ্ট ভিতরের ও বাইরের বায়ুতে পরবশ কম্পনের সৃষ্টি হয়। এভাবে কম্পন বেশি আয়তনের বায়ুতে সঞ্চালিত হওয়ায় তার হতে নির্গত সুরের তীব্রতা বৃদ্ধি পায়।

১৮·১৮ টানা তারের আড় কম্পনের সূত্রগুলোর প্রমাণ
Verification of the laws of transverse vibration of a stretched string

দৈর্ঘ্যের সূত্রের প্রমাণ ঃ দৈর্ঘ্যের সূত্রের প্রমাণের জন্য সনোমিটার যন্ত্র হতে সাহায্যকারী তার খুলে ফেলা হয়। এখন পরীক্ষণীয় তারের হুকে নির্দিষ্ট ওজন W ঝুলিয়ে তাকে টান করে রাখা হয়।

অতঃপর একটি ছোট কাগজের টুকরাকে (V আকৃতির) উক্ত তারের উপরে স্থাপন করা হয় এবং একটি সুরেলী কাঁটাকে শব্দায়িত করে উক্ত তারের পার্শ্বে বাক্সের উপর স্থাপন করা হয়। এখানে একটি বিষয় লক্ষণীয় তা হল কাগজের টুকরাটিকে সর্বদা H ও E-এর মাঝামাঝি স্থানে স্থাপন করা। তারটির পার্শ্বে কম্পিত সুরেলী কাঁটা স্থাপন করায় তারটি কম্পিত হবে। যখন তারে অনুনাদের সৃষ্টি হয়, তখন কাগজের টুকরাটি ছিটকে পড়ে। যদি অনুনাদের সৃষ্টি না হয় তবে H সেতু স্থির রেখে E সেতুটিকে বামে অথবা ডানে সরানো হয় যতক্ষণ পর্যন্ত না কাগজের টুকরা ছিটকে পড়ে। পরীক্ষাকালে কম্পিত সুরেলী কাঁটাকে উক্ত তারের পার্শ্বে স্থাপন করা হয়। অবশ্য যখন তারে অনুনাদ সৃষ্টি হয়, তখন কাগজের টুকরাটি ছিটকে পড়ে। এ অবস্থায় মিটার স্কেলের সাহায্যে H ও E-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব মাপা হয়।



চিত্র ১৮·৯

মনে করি, n_1 কম্পাঙ্কের সুরেলী কাঁটার জন্য অনুনাদী তারের দৈর্ঘ্য l_1 এবং n_2 কম্পাঙ্কের সুরেলী কাঁটার জন্য অনুনাদী তারের দৈর্ঘ্য l_2।

পরীক্ষালব্ধ ফল হতে দেখা যায় যে,

$$n_1 l_1 = n_2 l_2 = \text{ধ্রুবক} \qquad (15)$$

বা, nl = ধ্রুবক

$n \propto \frac{1}{l}$ (প্রমাণিত)।

n বনাম l লেখচিত্র একটি পরাবৃত্ত হবে [চিত্র ১৮·৯]।

টানের সূত্রের প্রমাণ ঃ ২য় সূত্রের প্রমাণের জন্য পরীক্ষণীয় তারের পাশে সাহায্যকারী তার স্থাপন করা হয়। এখন পরীক্ষাধীন তারের দৈর্ঘ্য স্থির করে এর হুকে T_1 ওজন চাপানো হয়। এবার সাহায্যকারী তারটিকে যে কোন একটি টানে রেখে এর নিচের সঞ্চরণশীল সেতু বামে বা ডানে সরিয়ে এমন একটি দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয় যা পরীক্ষাধীন তারের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সাথে ঐকতানে থাকে। মনে করি সাহায্যকারী তারের এ দৈর্ঘ্য $= l_1$। পুনরায় পরীক্ষণীয় তারের টান পরিবর্তন করে T_2 করা হয়, কিন্তু সাহায্যকারী তারের পূর্বের টান স্থির থাকে। পরীক্ষণীয় তারের টান (ওজন) পরিবর্তন করার সাথে সাথে এর পূর্বের কম্পাঙ্কের পরিবর্তন ঘটবে। এবার পূর্বের মত

সাহায্যকারী তারের নিচের সঞ্চরণশীল সেতুর স্থান পরিবর্তন করে এমন একটি দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয় যা পরীক্ষণীয় তারের সাথে ঐকতানে থাকে। ধরি এ দৈর্ঘ্য $= l_2$। পরীক্ষালব্ধ ফল হতে পাওয়া যায়,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}$$

কিন্তু প্রথম সূত্রানুযায়ী, $n_1 l_1 = n_2 l_2$

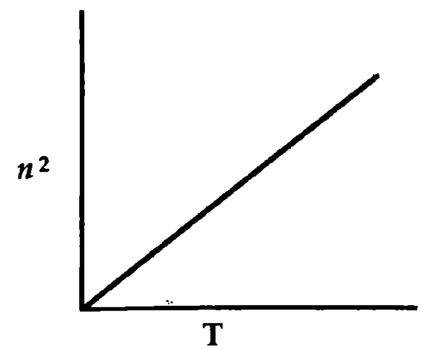
বা, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_2}{n_1}$

বা, $\frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$

বা, $\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{l_2^2}{l_1^2} = \frac{T_1}{T_2}$ (16)

বা, $n^2 \propto T$

$n \propto \sqrt{T}$ (প্রমাণিত)



চিত্র ১৮·১০

n^2 বনাম T লেখচিত্র অঙ্কন করলে একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা পাওয়া যাবে [চিত্র ১৮·১০]।

ভরের সূত্রের প্রমাণ ঃ ৩য় সূত্রের প্রমাণের জন্য m_1 ও m_2 একক দৈর্ঘ্যের ভরের দুটি পরীক্ষণীয় তার নেয়া হয়। এ সূত্র প্রমাণের জন্য সনোমিটার যন্ত্রে সাহায্যকারী তারের প্রয়োজন হয়। পরীক্ষার সময় সাহায্যকারী তারের পার্শ্বে m_1 একক দৈর্ঘ্যের ভরের তার স্থাপন করা হয় এবং উভয় তারেই টান সমান রাখা হয়। এবার পরীক্ষণীয় তারের (HE-এর মধ্যবর্তী) দৈর্ঘ্য স্থির করে সাহায্যকারী তারের (HF-এর মধ্যবর্তী) এমন একটি দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়, যাতে উভয় তারই ঐক্যতানে থাকে। ধরি সাহায্যকারী তারের এই দৈর্ঘ্য l_1। এখন m_1 একক দৈর্ঘ্যের ভরের তার পরিবর্তন করে এর পরিবর্তে m_2 একক দৈর্ঘ্যের ভরের তার স্থাপন করা হয়। পরীক্ষণীয় তারের টান পূর্বের সমান করা হয় এবং পূর্বের দৈর্ঘ্যও স্থির রাখা হয়। এবার সাহায্যকারী তারের নিচের সঞ্চরণশীল F সেতু এদিক-ওদিক সরিয়ে এমন একটি দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা হয়, যাতে উভয় তারই ঐকতানে থাকে। ধরি, এই দৈর্ঘ্য l_2।

পরীক্ষালব্ধ ফলাফল হতে পাওয়া যায়, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2}$

কিন্তু প্রথম সূত্র হতে আমরা জানি, $\frac{l_1^2}{l_2^2} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$ (17)

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{m_1}{m_2}$$

বা, $n^2 \propto \frac{1}{m}$

$\boxed{n \propto \frac{1}{\sqrt{m}}}$ (প্রমাণিত)

১৮·১৯ সনোমিটারের সাহায্যে একটি সুর শলাকার অজানা কম্পাঙ্ক নির্ণয়

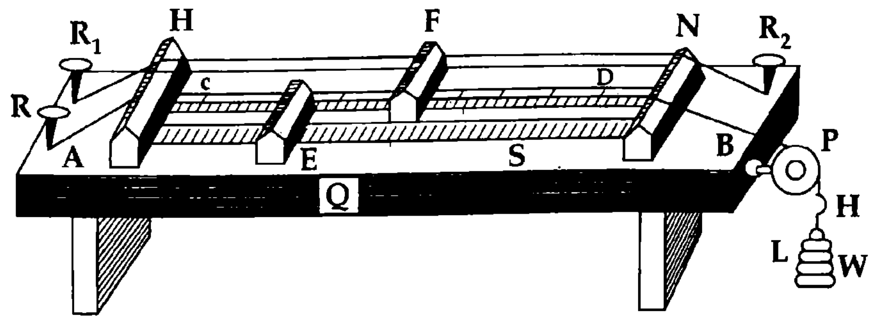
Determination of unknown frequency of a tuning fork by sonometer

তত্ত্ব ঃ সনোমিটারের সাহায্যে কোন একটি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য আমরা যে সমীকরণ ব্যবহার করব তা হল $\boxed{n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}}$ (11)

এখানে, $n =$ কম্পাঙ্ক, $l =$ তারের কম্পমান দৈর্ঘ্য, $T = Mg =$ তারে প্রযুক্ত টান এবং $m =$ তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর।

কার্যপদ্ধতি :

একটি সুর শলাকা লই যার কম্পাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে। পরীক্ষার শুরুতেই পরীক্ষাধীন তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর নির্ণয় করি। এর জন্য পরীক্ষাধীন তারের দৈর্ঘ্য ও মোট ভর বের করি। মোট ভরকে মোট দৈর্ঘ্য দ্বারা ভাগ করে তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর নির্ণয় করি। এরপর সুর শলাকাকে একটি রাবার প্যাডে আঘাত করি এবং সনোমিটারের বাক্সের উপর স্থাপন করি। তারপর সেতুকে এদিক সেদিক সরিয়ে তারের কম্পমান দৈর্ঘ্যকে এমনভাবে উপযোজন করি যাতে তারের উপর স্থাপিত কাগজের টুকরা ছিটকে পড়ে। অর্থাৎ তার এবং সুর শলাকা ঐকতানে আসে। এমতাবস্থায় দুই সেতুর মধ্যবর্তী তারের দৈর্ঘ্য বের করি, এর পর তারে প্রযুক্ত টান বের করি।



চিত্র ১৮.১১

হিসাব ও গণনা :

মনে করি, টান = T = Mg ডাইন, তারের কম্পমান দৈর্ঘ্য = l সেমি.,

তারের একক দৈর্ঘ্যের ভর = m গ্রাম।

$$\text{কম্পাঙ্ক, } n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{Mg}{m}} \qquad (18)$$

এখন M, g, l এবং m-এর মান জেনে n নির্ণয় করা যায়।

১৮.২০ মুক্ত ও পরবশ কম্পন
Free and forced vibration

একটি সুর শলাকাকে আঘাত করলে এটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে কাঁপতে থাকে। এ কম্পন সুর শলাকার মুক্ত কম্পন। আবার একটি সরল দোলককে সাম্যাবস্থা থেকে টেনে ছেড়ে দিলে দোলকটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে দুলতে থাকে। এটিও মুক্ত কম্পন। সুতরাং মুক্ত কম্পনের নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায়।

সংজ্ঞা : স্পন্দনক্ষম যে কোন বস্তুকে আন্দোলিত করলে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে স্পন্দিত হয়। এই স্পন্দনকে মুক্ত কম্পন বা স্বাভাবিক (natural) কম্পন বলে। মুক্ত কম্পাঙ্ক বস্তুর ঘনত্ব, আকৃতি ও স্থিতিস্থাপকতার উপর নির্ভর করে। যেমন সরল দোলকের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করলে এর কম্পাঙ্ক ভিন্নতর হয়।

পরবশ কম্পন : কোন পরিবর্তনশীল বলের মান ও দিক যদি নির্দিষ্ট সময় অন্তর একই হয়, তবে ঐ বলকে পর্যাবৃত্ত বল এবং এ ধরনের স্পন্দনকে পর্যাবৃত্ত স্পন্দন বলে। এরূপ কোন পর্যাবৃত্ত বল দ্বারা স্পন্দনক্ষম কোন বস্তুকে কম্পিত করলে বস্তুটি প্রথমে তার মুক্ত বা স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হওয়ায় চেষ্টা করে, কিন্তু আস্তে আস্তে বস্তুটি পর্যাবৃত্ত বলের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে। এ ধরনের কম্পন বস্তুটির মধ্যে বাইরে থেকে আরোপ করা হয়েছে। একে **আরোপিত বা পরবশ কম্পন** বলে।

সুতরাং, পরবশ কম্পন নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সংজ্ঞা ঃ স্পন্দনক্ষম বস্তুর উপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের জন্য বস্তুটি তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হওয়ার পরিবর্তে যখন আরোপিত কম্পনের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে তখন এ কম্পনকে আরোপিত বা পরবশ কম্পন বলে।

ব্যাখ্যা ঃ একটি সুর শলাকাকে আঘাত করে বায়ু মাধ্যমে রাখলে খুব ক্ষীণ শব্দ শোনা যাবে। কিন্তু ঐ স্পন্দিত সুর শলাকাকে একটি টেবিলের উপরে চেপে ধরলে বেশ জোরে শব্দ শোনা যাবে। এক্ষেত্রে সুর শলাকার কম্পনে টেবিলটি পরবশ কম্পনে কম্পিত হয়। এর ফলে টেবিল সংলগ্ন সমস্ত বায়ুই কম্পিত হয়। এতে অধিক পরিমাণে বায়ু কম্পিত হওয়ার ফলে শব্দের তীব্রতা বা প্রাবল্য বেড়ে যায়।

১৮·২১ অনুনাদ
Resonance

একটি কম্পমান বস্তুকে অন্য একটি বস্তুর নিকট ধরলে দ্বিতীয় বস্তুটি কাঁপতে শুরু করে একে পরবশ বলে। যদি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল ভিন্ন হয় তবে বস্তু ক্ষুদ্র বিস্তারে কাঁপবে। কিন্তু বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও তার উপর প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল সমান হলে বস্তুটি বৃহত্তর বিস্তারে কাঁপতে বাধ্য হয় এবং শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়। এ প্রক্রিয়াকে অনুনাদ বলে। সুতরাং, অনুনাদ পরবশ কম্পনের একটি বিশেষ অবস্থা।

সংজ্ঞা ঃ কোন বস্তুর উপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের কম্পাঙ্ক বস্তুটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এ ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে।

১৮·২২ বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibration of air column

বাঁশের বাশি, মাউথ অর্গান প্রভৃতি নলাকৃতি বাদ্যযন্ত্রে ফুঁ দিয়ে শ্রুতিমধুর শব্দ উৎপন্ন করা যায়। এটি হতে প্রমাণিত হয় যে, নলের মধ্যে আলোড়ন সৃষ্টি করলে, নলের আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভ সুর সৃষ্টি করে থাকে। নলের বায়ুস্তম্ভের কম্পনকে কাজে লাগিয়ে যে সব সুরযন্ত্র সৃষ্টি হয়েছে তাদেরকে দুই শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায় ; যথা— একমুখ বন্ধ নল ও দুই মুখ খোলা নল। সংক্ষেপে একমুখ বন্ধ নলকে 'বন্ধ নল' এবং দুইমুখ খোলা নলকে 'খোলা নল' বলে।

১৮·২৩ একমুখ বন্ধ নলে বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Vibration of air column Pipe closed at one end

এরূপ একটি নলের একমুখ খোলা ও অপর মুখ বন্ধ থাকে। এই নলের খোলা মুখে ফুঁ দিলে (অথবা একটি কম্পনরত সুর শলাকা ধরলে) নলের ভিতরের বায়ুস্তম্ভের মধ্য দিয়ে শব্দ লম্বিক তরঙ্গাকারে বন্ধ মুখের দিকে সঞ্চালিত হবে এবং বন্ধ মুখ হতে (সঙ্কোচন স্পন্দন সঙ্কোচন স্পন্দনরূপে, প্রসারণ স্পন্দন প্রসারণ স্পন্দনরূপেই) প্রতিফলিত হয়ে খোলা মুখের দিকে অগ্রসর হবে। এই প্রতিফলিত তরঙ্গ ফুঁ (বা সুর শলাকা) হতে সৃষ্ট আর একটি তরঙ্গের সাথে সুরের উৎপত্তি হবে। ফুঁ (বা সুর শলাকা)-এর মূল স্পন্দন ও বায়ুস্তম্ভের কম্পনের মধ্যে অনুনাদ হলে বায়ুস্তম্ভ সর্বাপেক্ষা বেশি আলোড়িত হবে এবং সুর জোরালো হবে।

নলের খোলা মুখের বায়ুকণাগুলো মুক্তভাবে নড়াচড়া করতে পারে। এজন্যে খোলা মুখে সর্বদাই একটি সুস্পন্দ বিন্দুর (A) সৃষ্টি হবে [চিত্র ১৮·১২]। পক্ষান্তরে নলের বন্ধ মুখ সংলগ্ন বায়ুকণার বিচলনের সুবিধা খুবই কম হেতু ঐ স্থানে একটি নিস্পন্দ বিন্দুর (N) উৎপত্তি হবে। বায়ুস্তম্ভের কম্পনভেদে নলের ভিতর কতকগুলো সুস্পন্দ ও নিস্পন্দ বিন্দুর (A ও N) সৃষ্টি হতে পারে।

বায়ুস্তম্ভের সহজতর কম্পনে [চিত্র ১৮·১২ (ক)] বা ন্যূনতম কম্পাঙ্কের সুরে শুধুমাত্র বন্ধ মুখে একটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা মুখে একটি সুস্পন্দ বিন্দু উৎপত্তি হবে। কিন্তু পরস্পর সংলগ্ন একটি নিস্পন্দ ও একটি সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের এক-চতুর্থাংশের সমান। সুতরাং নলের দৈর্ঘ্য l এবং এই কম্পনে সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_0 ও কম্পাঙ্ক N_0 হলে, $\frac{\lambda_0}{4} = l$

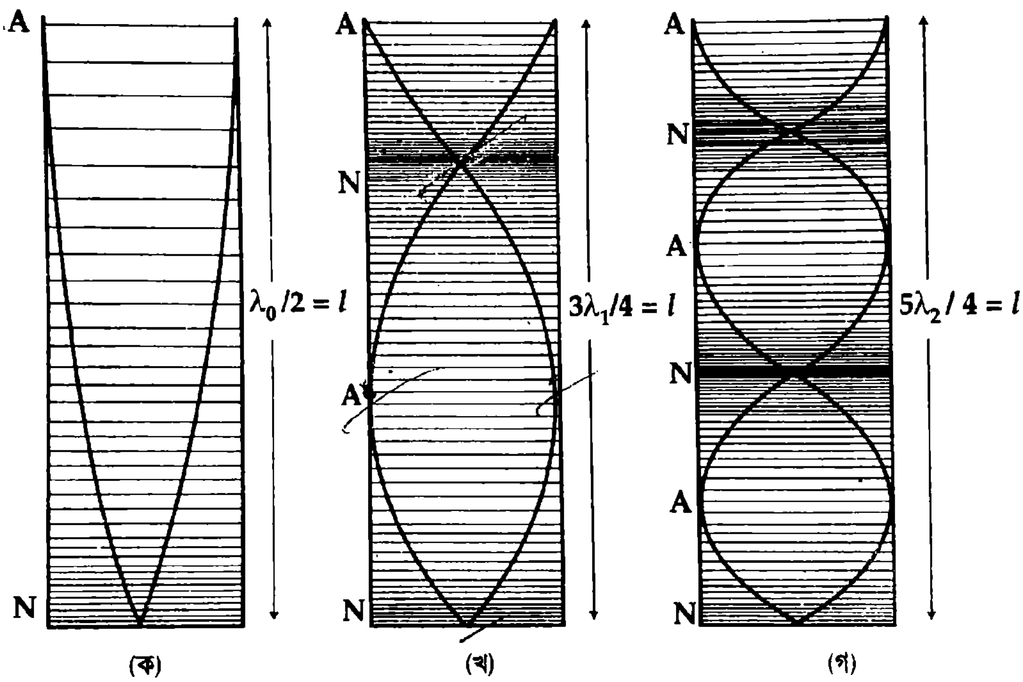
$$\lambda_0 = 4l \tag{19}$$

এবং $N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{4l}$ (20)

এখানে, v = শব্দের বেগ ও $v = n\lambda$ ।

নলের এই সুরই মূল সুর বা প্রথম হারমোনিক।

এই নলে পরবর্তী হারমোনিকের সুর উৎপন্নে বা আরও জোরে ফুঁ দিলে নলের বায়ুস্তম্ভে সৃষ্ট লম্বিক তরঙ্গের দৈর্ঘ্য হ্রাস পাবে এবং বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ চড়া সুর উৎপন্ন হবে। বায়ুস্তম্ভের পরবর্তী উচ্চ কম্পাঙ্কের সুরে বা দ্বিতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ১৮·১২(খ)] খোলা মুখের সুস্পন্দ বিন্দু ও বন্ধ মুখের নিস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে একটি সুস্পন্দ বিন্দু ও একটি নিস্পন্দ বিন্দু উৎপন্ন হবে। ধরা যাক বায়ুস্তম্ভের এই কম্পনে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $=\lambda_1$ এবং কম্পাঙ্ক N_1। তা হলে, $\frac{3\lambda_1}{4} = l$.



চিত্র ১৮·১২

$$\lambda_1 = \frac{4l}{3} = \frac{\lambda_0}{3} \tag{21}$$

এবং $N_1 = \frac{v}{\lambda_1} = 3\left(\frac{v}{4l}\right) = 3N_0 \ldots$ (22)

এই সুরকে প্রথম উপসুর বলে। এই সুর মূল সুরের কম্পাঙ্কের তিন গুণ বলে একে তৃতীয় হারমোনিক বলা হয়।

নলের তৃতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ১৮·১২ (গ)] বা পরবর্তী হারমোনিকে বন্ধ প্রান্তের নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা প্রান্তের সুস্পন্দ বিন্দুর মধ্যে দুটি সুস্পন্দ বিন্দু ও দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর উৎপত্তি হবে। কাজে কাজেই এই কম্পনে সৃষ্ট সুরের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $= \lambda_2$ এবং কম্পাঙ্ক $= N_2$ হলে, $\frac{5\lambda_2}{4} = l$

$$\lambda_2 = \frac{4l}{5} = \frac{\lambda_0}{5} \tag{23}$$

এবং $N_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 5 \times \frac{v}{4l} = 5N_0$ (24)

এই সুরকে দ্বিতীয় উপসুর বা পঞ্চম হারমোনিক বলে।

উপরের সমীকরণগুলো লক্ষ করে সাধারণভাবে বলা যায় যে, একমুখ বন্ধ নলে যে সব সুর সৃষ্টি হতে পারে তাদের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য,

$$\lambda_n = \frac{4l}{(2n+1)} = \frac{\lambda_0}{(2n+1)} \tag{25}$$

এবং কম্পাঙ্ক, $N_n = \frac{v}{\lambda_n} = (2n+1)\frac{v}{4l} = (2n+1)N_0$ (26)

এখানে, $n = 0, 1, 2, 3$ ইত্যাদি যে কোন একটি পূর্ণ সংখ্যা।

এই সমীকরণগুলো হতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যে, **একমুখ বন্ধ নলে শুধুমাত্র অযুগ্ম হারমোনিকগুলো উৎপন্ন হতে পারে** অর্থাৎ দ্বিতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ ইত্যাদি হারমোনিকগুলো অনুপস্থিত থাকে। অবশ্য নলের ব্যাসার্ধ r হলে র‍্যালের প্রান্ত সংশোধন অনুসারে একমুখ বন্ধ নলের সুরগুলোর প্রকৃত তরঙ্গ দৈর্ঘ্য,

$\lambda_n = \frac{4(l+0.6r)}{(2n+1)}$ এবং কম্পাঙ্ক, $N_n = (2n+1)\frac{v}{4(l+0.6r)}$ । (27)

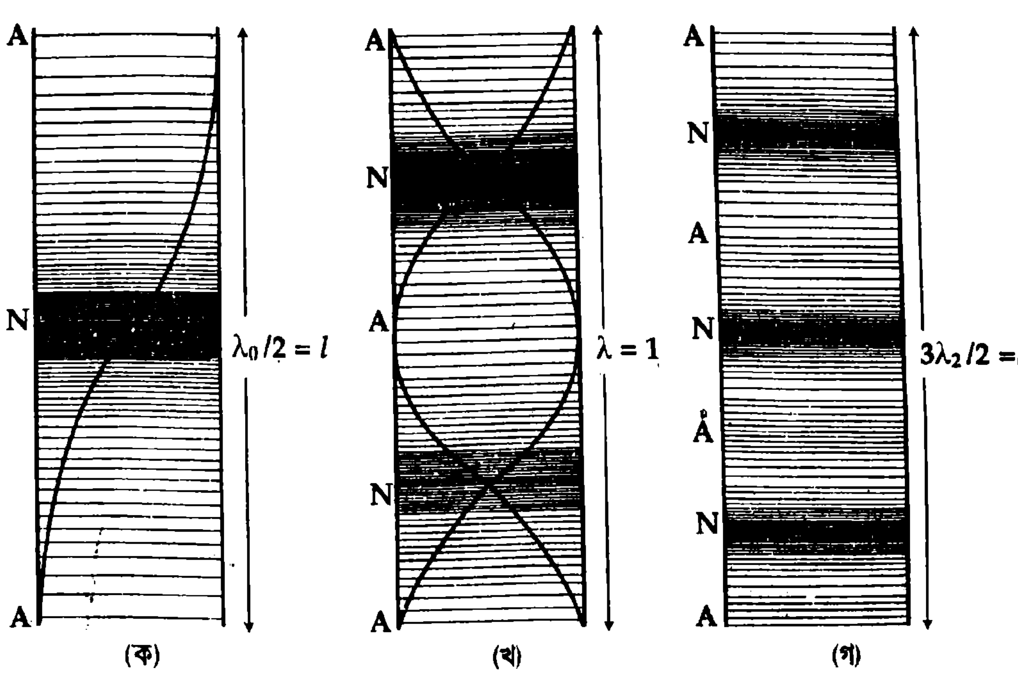
যে যে কারণে শব্দের বেগ পরিবর্তিত হবে সে সব কারণে মূল সুর এবং সাথে সাথে উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক পরিবর্তিত হবে। আবার নলের দৈর্ঘ্য যত ছোট হবে মূল সুর এবং সাথে সাথে উপসুরগুলোর কম্পাঙ্কও তত বৃদ্ধি পাবে।

১৮·২৪ দুই মুখ খোলা নলে বায়ুস্তম্ভের কম্পন
Pipe opened at both ends

এরূপ একটি নলের দুইমুখ খোলা থাকে। এই নলের একমুখে ফুঁ দিলে (অথবা একটি কম্পনরত সুর শলাকা ধরলে) নলের ভিতরের বায়ুস্তম্ভের মধ্য দিয়ে একটি লম্বিক তরঙ্গ নলের অপর প্রান্তের দিকে সঞ্চালিত হবে। নলের ভিতরের বায়ু অপেক্ষা বাইরের বায়ুর বিচলনের সুবিধা বেশি থাকায় মূল তরঙ্গের কিছু অংশ নলের অপর প্রান্ত হতে ফিরে আসবে। ফলে মূল তরঙ্গ ও প্রতিফলিত তরঙ্গ মিলে নলের বায়ুতে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি করবে এবং সুরের উৎপত্তি হবে। বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক ফুঁ-এর (বা সুর শলাকার) কম্পাঙ্কের সমান হলে বায়ুস্তম্ভের কম্পনে অনুনাদ হবে।

নলের দুই মুখ খোলা থাকায় ঐ দুই স্থানের বায়ুকণাগুলো সবচাইতে বেশি নড়াচড়া করার সুবিধা পায়। এই কারণে নলের দুই প্রান্তে সর্বদাই দুটি সুস্পন্দ বিন্দু (A , A) সৃষ্টি হবে [চিত্র ১৮·১৩]। বায়ুস্তম্ভের কম্পনভেদে নলে এক বা একাধিক নিস্পন্দ বিন্দু (N) সৃষ্টি হতে পারে।

বায়ুস্তম্ভের সহজতম কম্পনে [চিত্র ১৮·১৩ (ক)] বা ন্যূনতম কম্পাঙ্কে কম্পনের ক্ষেত্রে নলের দুই মুখের দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর (A , A) মাঝে একটি নিস্পন্দ বিন্দু (N) থাকবে। কাজেই নলের দৈর্ঘ্য l হলে এই দৈর্ঘ্য সৃষ্ট



চিত্র ১৮·১৩

শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান হবে। সৃষ্ট শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_0 এবং কম্পাঙ্ক N_0 হলে, $\frac{\lambda_0}{2} = l$

$$\lambda_0 = 2l \tag{28}$$

এবং $$N_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{v}{2l} \tag{29}$$

নলে উৎপন্ন এই সুর মূল সুর বা প্রথম হারমোনিক।

দ্বিতীয় সম্ভাব্য কম্পনে অর্থাৎ ফুঁ পূর্বাপেক্ষা সুবিধামত জোরালো বা তীক্ষ্ণতা সম্পন্ন হলে মোট তিনটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং দুটি নিস্পন্দ বিন্দু দেখা দিবে [চিত্র ১৮·১৩ (খ)]। এ স্থলে সৃষ্ট তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_1 এবং কম্পাঙ্ক N_1 হলে,

$$\lambda_1 = l = \frac{1}{2}(2l) = \frac{\lambda_0}{2} \tag{30}$$

এবং $$N_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{l} = 2\left(\frac{v}{2l}\right) = 2N_0 \tag{31}$$

এই সুর দ্বিতীয় হারমোনিক বা প্রথম উপসুর।

তৃতীয় সম্ভাব্য কম্পনে [চিত্র ১৮·১৩ (গ)] বা পরবর্তী হারমোনিকে নলে মোট চারিটি সুস্পন্দ বিন্দু এবং তিনটি নিস্পন্দ বিন্দু থাকবে। এক্ষেত্রে বায়ুস্তম্ভ হতে নিঃসৃত সুরের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য λ_2 এবং কম্পাঙ্ক N_2 হলে, $3\frac{\lambda_2}{2} = l$

$$\therefore \lambda_2 = \frac{2l}{3} = \frac{\lambda_0}{3} \tag{32}$$

এবং $$N_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 3\left(\frac{v}{2l}\right) = 3N_0 \tag{33}$$

এই সুর তৃতীয় হারমোনিক বা দ্বিতীয় উপসুর।

সাধারণভাবে উল্লেখ করা যায় যে, দুইমুখ খোলা নলে যে সব সুর উৎপন্ন হতে পারে তাদের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য,

$$\lambda_n = \frac{2l}{(n+1)} = \frac{\lambda_0}{(n+1)} \tag{34}$$

এবং কম্পাঙ্ক, $$N_n = \frac{v}{\lambda_n} = (n+1)\frac{v}{2l} = (n+1)N_0 \tag{35}$$

$n = 0, 1, 2, 3$ ইত্যাদি যে কোন একটি পূর্ণ সংখ্যা।

সুতরাং, দুইমুখ খোলা নলে যুগ্ম ও অযুগ্ম সকল প্রকার হারমোনিক পাওয়া যেতে পারে।

নলের ব্যাসার্ধ r হলে র‍্যালের প্রান্ত সংশোধন অনুসারে

$\lambda_n = \frac{2(l+1{\cdot}2r)}{(n+1)}$ এবং $N_n = \frac{(n+1)v}{2(l+1{\cdot}2r)}$, কেননা নলের উভয় মুখের সুস্পন্দ বিন্দু খোলামুখে না হয়ে $0{\cdot}6r$ দূরত্ব বাইরে হবে।

১৮·২৫ কয়েকটি বাদ্যযন্ত্র
Some musical instruments

সুমধুর সুর সৃষ্টির উদ্দেশ্যে আমরা কতকগুলো যন্ত্র ব্যবহার করে থাকি। এদের নাম বাদ্যযন্ত্র। বাদ্যযন্ত্রগুলোকে মোট চার ভাগে ভাগ করা হয়েছে।

১. **তারের যন্ত্র, যেমন একতারা, দোতারা, সেতার, গিটার, সারিন্দা ইত্যাদি।**
২. **বায়ুচালিত যন্ত্র, যেমন বাঁশি, হারমোনিয়াম ইত্যাদি।**
৩. **পদার্থ সংযুক্ত যন্ত্র, যেমন তবলা, ঢোল ইত্যাদি।**
৪. **বিদ্যুৎচালিত যন্ত্র, যেমন টেপরেকর্ডার।**

গিটার : এটি কাঠের তৈরি একটি ফাঁপা বাক্স। বাক্সের নিচের প্রান্তে কয়েকটি হুকের সাথে কয়েকটি সরু ধাতব তারের এক প্রান্ত যুক্ত থাকে। তারের অপর প্রান্তগুলো কাঠের বাক্সের উপরের প্রান্তে ছিদ্রপথে স্থাপিত কতকগুলো কিল্‌ক বা খিল-এর সাথে আটকানো থাকে। যন্ত্রের নিচের অংশের তারগুলোর নিচে কতকগুলো সেতু থাকে যাতে তারগুলো যন্ত্রের গা স্পর্শ না করে।

গিটার বাদক কিল্‌ক বা খিলগুলোর সাহায্যে তারগুলোকে টানা অবস্থায় রাখে। গিটার বাদক আঙ্গুলের মাথায় কয়েকটি ধাতব টুপি পরিধান করে তারগুলোতে কম্পন সৃষ্টি করে এবং অপর হাতের আঙ্গুল দ্বারা তারগুলো পর্যায়ক্রমে বাক্সের গায়ে চেপে ধরে সুমধুর সুর উৎপন্ন করে।

বাঁশি : এটি বাঁশের তৈরি দুই মুখ খোলা নল। বাঁশির গায়ে গোলাকার কতকগুলো ছিদ্র থাকে। কোন বাঁশির এক প্রান্তে কাঠের তৈরি একটি ছিপি এমনভাবে লাগানো হয় যাতে ছিপি এবং বাঁশির গায়ের মধ্যে যৎসামান্য বায়ু সঞ্চালনের পথ থাকে। আবার এক প্রকারের বাঁশি আছে যার দু মুখই খোলা। শুধু বাঁশির গায়ে কয়েকটি গোলাকার ছিদ্র থাকে।

বংশীবাদক বাঁশিতে ফু দেয় এবং তার হাতের আঙ্গুলগুলোর দ্বারা ছিদ্রপথে নিষ্কাশিত বাতাসের প্রবাহকে নিয়ন্ত্রণ করে মনোমুগ্ধকর সুর সৃষ্টি করে। বাঁশের বাঁশি ছাড়াও ধাতব নির্মিত কতকগুলো বাঁশির সাহায্যেও সুমধুর সুর সৃষ্টি করা হয়।

তবলা : তবলা কাঠের বা মাটির তৈরি একমুখ খোলা একটি ফাঁপা পাত্র। খোলা মুখ ট্যানিং করা চামড়া দ্বারা বন্ধ থাকে। তবলা বাদক আঙ্গুল এবং হাতের কব্জি দ্বারা চামড়া পর্দায় আঘাত করে সুমধুর সুর উৎপন্ন করে।

ঢোল : ঢোল কাঠের তৈরি দুই মুখ খোলা একটি মোটা চোঙাকৃতি আধার। এর খোলা মুখ দুটি ট্যানিং করা চামড়া দ্বারা বন্ধ করা থাকে।

ঢোল বাদক এক হাতে একটি শক্ত স্টিক নিয়ে ঢোলের এক প্রান্তের পর্দায় আঘাতে শব্দ উৎপন্ন করে এবং অপর হাতে আঙ্গুলগুলো দিয়ে ঢোলের অপর প্রান্তের চামড়ার পর্দায় নিয়ন্ত্রিতভাবে আঘাত করে সুমধুর সুর উৎপন্ন করে।

অর্গান নল (Organ Pipe) : নলাকৃতি বাদ্যযন্ত্রের মধ্যে অর্গান নল অন্যতম। এই নলে সুর উৎপাদনের ক্ষেত্রে দুই মুখ খোলা ও একমুখ বন্ধ নলের সুর উৎপাদনের নীতি অনুসরণ করা হয়। ১৮·১৪ নং চিত্রে একটি অর্গান নলের বিভিন্ন অংশ দেখান হয়েছে।

চিত্র ১৮·১৪।

এই নলের IO একটি কাঠ বা ধাতু নির্মিত গোল বা চতুষ্কোণাকৃতি নল, P একটি ফলক এবং D একটি ধারাল পাত। পাত D-কে 'লিপ' (Lip) বলা হয়। এই নলের একমুখ I খুবই সরু এবং অপরমুখ O খোলা বা বন্ধ থাকে। মুখ O খোলা থাকলে তা দুই মুখ খোলা নলের ন্যায় এবং বন্ধ থাকলে একমুখ বন্ধ নলের ন্যায় ক্রিয়া করে।

নলের I মুখ দিয়ে বায়ু প্রবাহিত করলে ঐ প্রবাহ P ফলক দ্বারা বাধাপ্রাপ্ত হয় এবং P-এর পাশ ঘেঁষে সরুপথ দিয়ে যাবার সময় D-এর দুই পাশে পর্যায়ক্রমে আঘাত করে। এভাবে বায়ু প্রবাহে একটি আবর্তের সৃষ্টি হয় অর্থাৎ নলের বায়ু স্তম্ভে একটি কম্পনের সৃষ্টি করে। নলের বায়ুস্তম্ভের মুক্ত বা স্বাধীন কম্পাঙ্ক (যা তার দৈর্ঘ্য ও শব্দের বেগের উপর নির্ভর করে) প্রতি সেকেণ্ডে সৃষ্ট আবর্তের সংখ্যার সমান হলে, বায়ুস্তম্ভের কম্পন সবচেয়ে জোরালো হয় এবং এতে একটি সুর উৎপন্ন হয়।

একটি অর্গান নলে এরূপ অনেকগুলো নল যুক্ত থাকে। এই নলগুলো হতে বিভিন্ন সুর ও উপসুর নিঃসৃত হয়।

টেপ রেকর্ডার (Tape recorder) : এটি একটি বৈদ্যুতিক যন্ত্র। এর সাহায্যে গান-বাজনা, মানুষের বক্তৃতা ইত্যাদি রেকর্ড করে রাখা হয় এবং প্রয়োজন অনুসারে পুনরুৎপাদন করা যায়। টেপ রেকর্ডারে চৌম্বক পদার্থের প্রলেপ দেওয়া এক ধরনের প্লাস্টিকের ফিতা থাকে। টেপ রেকর্ডার যন্ত্রে দুটি স্পুল থাকে এবং স্পুলের মাঝখানে দুটি রিং আকৃতির তড়িৎ চুম্বক থাকে। তড়িৎ চুম্বকের মেরুদ্বয়ের ফাঁক দিয়ে চৌম্বক ফিতা, একটি বৈদ্যুতিক মোটরের

BG & JEWEL

সাহায্যে এক স্পুল থেকে অন্য স্পুলে অনায়াসে যাতায়াত করতে পারে। চুম্বক দুটির একটিকে রেকর্ডিং হেড (Recording head) এবং আরেকটিকে প্লে ব্যাক হেড (Playback head) বলে। মাইক্রোফোনের সামনে শব্দ উচ্চারিত হলে শব্দের প্রকৃতি অনুসারে পরিবর্তনশীল তড়িৎ প্রবাহের সৃষ্টি হয়। এই পরিবর্তনশীল তড়িৎ প্রবাহ তড়িৎ চুম্বকের কুণ্ডলীতে প্রেরণ করা হয়। পরিবর্তনশীল তড়িৎ প্রবাহের কারণে চৌম্বক ক্ষেত্রের ক্ষেত্ররেখার পরিবর্তন ঘটে। এখন চৌম্বক ফিতা ঐ রেকর্ডিং হেডের ফাঁক দিয়ে যাওয়ার সময় ক্ষেত্ররেখার পরিবর্তন অনুযায়ী চুম্বকিত হয়। ফলে ফিতাটির উপর শব্দের চৌম্বক প্রতিলিপি মুদ্রিত হয়। এই শব্দ পুনরুৎপাদনের জন্য প্লেব্যাক হেড ব্যবহৃত হয়। প্লেব্যাক হেডের মধ্য দিয়ে চৌম্বক ফিতাটি যাওয়ার সময় ফিতার চৌম্বক ক্ষেত্রের পরিবর্তনের প্রভাবে হেডের কুণ্ডলীতে পরিবর্তনশীল তড়িৎ প্রবাহ সৃষ্টি করে। এই তড়িৎ প্রবাহ অ্যামপ্লিফায়ারের সাহায্যে বহুগুণে বিবর্ধিত করে লাউড স্পীকারে প্রেরিত হয়। লাউড স্পীকার পরিবর্তনশীল তড়িৎ প্রবাহ শব্দ তরঙ্গে রূপান্তরিত করে এবং আমরা সেই শব্দ শুনতে পাই।

১৮·২৬ সুরবিরাম বা সুরানুপাত
Musical interval

দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাত একটি পূর্ণসংখ্যা হলে এদের মিলিত প্রভাবে শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয় এবং এদের তীক্ষ্ণতার পার্থক্য ভালভাবে বুঝা যায়। এই কারণে দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে সুরবিরাম বা সুরানুপাত বলে। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক n_1, n_2 ও n_3 তিনটি সুরের কম্পাঙ্ক। তাহলে দ্বিতীয় সুরের সাপেক্ষে প্রথম সুরের সুরবিরাম $= \frac{n_1}{n_2}$। আবার তৃতীয়টির সাপেক্ষে দ্বিতীয় সুরের সুরবিরাম $= \frac{n_2}{n_3}$।

সুতরাং, তৃতীয়টির সাপেক্ষে প্রথমটির সুরবিরাম $= \frac{n_1}{n_3} = \frac{n_1}{n_2} \times \frac{n_2}{n_3}$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে, যে কোন দুটি শব্দের সুরের সুরবিরাম এদের মধ্যবর্তী সুরবিরামগুলোর গুণফলের সমান।

হারমোনিয়াম বা পিয়ানোতে কতগুলো চাবি আছে, যাদের প্রত্যেকের একটি করে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক থাকে। এই কম্পাঙ্কগুলোর সুরবিরামের মধ্যে এমন একটা সামঞ্জস্য থাকে যে এদেরকে বাজালে কতগুলো নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের সুর বের হয় এবং সুরগুলো মিলে স্বরের উৎপত্তি হয় যা কণ্ঠস্বরের উপযোগী হয়।

বিভিন্ন সুরবিরামের বিভিন্ন নামকরণ করা হয়। নিচের সারণিতে এদের নাম উল্লেখ করা হল ঃ

সুরবিরাম	নাম	সুরবিরাম	নাম
1 : 1	সমায়ন (Unision)	5 : 3	গুরু ষষ্ঠক (Major sixth)
2 : 1	অষ্টক (Octave)	8 : 5	লঘু ষষ্ঠক (Minor sixth)
3 : 2	পঞ্চক (Fifth)	9 : 8	গুরু সুর (Major tone)
4 : 3	চতুর্থক (Fourth)	10 : 9	লঘু সুর (Minor tone)
5 : 4	গুরু তিস্রক (Major third)	16 : 15	অর্ধ সুর (Semi-tone)
6 : 5	লঘু তিস্রক (Minor third)		

সম-সঙ্গতি ও বিষম-সঙ্গতি (Concord or consonance and discord or desonance) ঃ দুই বা ততোধিক সুরের মিলিত ক্রিয়ায় তৃতীয় একটি সুরযুক্ত শব্দ উৎপত্তি হলে এরূপ সমন্বয়কে সম-সঙ্গতি বলে। দুই বা ততোধিক সুরের ক্রিয়ায় একটি সুরবর্জিত শব্দ উৎপন্ন হলে ঐ সমন্বয়কে বিষম-সঙ্গতি বলে।

দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাত একটি পূর্ণ সংখ্যা 1, 2, 3 ইত্যাদি হলে এবং সুর দুটি একই সময় ধ্বনিত হলে একটি সুরযুক্ত শব্দের উৎপত্তি হবে। সুতরাং, এরূপ দুটি সুরের সমন্বয়ই সম-সঙ্গতি।

এক-অষ্টক (One-octave) ঃ কোন একটি সুরের কম্পাঙ্ক অপর একটি সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হলে প্রথমটির কম্পাঙ্ক দ্বিতীয়টির এক-অষ্টক বলা হয়। বিপরীতক্রমে দ্বিতীয়টির কম্পাঙ্ক প্রথমটির এক-অষ্টক নিচে বলা হয়। কোন একটি অষ্টকের অন্তর্গত আটটি সম-সঙ্গাতিপূর্ণ সুরকে সুরাষ্টক বলে।

১৮·২৭ স্বর-গ্রাম
Musical scale

স্বর-গ্রাম বলতে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের কতকগুলো সাজানো সুর বুঝায়। যে সব সুর আমাদের কানে সহজে সাড়া দেয় এবং কণ্ঠস্বরের উপযোগী হয় স্বর-গ্রামে ঐ সব সুরকে ঢেলে সাজানো হয়। পরীক্ষায় দেখা যায় যে, কোন নির্দিষ্ট সুর ও তার দ্বিগুণ কম্পাঙ্কবিশিষ্ট অপর একটি সুরের মধ্যে প্রথম সুরের কম্পাঙ্ক অনুযায়ী, বিভিন্ন কম্পাঙ্কের কতকগুলো সুর সন্নিবেশ করলে সমসংগতি বজায় থাকে। এরূপ সমসজ্ঞাতিপূর্ণ কতকগুলো সুরের সমষ্টিকে **স্বর-গ্রাম** বলে। সর্বাপেক্ষা কম কম্পাঙ্কের সূচনা সুরকে টোনিক (tonic or key tone) বলে।

হারমোনিয়াম ও পিয়ানোতে কতকগুলো চাবি এবং বাঁশিতে কতকগুলো ছিদ্র আছে। এ চাবি বা ছিদ্রগুলো একটি নির্দিষ্ট স্বরগ্রামে সাজানো থাকে। বেহালায় হাতের কায়দায় তারের বিভিন্ন স্থানে আঙ্গুল চেপে সুরযুক্ত শব্দ সৃষ্টি করা হয়। সেতার ও এস্রাজে কতকগুলো ঘাট থাকে যাদের সাহায্যে ইচ্ছেমত স্বর-গ্রামের সুরগুলোর সুরবিভেদ পরিবর্তন করা যায়।

১৮·২৮ ডায়াটোনিক স্বরগ্রাম
Diatonic scale

একটি বিশেষ সুর ও এর এক অষ্টক উপরের সুরের মধ্যে সম-সঙ্গাতিপূর্ণ বিভিন্ন কম্পাঙ্কের আরও ছয়টি সুর সন্নিবেশ করে যে স্বর গ্রাম প্রস্তুত করা হয় তাকে **ডায়াটোনিক স্বরগ্রাম** বলে। সাধারণত সূচনা সুরের কম্পাঙ্ক 256 গণ্য করা হয়। সুরগুলোর বাংলাদেশী ও পাশ্চাত্য নাম, প্রতীক, সুরবিরাম, আপেক্ষিক কম্পাঙ্ক প্রভৃতি নিচে দেয়া হল।

সুর	টোনিক	উপসুর						অষ্টক
বাংলাদেশী	সা	রে	গা	মা	পা	ধা	নি	র্সা
পাশ্চাত্য (ইংরেজি) নাম	do	re	mi	fa	sol	la	Ti	do
পাশ্চাত্য (ইংরেজি) প্রতীক	C	D	E	F	G	A	B	c
সুরের কম্পাঙ্ক (Hz)	256	288	320	341·33	384	426·66	480	512
আপেক্ষিক কম্পাঙ্ক (পূর্ণ সংখ্যায়)	24	27	30	32	36	40	45	48
টোনিকের সাপেক্ষে (সুরবিরাম)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
পর পর দুটি সুরের সুর বিরাম		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

ডায়াটোনিক স্বরগ্রামের সুরগুলোর বাংলাদেশী নাম অনুসারে 'সা'-ই এই সুরাষ্টকের টোনিক। সুরবিরাম অনুসারে রে ঃ সা, পা ঃ মা ও নি ঃ ধা গুরু সুর ; গা ঃ রে ও ধা ঃ পা লঘু এবং সা ঃ নি ও মা ঃ গা অর্ধসুর। গুরু সুরগুলোকে কোন কোন ক্ষেত্রে প্রধান ডায়াটোনিক স্বরগ্রাম বলে।

BG & JEWEL

১৮·২৯ সংগীতে কয়েকটি ব্যবহারিক শব্দ
Some words used in music

সঙ্গীতে নিম্নলিখিত শব্দগুলোর বহুল প্রচলন দেখা যায় ঃ

(১) **ত্রয়ী (Triad)** ঃ তিনটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 হলে তাদের সমন্বয়ে যে সুরযুক্ত শব্দের উৎপত্তি হয় তাকে ত্রয়ী বলে। সা ঃ গা ঃ পা = 256 320 : 384 = 4 : 5 : 6 এবং মা ঃ ধা ঃ র্সা = 341·33 426·66 ঃ 512 = 4 : 5 6 ; কাজেই 256, 320 ও 384 কম্পাঙ্ক এবং 341·33, 426·66 ও 512 কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুরের সমন্বয়ে উৎপন্ন শব্দ ত্রয়ী।

(২) **স্বর-সঙ্গাতি (Chord)** ঃ চারটি শব্দের কম্পাঙ্কের অনুপাত 4 : 5 : 6 : 8 হলে তাদের সমন্বয়ে এক প্রকার শ্রুতিমধুর শব্দের উৎপত্তি হয়। এরূপ সমন্বয়কে **স্বর-সঙ্গাতি** বা **সমসংগতি** বলে। সুতরাং ত্রয়ী ও ত্রয়ীর নিম্নতম কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দের সমন্বয় স্বর-সঙ্গাতি। কিন্তু সমন্বয় যদি শ্রুতিমধুর না হয় অর্থাৎ শ্রুতিকটু হয় তবে ঐ সমন্বয়কে **বিষম সঙ্গাতি** বলে।

(৩) **সমতান বা হারমোনি (Harmony)** ঃ একই সময় কতকগুলো শব্দ উৎপন্ন হলে যদি তাদের মধ্যে একটি ঐকতানের সৃষ্টি হয় তবে তাকে সমতান বলে।

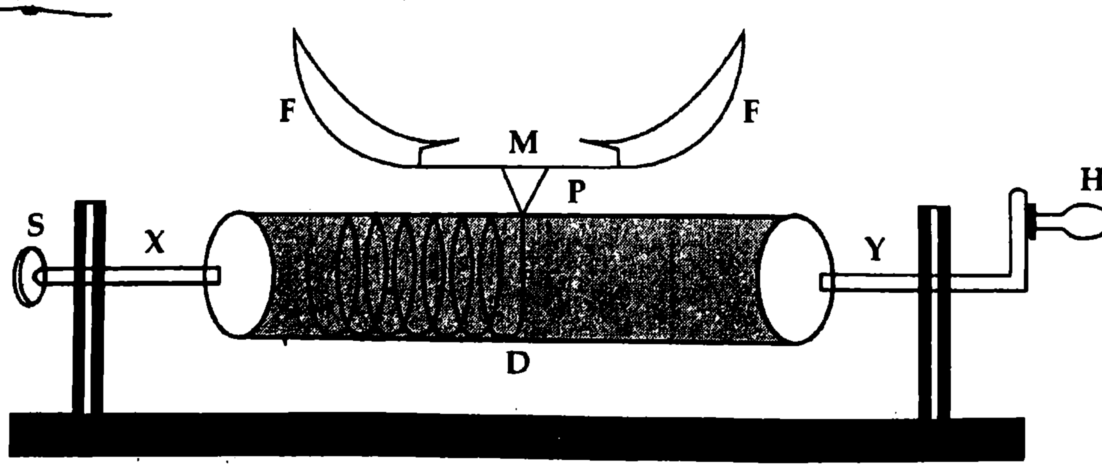
(৪) **স্বরমাধুর্য বা মেলডি (Melody)** ঃ কতকগুলো শব্দ একের পর এক উৎপন্ন হয়ে যদি একটি সুরযুক্ত শব্দের সৃষ্টি করে তবে তাকে মেলডি বলে।

(৫) **সলো (Solo)** ঃ একটি মাত্র বাদ্যযন্ত্র হতে যে স্বর সৃষ্টি হয় তাকে সলো বা একক সঙ্গীত বলে। একটি বেহালা বা পিয়ানো হতে উৎপন্ন স্বরই সলো।

(৬) **অর্কেস্ট্রা (Orchestra)** ঃ যখন একাধিক বাদ্যযন্ত্র একত্রে বাজিয়ে একটি সমতান অথবা মেলডি অথবা সমতান মেলডি উভয়ই উৎপন্ন করে তখন তাকে অর্কেস্ট্রা বলে।

১৮·৩০ ফনোগ্রাফ
Phonograph

টমাস আলভা এডিসন (Thomas Alva Edison) 1878 খ্রিস্টাব্দে শব্দ গ্রহণ ও পুনরুৎপাদনের জন্য এই যন্ত্রটি উদ্ভাবন করেন। এর বর্ণনা নিচে দেওয়া হল।



চিত্র ১৮·১৫

এই যন্ত্রে একটি হর্ণ (F, F) কাচ বা অভ্রের পাতলা পর্দা M দ্বারা বন্ধ থাকে [চিত্র ১৮·১৬]। পর্দাটির সাথে একটি পিন অভিলম্বভাবে লাগান আছে। শব্দ গ্রহণের সময় মোমের প্রলেপযুক্ত একটি ড্রাম D-এর উপর এই পিনটি স্থাপন করা হয়। এই ড্রামটিকে এর অক্ষ XY-এর চতুর্দিকে একটি হাতল H-এর সাহায্যে ঘুরান যায়। ঘূর্ণনকালে একটি স্ক্রু S-এর সাহায্যে এটাকে পার্শ্বের দিকে সরান হয়। এতে ক্রমে ক্রমে ড্রামের বিভিন্ন অংশ পিনের নিচে আসে।

হর্ণের মুখে কথা বললে অথবা যে শব্দের রেকর্ড নিতে হবে তা উচ্চারিত হলে পর্দা M-এ কম্পন সৃষ্টি হয় এবং এতে পিনটি উঠা-নামা করে। এই অবস্থায় ড্রামটিকে অনবরত ঘুরিয়ে স্ক্রু-এর সাহায্যে পার্শ্বের দিকে সরাতে থাকলে পিনটি ড্রামের উপরকার মোমের পর্দায়, কম্পনের তারতম্য অনুসারে বিভিন্ন গভীরতায় দাগ কেটে চলে এবং শব্দের হুবহু ছাপ তৈরি করে। একে রেকর্ড বলে।

শব্দের পুনরুৎপাদনের ক্ষেত্রে গৃহীত রেকর্ডের উপরকার দাগের গোড়ায় একটি পিন বসিয়ে ড্রামটিকে ঠিক আগের মত ঘুরাতে হয়। এতে পিনটি দাগের উপর দিয়ে চলার সময় দাগের গভীরতা অনুসারে উঠা-নামা করতে থাকে এবং পর্দায় গৃহীত শব্দের অনুরূপ কম্পন সৃষ্টি করে। পর্দার এই কম্পনে রেকর্ডের সময় যেরূপ শব্দ হয়েছিল মোটামুটি তারই পুনরুৎপাদন ঘটে।

ব্যবহার অসুবিধা ঃ ১। মোমের উপর শব্দের রেকর্ড আপনা-আপনি ও পিনের ক্রিয়ায় ধীরে ধীরে নষ্ট হয়ে যায়। (২) রেকর্ড হতে যে শব্দ পাওয়া যায় তা মূল শব্দ হতে খানিকটা বিকৃত হয়।

১৮·৩১ গ্রামোফোন
Gramophone

এটি এক প্রকার উন্নত ধরনের ফনোগ্রাফ। ফনোগ্রাফের ড্রামের পরিবর্তে গ্রামোফোনের শেলাক, তেপাল প্রভৃতি শক্ত পদার্থের চাকতি ব্যবহৃত হয়। ফনোগ্রাফ ড্রামটিকে হাত বা বৈদ্যুতিক মোটরের সাহায্যে ঘুরানো হয়, কিন্তু গ্রামোফোনে চাকতিটিকে স্প্রিং-এর সাহায্যে ঘুরানো হয়। শেলাক, তেপাল প্রভৃতি ফনোগ্রাফের ড্রামের উপরকার মোমের মত সহজে নষ্ট হয় না। এ ছাড়া শব্দের রেকর্ড চাকতির কিনারা হতে কেন্দ্র পর্যন্ত বিস্তৃত হয় এবং পিন সমান গভীরতায় আঁকা-বাঁকা দাগ কেটে যায়। দাগের গভীরতা সমান থাকায় শব্দের পুনরুৎপাদনে পিন রেকর্ডের আঁকা-বাঁকা রেখার উপর দিয়ে উপরে-নিচে উঠা-নামা করে অতি সহজে ইততস্ত কাঁপে এবং এতে রেকর্ড ভাল থাকে।

স্মরণিকা

সুর ঃ একটি মাত্র কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দকে সুর বলে।

স্বর ঃ একাধিক কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দকে স্বর বলে।

মূল সুর ও উপসুর ঃ কোন স্বর যে সব সুরের মিশ্রণে উৎপন্ন হয় তাদের মধ্যকার ন্যূনতম কম্পাঙ্কের সুরকে মূল সুর বলে। মূল সুর ছাড়া অন্য সকল সুর যার কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি তাদেরকে উপসুর বলে।

সমমেল বা হারমোনিক ঃ উপসুরগুলোর কম্পাঙ্ক মূল সুরের কম্পাঙ্কের সরল গুণিতক হলে তাদেরকে সমমেল বা হারমোনিক বলে।

সুরযুক্ত বা সুশ্রাব্য শব্দ ও সুরবর্জিত শব্দ বা কোলাহল ঃ উৎসের কম্পন নিয়মিত বা পর্যাবৃত্ত হলে যে শব্দের সৃষ্টি হয় তাকে সুরযুক্ত বা সুশ্রাব্য শব্দ বলে। উৎসের কম্পন অনিয়মিত বা অপর্যাবৃত্ত হলে নিঃসৃত শব্দকে সুরবর্জিত শব্দ বা কোলাহল বলে।

শব্দোচ্চতা ঃ যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা একটি শব্দ অন্য একটি শব্দ হতে কত বেশি জোরালো তা বুঝা যায় তাকে শব্দের শব্দোচ্চতা বলে।

শব্দের তীব্রতা বা প্রাবল্য ঃ শব্দের গতিপথে লম্বভাবে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারপাশে একক ক্ষেত্রফলের মধ্য দিয়ে যে পরিমাণ শক্তি প্রতি সেকেন্ডে প্রবাহিত হয় তাকে শব্দের তীব্রতা বা প্রাবল্য বলে।

তীক্ষ্ণতা ঃ শব্দের যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা কোন্ সুর চড়া ও কোন্ সুর মোটা তা বুঝা যায় তাকে তীক্ষ্ণতা বলে।

জাতি বা গুণ ঃ যে বৈশিষ্ট্য দ্বারা দুটি ভিন্ন উৎস হতে নির্গত শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা এক হলেও তাদের একটিকে অন্যটি হতে পৃথক করা যায়, তাকে তার জাতি বা গুণ বলে।

প্রমাণ তীব্রতা ঃ 1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট $10^{-12}\ Wm^{-2}$ তীব্রতাকে প্রমাণ তীব্রতা বলে।

তীব্রতা লেভেল ঃ যে কোন শব্দের তীব্রতা এবং প্রমাণ তীব্রতার শব্দের শব্দোচ্চতার পার্থক্যকে তীব্রতা লেভেল বলে। অথবা, কোন শব্দের তীব্রতা ও প্রমাণ তীব্রতার অনুপাতের লগারিদমকে ঐ শব্দের তীব্রতা লেভেল বলে।

ডেসিবেলঃ শব্দের তীব্রতা যখন $10^{0.1}$ বা 1.259 গুণ বৃদ্ধি পায় তখন শব্দোচ্চতা যতটুকু বাড়ে তাকে 1 ডেসিবেল বলে।

বীট বা স্বরকম্প ঃ প্রায় সমান কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একই দিকে অগ্রগামী দুটি শব্দ তরঙ্গের উপরিপাতনের ফলে শব্দের লব্ধি প্রাবল্যের যে হ্রাস-বৃদ্ধি ঘটে তাকে বীট বা স্বরকম্প বলে।

মুক্ত বা স্বাভাবিক কম্পন ঃ স্পন্দনক্ষম যে কোন বস্তুকে আন্দোলিত করলে বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট কম্পাঙ্ক ও পর্যায়কালে স্পন্দিত হয়। এই স্পন্দনকে মুক্ত কম্পন বা স্বাভাবিক কম্পন বলে।

পরবশ বা আরোপিত কম্পন ঃ স্পন্দনক্ষম বস্তুর উপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের জন্য বস্তুটি তার স্বাভাবিক কম্পাঙ্কে কম্পিত হওয়ার পরিবর্তে যখন আরোপিত কম্পনের কম্পাঙ্কে স্পন্দিত হতে থাকে তখন এ কম্পনকে আরোপিত বা পরবশ কম্পন বলে।

অনুনাদ ঃ কোন বস্তুর উপর আরোপিত পর্যাবৃত্ত স্পন্দনের কম্পাঙ্ক বস্তুটির স্বাভাবিক কম্পাঙ্কের সমান হলে বস্তুটি সর্বোচ্চ বিস্তারে কম্পিত হয়। এ ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে।

সুরবিরাম ঃ দুটি সুরের কম্পাঙ্কের অনুপাতকে সুর বিরাম বলে।

অষ্টক ঃ কোন একটি সুরের কম্পাঙ্ক অপর একটি সুরের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হলে প্রথমটির কম্পাঙ্ককে দ্বিতীয়টির এক অষ্টক বলে।

স্বরগ্রাম ঃ স্বর-গ্রাম বলতে নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কের কতকগুলো সাজানো সুর বুঝায়।

ডায়াটোনিক স্বরগ্রাম ঃ একটি বিশেষ সুর ও এর এক অষ্টক উপরের সুরের মধ্যে সম-সঙ্গতিপূর্ণ বিভিন্ন কম্পাঙ্কের আরও ছয়টি সুর সন্নিবেশ করে যে স্বরগ্রাম প্রস্তুত করা হয় তাকে ডায়াটোনিক স্বরগ্রাম বলে।

সমতান বা হারমোনি ঃ একই সময়ে কতকগুলো শব্দ উৎপন্ন হলে যদি তাদের মধ্যে একটি ঐক্যতানের সৃষ্টি হয় তবে তাকে সমতান বা হারমোনি বলে।

মেলডি ঃ কতকগুলো শব্দ একের পর এক উৎপন্ন হয়ে যদি একটি সুরযুক্ত শব্দের সৃষ্টি করে তবে তাকে মেলডি বলে।

সলো ঃ একটি মাত্র বাদ্যযন্ত্র হতে যে স্বর সৃষ্টি হয় তাকে সলো বলে।

টানা তারের আড় কম্পনের সূত্র ঃ টানা তারের আড় কম্পনের তিনটি সূত্র রয়েছে, যথা ঃ

(১) দৈর্ঘ্যের সূত্র, (২) টানের সূত্র এবং (৩) ভরের সূত্র।

ফনোগ্রাফ ঃ এটি শব্দ গ্রহণ ও পুনরুৎপাদন যন্ত্র।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

$$S = K \log_{10} I \tag{1}$$

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB \tag{2}$$

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 = 10 \log_{10}\left(\frac{I_2}{I_1}\right) dB \tag{3}$$

$$\Delta\beta = 10 \log_{10} (P_2/P_1)\, dB \tag{4}$$

$$n_2 = n_1 \pm N \tag{5}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}} \tag{6}$$

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}} \tag{7}$$

$$n = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{T}{\pi\rho}} \tag{8}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2} \tag{9}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{10}$$

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{11}$$

খোলা নলে, $n = \frac{v}{2l}$ (12)

বদ্ধ নলে, $n = \frac{v}{4l}$ (13)

P.√

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। কোন শব্দের তীব্রতা প্রমাণ তীব্রতার 100 গুণ হলে ঐ শব্দের তীব্রতার লেভেল কত ডেসিবেল ?

[য. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$$\beta = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ বেল}$$

প্রশ্নানুযায়ী $I = 100\, I_0$

$$\beta = \log_{10}(100) = \log_{10}(10)^2 = 2 \text{ বেল} = 20 \text{ ডেসিবেল}$$

P.√

২। কোন জনসভায় শব্দের তীব্রতা 10^{-8} watt m^{-2}। শব্দের তীব্রতা লেভেল ডেসিবেলে নির্ণয় কর। শব্দের তীব্রতা তিনগুণ হলে নতুন তীব্রতা লেভেল কত হবে ?

[কু. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৩]

এখানে,
প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$
জনসভায় শব্দের তীব্রতা, $I = 10^{-8}\ Wm^{-2}$
তীব্রতা লেভেল, $\beta = ?$
আবার, $I' = 3I = 3 \times 10^{-8}\ Wm^{-2}$
$\beta' = ?$

আমরা জানি,

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-8}}{10^{-12}} = 10 \log (10^4) = 40\ dB$$

আবার, $\beta' = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{3 \times 10^{-8}}{1 \times 10^{-12}}$

$$= 10 \log 3 \times 10^4 = 44{\cdot}77\ dB$$

৩। কোন শ্রেণীকক্ষের শব্দের তীব্রতা $1 \times 10^{-6}\ Wm^{-2}$ হলে শব্দের তীব্রতা লেভেল ডেসিবেলে নির্ণয় কর।

[ঢা. বো. ২০০৬, ২০০১; য. বো. ২০০৪,'০২ ; চ. বো. ২০০৩]

এখানে,
প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12}\ Wm^{-2}$
শ্রেণীকক্ষের শব্দ তীব্রতা, $I = 10^{-6}\ Wm^{-2}$
তীব্রতা লেভেল, $\beta = ?$

আমরা জানি,

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log 10^6 = 60\ dB$$

P.√

৪। একটি ক্যাসেট প্লেয়ার হতে নিঃসৃত শব্দের ক্ষমতা 30mW হতে 60mW-এ পরিবর্তিত হলে শব্দের তীব্রতা লেভেলের কত পরিবর্তন হবে ?

এখানে,
নিঃসৃত শব্দের প্রাথমিক ক্ষমতা,
$\beta_1 = 30\ mW = 30 \times 10^{-3}\ W$
নিঃসৃত শব্দের পরিবর্তিত ক্ষমতা,
$\beta_2 = 60\ mW = 60 \times 10^{-3}\ W$
$\Delta\beta = ?$

মনে করি, শব্দের তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন $= \Delta\beta$

আমরা জানি,

$$\Delta\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = 10 \log_{10}\left(\frac{60 \times 10^{-3}\ W}{30 \times 10^{-3}\ W}\right) = 10 \log_{10}(2) = 3dB$$

BG & JEWEL

৫। দুটি সুরশলাকাকে একই সময়ে কম্পিত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট সৃষ্টি হয়। একটি শলাকা কোন টানা তারের 1·18 m দৈর্ঘ্যের সাথে এবং অপরটি ঐ তারের 1·20 m দৈর্ঘ্যের সাথে ঐক্যতান হয়। সুরশলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ব. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 1{\cdot}18}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

এবং $n_2 = \frac{1}{2 \times 1{\cdot}20}\sqrt{\frac{T}{m}}$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18}$$

পুনঃ $n_1 - n_2 = 5$

উভয়পক্ষ n_2 দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{n_1}{n_2} - 1 = \frac{5}{n_2}$$

বা, $\frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18} - 1 = \frac{5}{n_2}$

বা, $\frac{1{\cdot}20 - 1{\cdot}18}{1{\cdot}18} = \frac{5}{n_2}$

বা, $n_2 = \frac{5 \times 1{\cdot}18}{0{\cdot}02} = 295 \text{ Hz}$

$\therefore$ $n_1 = \frac{1{\cdot}20}{1{\cdot}18} \times 295$

$= 300 \text{ Hz}$

এখানে,
$l_1 = 1{\cdot}18 \text{ m}$
$l_2 = 1{\cdot}20 \text{ m}$
$N = n_1 - n_2 = 5$
$n_1 = ?$
$n_2 = ?$

P.√

৬। কোন শ্রেণীকক্ষে শব্দের তীব্রতা 10^{-7}Wm^{-2}। শব্দের তীব্রতা দ্বিগুণ হলে নতুন তীব্রতা লেবেল কত হবে ? [ব. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৫]

আমরা জানি,

$$\alpha = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}}$$

$$= 10 \log 10^5$$

$$= 50\, dB$$

আবার, আমরা জানি,

$$\alpha = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{2I}{I_0}$$

$$= 10 \log \frac{2 \times 10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 2 \times 10^5$$

$$= 53{\cdot}01\, dB$$

এখানে,
তীব্রতা, $I = 10^{-7} \text{ Wm}^{-2}$
প্রমাণ তীব্রতা, $I_0 = 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}$
তীব্রতা লেবেল, $\alpha = ?$
আবার,
$I' = 2I = 2 \times 10^{-7} \text{ Wm}^{-2}$
$\alpha = ?$

√

২.√

৭। A ও B দুটি সুরেলী কাঁটা একত্রে শব্দায়িত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট শোনা যায়। A-এর বাহুর ভর কিছু কমালে বীট উৎপত্তির হার বৃদ্ধি পায়। B-এর কম্পাঙ্ক 512 Hz হলে A-এর প্রকৃত কম্পাঙ্ক কত ?

আমরা পাই, $N = n_1 \sim n_2$

প্রশ্নানুসারে ভর হ্রাসে A-এর কম্পাঙ্ক বৃদ্ধি পায়। এতে বীট উৎপত্তির হার বৃদ্ধি পায় হেতু তাদের কম্পাঙ্কের পার্থক্যও বৃদ্ধি পায়।

A-এর কম্পাঙ্ক, $n_1 >$ B-এর কম্পাঙ্ক, n_2

সুতরাং, $n_1 - n_2 = N$

এখানে, $N = 5$ বীট/সে. ও $n_2 = 512 \text{ Hz}$

$$n_1 = N + n_2 = (512 + 5) \text{ Hz} = 517 \text{ Hz}$$

ভর ও বীট:
বাড়ে বাড়ে / কমে কমে
বাড়ে কমে / কমে বাড়ে

৮। দুটি সুর শলাকা A ও B একই সময় শব্দায়িত হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন হয়। কিন্তু A-তে খানিকটা মোম লাগালে বীটের সংখ্যা হ্রাস পায়। B-এর কম্পাঙ্ক 320 Hz হলে, A-এর কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $N = n_1 \sim n_2$

প্রশ্নানুসারে ভরের বৃদ্ধিতে A-এর কম্পাঙ্ক হ্রাস পায়।

কাজেই A-এর কম্পাঙ্ক,

$n_1 >$ B-এর কম্পাঙ্ক, n_2

কাজেই, $N = n_1 - n_2$

এখানে, $N = 6$ বীট/সে. ও $n_2 = 320$ Hz

$n_1 = n_2 + N = (320 + 6)$ Hz

$= 326$ Hz

৯। 64টি সুর শলাকা ক্রমবর্ধমান কম্পাঙ্কে সাজানো আছে। তাদের শেষটির কম্পাঙ্ক প্রথমটির দ্বিগুণ এবং পর পর যে কোন দুটি শলাকা প্রতি সেকেন্ডে 4টি বীট উৎপন্ন করে। প্রথম সুর শলাকার কম্পাঙ্ক কত ?

ধরি প্রথমটির কম্পাঙ্ক = n

তা হলে শেষটির কম্পাঙ্ক = $2n$

আবার পর্যায়ক্রমিক দুটি সুর-শলাকার কম্পাঙ্কের পার্থক্য = 4 Hz

দ্বিতীয় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + 4$

$= n + (2 - 1)4$

তৃতীয় সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + 4 + 4 = n + (3 - 1)4$

চতুর্থ সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + (4 - 1)4$

64-তম সুর শলাকার কম্পাঙ্ক $= n + (64 - 1)\,4$

কিন্তু, $n + (64 - 1)\,4 = 2n$

$n = (64 - 1)4 = 252$ Hz

১০। দুটি সুর শলাকা একটি গ্যাসে 0·50 m এবং 0·505 m দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ উৎপন্ন করে। যদি প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন হয় তবে উক্ত গ্যাসে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

[রা. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০২]

মনে করি গ্যাসে শব্দের বেগ = v

আমরা জানি,

$$v = n_1\lambda_1 \qquad (1)$$

এবং

$$v = n_2\lambda_2 \qquad (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হতে পাই

$$n_1 = \frac{v}{\lambda_1} \qquad (3)$$

এবং $$n_2 = \frac{v}{\lambda_2} \qquad (4)$$

কিন্তু $N = n_1 - n_2$ (5) [$\lambda_1 < \lambda_2$]

এখন সমীকরণ (5) হতে পাই

$$N = \frac{v}{\lambda_1} - \frac{v}{\lambda_2}$$

বা, $$6 = v\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

বা, $$6 = v\left(\frac{1}{0·50} - \frac{1}{0·505}\right)$$

বা, $$v = \frac{0·50 \times 0·505 \times 6}{0·005} = 303 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,

$N = 6$

$\lambda_2 = 0·50$ m

$\lambda_2 = 0·505$ m

১১। দুটি সুরশলাকা A ও B একই সাথে শব্দায়িত হওয়ায় প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়। কিন্তু A-তে খানিকটা মোম লাগিয়ে ওজন বাড়ালে বীট সংখ্যা কমে যায়। B-এর কম্পাঙ্ক 256 Hz হলে A-এর কম্পাঙ্ক কত ?

[ব. বো. ২০০৫]

আমরা জানি,

$$n_A = n_B \pm N$$

যেহেতু A সুর শলাকার বাহুতে মোম লাগানোর ফলে বীট সংখ্যা বৃদ্ধি পায় ; কাজেই $n_A > n_B$ হবে। অতএব,

$$n_A = n_B + N = 256 + 5 = 261$$

$$n_A = 261 \text{ Hz}$$

এখানে,
$N = 5$
$n_B = 256$ Hz
$n_A = ?$

১২। 9·8N বলে টানা একটি তারের কম্পাঙ্ক 320 Hz। তারের টান কত হলে কম্পাঙ্ক 256 Hz হবে।

আমরা পাই, $n \propto \sqrt{T}$

$n =$ ধ্রুব $\times \sqrt{T}$

কাজেই, T_1 ও T_2 টানে কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2 হলে,

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

ধরি নির্ণেয় টান $= T_2$

প্রশ্নানুযায়ী, $n_1 = 320$ Hz, $T_1 = 9{\cdot}8$N ও

$n_2 = 256$ Hz

$$T_2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} \times T_1 = \frac{256^2}{320^2} \times 9{\cdot}8\text{N}$$

$$= 6{\cdot}27 \text{ N}$$

২।

১৩। একটি টানা তারের দৈর্ঘ্য 0·5 m এবং টান 3 kg ভরের ওজনের সমান। তারটির আড় কম্পনের মূল সুরের সাথে কত কম্পাঙ্কের একটি সুরেলী কাঁটার সুর ঐকতানিক হবে ? [তারের এক মিটার দৈর্ঘ্যের ভর $= 3{\cdot}27 \times 10^{-4}$ kg ও $g = 9{\cdot}81$ ms^{-2}]।

আমরা পাই, $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$

এখানে,
$l = 0{\cdot}5$ m
$T = Mg = 3 \times 9{\cdot}81$N
$m = 3{\cdot}27 \times 10^{-4}$ kg m^{-1}
$n = ?$

নির্ণেয় কম্পাঙ্ক $n = \frac{1}{2 \times 0{\cdot}5 \text{ m}} \sqrt{\frac{3 \times 9{\cdot}81 \text{ N}}{3{\cdot}27 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-1}}}$

$= 300$ Hz

১৪। 60 cm দীর্ঘ একটি টানা তার একটি সুরেলী কাঁটার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান অর্ধেক করে ঐক্যতানে আনতে কত দৈর্ঘ্যের প্রয়োজন ?

[রা. বো. ২০০৫]

যেহেতু সুরেলী কাঁটা টানা তারের সাথে ঐক্যতানে আছে, সুতরাং উভয়ের কম্পাঙ্ক একই।

ধরি, কম্পাঙ্ক $= n$

আমরা পাই, $n = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$

এখানে,
$l_1 = 60$ cm $= 0{\cdot}6$ m
প্রাথমিক টান $= T_1$
চূড়ান্ত টান, $T_2 = \frac{T_1}{2}$
$l_2 = ?$

বা, $n = \frac{1}{2 \times 0{\cdot}6}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$ (i)

আবার, $n = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$

বা, $n = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_1}{2m}}$ (ii)

(i) ও (ii) থেকে পাই, $\frac{1}{\cancel{2}\times 0.6}\sqrt{\frac{T_1}{m}} = \frac{1}{\cancel{2}l_2}\sqrt{\frac{T_1}{2m}}$

বা, $\frac{1}{\cancel{2}\times 0.6}\cancel{\sqrt{\frac{T_1}{m}}} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}\,l_2}\cancel{\sqrt{\frac{T_1}{m}}}$

বা, $\cancel{2}\sqrt{2}\,l_2 = \cancel{2}\times 0.6$

বা, $l_2 = \frac{\cancel{2}\times 0.6}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{0.6}{\sqrt{2}}$

$l_2 = 0.42$ m

১৫। 50 cm দৈর্ঘ্যের একটি টানা তার একটি সুরেলী কাঁটার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান চারগুণ করলে ঐক্যতানে আনতে তারটির দৈর্ঘ্য কত করতে হবে ? [য. বো. ২০০৩]

এখানে,
$l_1 = 50$ cm $= 0.50$ m
$l_2 = ?$

আমরা জানি,

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad (1)$$

আবার, $n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}}$ (2)

প্রশ্নমতে, $n_1 = n_2$

$$\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}}$$

বা, $\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{4T}{m}}$ বা, $\frac{T}{m} = \frac{l_1^2}{l_2^2}\frac{4T}{m}$

বা, $1 = \frac{l_1^2}{l_2^2}\times 4$ বা, $\frac{l_2^2}{l_1^2} = 4$

বা, $\frac{l_2}{l_1} = 2$ বা, $l_2 = 2\times l_1$

$l_2 = 2\times 0.50$ m $= \underline{1\text{ m}}$

১৬। 40 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি টানা তার কোন একটি সুর শলাকার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান দ্বিগুণ করলে ঐক্যতানে আনতে কত দৈর্ঘ্যের প্রয়োজন হবে ? [চ. বো. ২০০৬ ; সি. বো. ২০০৪]

এখানে,
$l_1 = 40$ cm $= 0.40$ m
$l_2 = ?$

আমরা জানি,

$$n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} \quad (1)$$

$$n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{2T}{m}} \quad (2)$$

প্রশ্নমতে, $n_1 = n_2$

$$\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{2T}{m}}$$

বা, $\sqrt{\frac{T}{m}} = \frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{2T}{m}}$

বা, $\frac{T}{m} = \frac{l_1^2}{l_2^2}\frac{2T}{m}$

বা, $1 = \frac{l_1^2}{l_2^2} \times 2$

বা, $\frac{l_2^2}{l_1^2} = 2$

বা, $\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{2}$

বা, $l_2 = \sqrt{2} \times l_1$

বা, $l_2 = \sqrt{2} \times 0.40$

$l_2 = 0.57\ \text{m}$

১৭। একটি সনোমিটারের তার 200 কম্পাঙ্কযুক্ত একটি টিউনিং ফর্কের সাথে ঐক্যতানে থাকে। তারের টান ঠিক রেখে সনোমিটার তারের দৈর্ঘ্য 1% বৃদ্ধি করলে প্রতি সেকেন্ডে কয়টি বীট শুনা যাবে ? [য. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; সি. বো. ২০০৩]

এখানে,

$n_1 = 200$ Hz

$T = T_1 = T_2$

$l_1 = l$

$l_2 = l + \frac{l}{100} = l\left(1 + \frac{1}{100}\right)$

$= l(1 + 0.01) = 1.01\ l$

$n_2 = ?$

$n_1 \sim n_2 = ?$

আমরা জানি,

$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}$

বা, $\frac{200}{n_2} = \frac{1.01l}{l}$

বা, $\frac{200}{n_2} = 1.01$

বা, $n_2 = \frac{200}{1.01}$

$= 198$ Hz

প্রতি সেকেন্ডে বিটের সংখ্যা $= n_1 - n_2 = 200 - 198$

$= 2$

১৮। একটি দুই মুখ খোলা নলের প্রথম উপসুরের কম্পাঙ্ক 512 Hz। বায়ুতে শব্দের বেগ = 345.6 ms⁻¹ হলে, নলের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ধরি নলের দৈর্ঘ্য $= l$ ও নলের মূল সুরের কম্পাঙ্ক $= n$

তাহলে, $2n = 512$ Hz ও

$n = \frac{v}{2l}$

কাজেই, $l = \frac{v}{2n} = \frac{345.6\ \text{ms}^{-1}}{512\ \text{Hz}} = 0.675\ \text{m}$

১৯। একটি সুর 512 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুরশলাকার সাথে প্রতি সেকেন্ডে 4টি বীট এবং 514 Hz কম্পাঙ্কের অপর একটি সুরশলাকার সাথে প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন করে। সুরটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৫]

এখানে,

কম্পাঙ্ক, $n_2 = 512$ Hz

বীট সংখ্যা, $N = n_2 \sim n_1 = 4$

$n_1 = ?$

নির্ণেয় অজানা কম্পাঙ্ক $= n_1$

যেহেতু জানা কম্পাঙ্কে বৃদ্ধিতে বীট বৃদ্ধি পায় কাজেই জানা কম্পাঙ্ক অজানা কম্পাঙ্কের চেয়ে বড় হবে।

অর্থাৎ $n_2 > n_1$

সুতরাং, $N = n_2 - n_1$

বা, $n_1 = n_2 - N$

$= 512 - 4$

$= 508$

$n_1 = 508$ Hz

২০। দুটি সুরেলী কাঁটায় প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়। কোন একটি টানা তারের 1·28 m দৈর্ঘ্যের সাথে একটি কাঁটা ও 1·30 m দৈর্ঘ্যের সাথে অপর কাঁটাটি ধ্বনি সমন্বয় করে। সুরেলী কাঁটাদ্বয়ের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০০৬]

এখানে,

$l_1 = 1·28$ m

$l_2 = 1·30$ m

$N = n_1 \sim n_2 = 5$

$n_2 = ?$

ধরা যাক কাঁটা দুটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2

আমরা জানি, $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$

তাহলে, $n_1 = \frac{1}{2 \times 1·28}\sqrt{\frac{T}{m}}$

ও $n_2 = \frac{1}{2 \times 1·30}\sqrt{\frac{T}{m}}$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{1·30}{1·28} > 1 \qquad (1)$$

কাজেই, $n_1 > n_2$

আবার $n_1 - n_2 = 5 \qquad (2)$

$$\frac{1·30}{1·28}\, n_2 - n_2 = 5$$

বা, $n_2 = \frac{5 \times 1·28}{0·02} = 320$ Hz ও

$n_1 = 5 + n_2 = (5 + 320)$ Hz $= 325$ Hz

২১। একটি সনোমিটারের তার কোন একটি বল দ্বারা টানা আছে। যদি টানা বল 4 গুণ বাড়ানো হয় এবং একই সাথে তারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হয় তবে পূর্বের ও পরের কম্পাঙ্কের অনুপাত কত হবে ? [চ. বো. ২০০২]

মনে করি কম্পাঙ্ক n_1 ও n_2 , টান T_1 ও T_2 এবং দৈর্ঘ্য l_1 ও l_2

তা হলে তারের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ভর m হলে, $n_1 = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}} \qquad (1)$

এবং $n_2 = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}} \qquad (2)$

এখন (1)-কে (2) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{l_2}{l_1}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \qquad (3)$$

শর্তানুসারে $l_2 = 2l_1$ এবং $T_2 = 4T_1$

(3) হতে পাই, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{2l_1}{l_1}\sqrt{\frac{T_1}{4T_1}}$

বা, $\frac{n_1}{n_2} = 2 \times \sqrt{\frac{1}{4}} = 1$ বা, $\frac{n_1}{n_2} = 1$

$n_1 : n_2 = 1 : 1$

P.V

২২। একটি একমুখ বন্ধ নলের বায়ুস্তম্ভের মৌলিক সুরের কম্পাঙ্ক 256 Hz হলে নলের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বায়ুতে শব্দের বেগ 332·8 ms⁻¹]

এখানে, $n = 256$ Hz

$v = 332·8$ ms^{-1}

ধরি, নলের নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= l$

আমরা পাই, $n = \frac{v}{4l}$

$$l = \frac{v}{4n} = \frac{332·8 \text{ ms}^{-1}}{4 \times 256 \text{ Hz}} = 0·325 \text{ m}$$

২৩। দুটি অভিন্ন ঐকতানিক তারের একটির দৈর্ঘ্য 0·36m এবং টান 100N। অপরটির টান 225N হলে এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে করি দৈর্ঘ্য = l_2

শর্তানুসারে,

$$n = \frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$$

বা, $$\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{T_1}{m}} = \frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$$

বা, $$\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \qquad (1)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $l_2 = 0·36 \times \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 0·36\sqrt{\frac{225}{100}}$

বা, $l_2 = 0·54$ m

এখানে $T_1 = 100N$

$T_2 = 225N$

$l_1 = 0·36$ m

২৪। একটি সনোমিটার তারের দৈর্ঘ্য পরিবর্তন না করে এর উপর প্রযুক্ত টান 4 গুণ বাড়িয়ে দেয়া হল। তারের কম্পাঙ্কের কত পরিবর্তন হবে ? [রা. বো. ২০০২]

আমরা জানি, $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$

মনে করি, ১ম ও ২য় ক্ষেত্রে তারটির কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2

$$n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_1}{m}} \qquad (1)$$

এবং $$n_2 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_2}{m}} \qquad (2)$$

এখন সমীকরণ (1)-কে (2) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{4T_1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \quad [\ T_2 = 4T_1]$$

$n_2 = 2n_1$ এবং $n_2 - n_1 = n_1$

সুতরাং পরের কম্পাঙ্ক পূর্বের কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হবে এবং কম্পাঙ্কের পরিবর্তন প্রাথমিক কম্পাঙ্কের সমান হবে।

২৫। একটি সাইরেনের চাকতি প্রতি সেকেন্ডে 10 বার ঘুরছে। চাকতিতে কতটি ছিদ্র থাকলে তা 480 কম্পাঙ্কের একটি সুর শলাকার সাথে ঐক্যতানিক হবে ?

মনে করি, ছিদ্রের সংখ্যা = m

আমরা পাই, $N = m \times n$

বা, $m = \frac{N}{n} \qquad (1)$

(1) হতে পাই,

$m = \frac{480}{10} = 48$

ছিদ্রের সংখ্যা 48টি।

এখানে,

$N = 480$ Hz

$n = 10$ Hz

২৬। A ও B দুটি সুরেলী কাঁটা একত্রে ধ্বনিত করলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হয়। A-কে একটু ঘষে পুনরায় ধ্বনিত করলে একই সংখ্যক বীট উৎপন্ন। B-এর কম্পাঙ্ক 510 Hz। ঘষার পূর্বে ও পরে A-এর কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর এবং ঘটনাটি ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০০০]

মনে করি A ও B সুর শলাকার কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_A ও n_B।

এখানে n_A অজানা কম্পাঙ্ক, $n_B = 510$ Hz এবং বীট সংখ্যা, N = 5

$$n_A = n_B \pm N \qquad (1)$$

ঘষার পর A-এর কম্পাঙ্ক

$$n_A = 510 + 5$$
$$= 515 \text{ Hz}$$

ঘর্ষার পূর্বে A-এর কম্পাঙ্ক

এবং $n_A = 510 - 5$

$= 505$ Hz

যেহেতু A সুর শলাকাকে ঘষা হয়েছে তাই ঘষার পর এর কম্পাঙ্ক পূর্বের তুলনায় বেড়ে যাবে। কাজেই ঘষার পূর্বে A-এর সম্ভাব্য কম্পাঙ্ক, $n_A = 515$ Hz বিবেচনা করলে ঘষার পর বীট সংখ্যা একই হবার সম্ভাবনা নেই। তাই ঘষার পূর্বে A-এর কম্পাঙ্ক = 505 Hz হবে এবং ঘষার পর A-এর কম্পাঙ্ক $n_A = 515$ Hz.

২৭। দুটি একই রকমের টানা তার সম কম্পাঙ্কের আড় কম্পনে কম্পিত হচ্ছে। একটি তারের টান 2% বৃদ্ধি করে কম্পিত করলে প্রতি সেকেণ্ডে 3টি বীট উৎপন্ন হয়। তার দুটির প্রারম্ভিক কম্পাঙ্ক কত ? [য. বো. ২০০০]

মনে করি,

তার দুটির প্রারম্ভিক কম্পাঙ্ক $= n_1$

টান বৃদ্ধির পর সংশ্লিষ্ট তারের কম্পাঙ্ক $= n_2$

শর্ত মতে,

$$n_2 - n_1 = 3$$

বা, $n_2 = n_1 + 3$ (1)

এখানে, $n_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_1}{m}}$ (2)

এবং $n_2 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T_2}{m}}$ (3)

(3)নং-কে (2) নং দ্বারা ভাগ করে,

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \qquad (4)$$

প্রশ্নানুযায়ী, $\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2}{100}$

বা, $\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{100}}$

বা, $\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{1 + \frac{2}{100}}$ বা, $\frac{n_1 + 3}{n_1} = \sqrt{1{\cdot}02}$

বা, $\frac{n_1 + 3}{n_1} = 1{\cdot}00995$ বা, $n_1 + 3 = 1{\cdot}00995 \times n_1$

বা, $0{\cdot}00995\ n_1 = 3$

বা, $n_1 = \frac{3}{0{\cdot}00995} = 301{\cdot}5$ Hz

২৮। 1 m ও 1·01 m তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের দুটি শব্দ তরঙ্গ কোন গ্যাসীয় মাধ্যমে 6 সেকেণ্ডে 20টি বীট উৎপন্ন করে। উক্ত গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০০৬; ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩, ২০০১]

মনে করি, শব্দের বেগ v ms^{-1} এবং প্রথম ও দ্বিতীয় শব্দের কম্পাঙ্ক যথাক্রমে n_1 ও n_2।

আমরা জানি, $v = n\lambda$

এবং $N = n_1 - n_2$

এখানে, $n_1 = \frac{v}{\lambda_1}$

বা, $n_1 = \frac{v}{1}$

এবং $n_2 = \frac{v}{\lambda_2}$ বা, $n_2 = \frac{v}{1{\cdot}01}$

$$\frac{v}{1} - \frac{v}{1{\cdot}01} = \frac{20}{6}$$

এখানে,

$\lambda_1 = 1$ m

$\lambda_2 = 1{\cdot}01$ m

$N = \frac{20}{6}$ s^{-1}

বা, $v\left(1-\frac{1}{1\cdot01}\right) = \frac{20}{6}$

বা, $v\left(\frac{1\cdot01-1}{1\cdot01}\right) = \frac{20}{6}$

বা, $v \times \frac{0\cdot01}{1\cdot01} = \frac{20}{6}$

$v = \frac{20}{6} \times \frac{1\cdot01}{0\cdot01} = 336\cdot67\ \text{ms}^{-1}$

২৯। দুটি সদৃশ তার ঐক্যতানে আছে। 0·36 m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি তার 100 kg ওজন দ্বারা টানা দেওয়া আছে। অপর তারটি 230 kg ওজন দ্বারা টানা দেওয়া থাকলে এর দৈর্ঘ্য বের কর।

[সি. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; ঢা. বো. ২০০২]

আমরা জানি,

$$\frac{l_2}{l_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

বা, $l_2 = l_1 \times \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

'54 Ans

$= 0\cdot36 \times \sqrt{\frac{100 \times 9\cdot8}{230 \times 9\cdot8}}$

$= 0\cdot237$ m

এখানে,

$l_1 = 0\cdot36$ m

$T_1 = 100\ \text{kg} \times 9\cdot8$ N

$T_2 = 230\ \text{kg} \times 9\cdot8$ N

$l_2 = ?$

৩০। 25 cm দৈর্ঘ্যের একটি তার 5 kg-wt বলের দ্বারা টানা হল। তারটি থেকে উৎপন্ন মূল সুরের কম্পাঙ্ক বের কর। [তারটির 1 m দৈর্ঘ্যের ভর = 4·9 g এবং $g = 9\cdot8\ \text{ms}^{-2}$] [কু. বো. ২০০০; ব. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$= \frac{1}{2 \times 0\cdot25}\sqrt{\frac{49}{4\cdot9 \times 10^{-3}}}$

$= \frac{\sqrt{10000}}{0\cdot5}$

$= \frac{100}{0\cdot5} = 200$ Hz

এখানে,

$l = 25$ cm

$= 0\cdot25$ m

$T = mg$

$= 5 \times 9\cdot8$

$= 49$ N

$m = \frac{4\cdot9 \times 10^{-3}}{1}$

$= 4\cdot9 \times 10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$

৩১। 0·5 m লম্বা একটি তারকে 50 N বল দ্বারা টানা হল। যদি তারের ভর 0·01 kg হয় তবে এর মৌলিক কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; রা. বো. ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$n = \frac{1}{2 \times 0\cdot5}\sqrt{\frac{50}{0\cdot02}}$

$= 50$ Hz

এখানে,

তারের দৈর্ঘ্য, $l = 0\cdot5$ m

তারের ভর, $m = 0\cdot01$ kg

একক দৈর্ঘ্যের ভর, $m = \frac{0\cdot01}{05} = 0\cdot02$ kg

টান, $T = 50$ N

কম্পাঙ্ক, $n = ?$

৩২। একটি তারের দৈর্ঘ্য 0·25 m এবং ভর 4·5 g। এটিকে 6 kg ওজন দ্বারা টানা আছে। তারটি থেকে উৎপন্ন সুরের কম্পাঙ্ক কত ? [কু. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$n = \frac{1}{2 \times 0.25}\sqrt{\frac{58.8}{18 \times 10^{-3}}}\text{ Hz}$$

$$= 114.3 \text{ Hz}$$

এখানে,

তারের দৈর্ঘ্য, $l = 0.25$ m

তারের ভর, $M = 4.5$ g $= 4.5 \times 10^{-3}$ kg

$$m = \frac{M}{l} = \frac{4.5 \times 10^{-3}}{0.25} = 18 \times 10^{-3}\ 10\ \text{gm}^{-1}$$

টান, $T = m_1 g = 6 \times 9.8$ N $= 58.8$ N

কম্পাঙ্ক, $n = ?$

P.√

৩৩। দুটি সদৃশ তার ঐক্যতানে আছে। 0·50 m দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি তার 10 kg ওজন দ্বারা টানা দেওয়া আছে। অপর তারটি 20 kg ওজন দ্বারা টানা দেওয়া হলে তারটির দৈর্ঘ্য কত ? [সি. বো. ২০০৩]

আমরা জানি, $\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

বা, $l_2 = l_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$

$$= 0.5\sqrt{\frac{20 \times 9.8}{10 \times 9.8}}$$

$$= 0.5\sqrt{2}$$

$$l_2 = 0.71 \text{ m}$$

এখানে,

$l_1 = 0.50$ m

$T_1 = 10 \times 9.8$ N

$T_2 = 20 \times 9.8$ N

$l_2 = ?$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন :

১। অনুনাদ বলতে কি বুঝায় ? [ঢা. বো. ২০০৪]
অথবা, অনুনাদ কাকে বলে ? [চ. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪]
২। সমমেল কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]
৩। মেলডি বলতে কি বুঝ ? [কু. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৪]
৪। বীট কি ? [ঢা. বো. ২০০৫, ২০০০; কু. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৩, ’০১; রা. বো. ২০০২, ২০০০ ; চ. বো. ২০০১, ২০০০]
অথবা, বীট বলতে কি বুঝ ? [সি. বো. ২০০৬, ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০২ ; চ. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০০]
৫। শব্দের তীব্রতা ও তীক্ষ্ণতা বলতে কি বুঝ ? [সি. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৪]
৬। ডেসিবেল কি ? [রা. বো. ২০০৫; য. বো. ২০০৪, ২০০২; ঢা. বো. ২০০১]
৭। পরবশ কম্পন ও আরোপিত কম্পন বলতে কি বুঝ ? [ব. বো. ২০০৪]
৮। শব্দের প্রাবল্য বলতে কি বুঝ ? [য. বো. ২০০৫ ; ব. বো. ২০০৪]
৯। মূল সুর কি ? [ঢা. বো. ২০০৩]
১০। এক অষ্টক বলতে কি বুঝ ? [কু. বো. ২০০৬, ২০০৩, ২০০১ ; ব. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৫]
১১। সুরবিরাম বলতে কি বুঝ ? [ব. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৩]
১২। সুর ও স্বরের মধ্যে পার্থক্য কি ? [ব. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০১]
অথবা, সুর ও স্বর কি ? [রা. বো. ২০০২]
১৩। শব্দের তীব্রতা বলতে কি বুঝ? [চ. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; ব. বো. ২০০৫]
১৪। সুরযুক্ত শব্দ ও সুরবর্জিত শব্দ বলতে কি বুঝ ? [চ. বো. ২০০২]
১৫। প্রমাণ তীব্রতা কাকে বলে ? [কু. বো. ২০০১]
১৬। সকল হারমোনিকই উপসুর ; কিন্তু সকল উপসুর হারমোনিক নয়—ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; চ. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০০]

১৭। সংজ্ঞা লিখ :

(ক) শব্দের তীব্রতা [চ. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৩]

(খ) অনুনাদ [চ. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৩; ব. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]

(গ) পরবশ কম্পন [রা. বো. ২০০৬; য. বো. ২০০৬ ; চ. বো. ২০০৪]

(ঘ) শব্দের প্রাবল্য [ব. বো. ২০০৩]

রচনামূলক প্রশ্ন :

১। ডেসিবেল কি ? তীব্রতা লেভেলের সমীকরণটি প্রতিপাদন কর। [য. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৩]

২। শব্দ কখন নয়েজ এবং কখন সঙ্গীত গুণ সৃষ্টি করে তা বর্ণনা কর। [চ. বো. ২০০০]

৩। বীট কি ? বীট কিভাবে উৎপন্ন হয় ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০০]

৪। গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বীট সৃষ্টি ব্যাখ্যা কর। [চ. বো. ২০০৫; রা. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০০]

৫। প্রমাণ কর যে, প্রতি সেকেন্ডে সৃষ্ট বীট সংখ্যা বীট সৃষ্টিকারী উৎসদ্বয়ের কম্পাঙ্কের পার্থক্যের সমান।
[ব. বো. ২০০৬, ২০০৪,'০১ ; য. বো. ২০০৬, ২০০৩,'০১ রা. বো. ২০০৬, ২০০২, ২০০০ ; সি. বো. ২০০৪ ; ঢা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০২,২০০০ ; চ. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০২]

৬। বীট গণনা করে কিভাবে একটি সুরেলী কাটার অজানা কম্পাঙ্ক নির্ণয় করা যায় বর্ণনা কর।
[কু. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; ঢা. বো. ২০০৫, ২০০৩ ; রা. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৫, ২০০৩, ২০০১; চ. বো. ২০০৩, ২০০১; য. বো. ২০০৫, ২০০২]

৭। বীট ও ব্যতিচারের মধ্যে পার্থক্য লিখ। [চ. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৩]

৮। টানা তারে আড় কম্পনের সূত্র বিবৃত ও ব্যাখ্যা কর। [ব. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০১]

৯। দেখাও যে, একটি টানা তারে আড় তরঙ্গের বেগ তারের টান ও একক দৈর্ঘ্যের ভরের অনুপাতের বর্গমূলের সমান।
[য. বো. ২০০৩]

১০। টানা তারের দৈর্ঘ্যের সূত্র প্রমাণের পরীক্ষা বর্ণনা কর। [কু. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০১]

১১। টানা তারে আড় তরঙ্গের কম্পনের সূত্রগুলো বিবৃত কর। [সি. বো. ২০০৫, ২০০৪, ২০০১ ব. বো. ২০০৩, '০১ ; কু. বো. ২০০১ ; য. বো. ২০০১ ; ঢা. বো. ২০০১ ; চ. বো. ২০০১]

১২। একটি টানা তারে আড় কম্পনের কম্পাঙ্ক কোন্ কোন্ বিষয়ের উপর নির্ভর করে ? [ব. বো. ২০০৪]

১৩। একটি টানা তারে আড় কম্পনের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর যে, $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$। যখন রাশিগুলো প্রচলিত অর্থবহন করে।
[চ. বো. ২০০৬, ২০০০ ; য. বো. ২০০৪ ; ব. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০১ ; সি. বো. ২০০১]

অথবা, প্রমাণ কর, $n = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{m}}$। এখানে সংকেতগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে। [ঢা. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]

১৪। টানা তারে আড় তরঙ্গের বেগের রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [সি. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৪; ব. বো. ২০০২]

অথবা, টানা তারে আড় তরঙ্গ প্রবাহের বেগ $v = \sqrt{\frac{T}{m}}$ সমীকরণ প্রতিষ্ঠা কর। সংকেতগুলো প্রচলিত অর্থ বহন করে।
[ব. বো. ২০০৬ ; কু. বো. ২০০৫; ঢা. বো. ২০০৪; চ. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০২ ; রা. বো. ২০০১]

১৫। সনোমিটারের সাহায্যে টানা তারের আড় কম্পনের দৈর্ঘ্য সূত্র প্রমাণ কর। [ব. বো. ২০০৪]

১৬। তুমি কিরূপে সনোমিটারের সাহায্যে একটি সুরশলাকার অজ্ঞাত কম্পাঙ্ক নির্ণয় করবে ? [কু. বো. ২০০৪]

অথবা, সনোমিটারের সাহায্যে অজানা কম্পাঙ্ক নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণনা কর। [চ. বো. ২০০৫]

১৭। দেখাও যে, এক মুখ বন্ধ নল কেবল মূলসুরের অযুগ্ম হারমোনিক উৎপন্ন করে।
[রা. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৩]

১৮। দেখাও যে, দুই মুখ খোলা নলে মূল সুরের যুগ্ম ও অযুগ্ম উপসুর পাওয়া যায়। [য. বো. ২০০৬]

গাণিতিক সমস্যাবলি :

১। কোন শব্দের তীব্রতা প্রমাণ তীব্রতার 1000 গুণ। তাদের তীব্রতার পার্থক্য নির্ণয় কর। [উত্তর : 30dB]

২। এমন দুটি শব্দের তীব্রতার অনুপাত নির্ণয় কর যার একটি অপরটি অপেক্ষা 6 db বড়। [উঃ 3·98]

৩। কত তীব্রতার শব্দ 1×10^{-9} Wm^{-2} তীব্রতার শব্দ অপেক্ষা 17db বড় হবে ? [উঃ 5×10^{-8} Wm^{-2}]

৪। একটি কক্ষের শব্দের তীব্রতা 10^{-7} watt m^{-2}। শব্দের তীব্রতা তিনগুণ হলে নতুন তীব্রতা লেভেল নির্ণয় কর। [চ. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 54·77 dB]

৫। একটি অ্যামপ্লিফায়ারের নিঃসৃত শব্দের ক্ষমতা 40 mW হতে 80mW এ পরিবর্তিত হলে শব্দের তীব্রতা লেভেলের পরিবর্তন কত ? [উত্তর ঃ 3 dB]

৬। 0·50 m একটি তারকে 50 N বল দ্বারা টান করে রাখা হল। তারের ভর 5×10^{-3} kg হলে এর মৌলিক কম্পাঙ্ক কত হবে ? [উঃ 100 Hz]

৭। দুটি সুরশলাকা একত্রে শব্দায়িত করলে 3 সেকেন্ডে 12টি বীটের সৃষ্টি হয়। একটি সুরশলাকা নির্দিষ্ট টানে টানা সনোমিটারের তারের 50 cm দৈর্ঘ্যের সাথে ঐক্যতানিক হয়। টান অপরিবর্তিত রেখে তারটির দৈর্ঘ্য 2 cm কমালে দ্বিতীয় সুরশলাকার সাথে ঐক্যতানিক হয়। সুরশলাকাদ্বয়ের কম্পাঙ্ক কত ? [উঃ 96 Hz ; 100 Hz]

৮। 50 cm ও 51 cm দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট এক মুখ বন্ধ নলে প্রতি সেকেন্ডে 3টি বীট সৃষ্টি করে। বায়ুতে শব্দের বেগ বের কর। [সি. বো. ২০০৪] [উত্তর ঃ 306 ms^{-1}]

৯। কোন গ্যাসে 0·70 cm এবং 0·71 cm তরঙ্গদৈর্ঘ্যের দুটি শব্দতরঙ্গ প্রতি সেকেন্ডে 7টি বীট উৎপন্ন করে। গ্যাসটিতে শব্দের বেগ বের কর। [উঃ 348 ms^{-1}]

১০। 20 cm দীর্ঘ একটি তার কোন একটি সুরশলাকার সাথে ঐক্যতানে আছে। টান দ্বিগুণ করলে, ঐক্যতানে আসতে কত দৈর্ঘ্যের প্রয়োজন হবে ? [উঃ 35·4 cm]

১১। দুটি সুরেলী কাঁটাকে একত্রে শব্দায়িত করলে 0·2 s অন্তর অন্তর একবার প্রবল ও একবার দুর্বল শব্দ শোনা যায়। একটি সুরেলী কাঁটার কম্পাঙ্ক 256 Hz হলে অপরটির কম্পাঙ্ক কত ? [উঃ 261 Hz বা 251 Hz]

১২। দুটি সুর শালাকা A ও B একত্রে শব্দায়িত হলে প্রতি সেকেন্ডে 6টি বীট উৎপন্ন হয়। কিন্তু A-এর বাহুর ভর কিছু কমালে বীটের সংখ্যা হ্রাস পায়। B-এর কম্পাঙ্ক 288 Hz হলে A-এর কম্পাঙ্ক কত ছিল ? [উঃ 282 Hz]

১৩। দুটি সুর শলাকা বায়ুতে 0·80 m ও 0·804 m তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের তরঙ্গ উৎপন্ন করে। শলাকাদ্বয় একত্রে কাঁপালে প্রতি সেকেন্ডে 2টি বীট উৎপন্ন হয়। বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 312·54 Hz]

১৪। একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের তারকে 19·6N বল দ্বারা টানলে এর কম্পাঙ্ক 250 Hz হয়। তারটির দৈর্ঘ্য একই রেখে কত বল দ্বারা টানলে এর কম্পাঙ্ক 512 Hz হবে ? [উত্তর ঃ 78·4 N]

১৫। 24 টি সুর শলাকা ক্রমবর্ধমান কম্পাঙ্কে সাজানো আছে। যে কোন একটি সুর শলাকা এর পূর্ববর্তী শলাকার সাথে সেকেন্ডে 4টি বীট উৎপন্ন করে এবং শেষ সুর শলাকা যদি প্রথমটির অষ্টক হয়, তাহলে প্রথম ও শেষ শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 92 Hz ; 184 Hz]

১৬। একটি তারকে 3 kg ওজনের বল দ্বারা টান দেয়া হলে এর থেকে 50 Hz কম্পাঙ্কের মৌলিক সুর নির্গত হয়। তারটির একক দৈর্ঘ্যের ভর 0·009 kgm^{-1} হলে তারটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 0·57 m]

১৭। 80 cm লম্বা একটি তারকে 80N বল দ্বারা টানা হল। যদি তারের ভর 8g হয় তবে মৌলিক কম্পাঙ্ক কত ?

[উত্তর ঃ 55·9 Hz)

১৮। দুটি সুর শলাকা A ও B প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন করে। B-কে খানিকটা ঘষা হলে পুনরায় প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট উৎপন্ন হবে। A-এর কম্পাঙ্ক 512 Hz হলে ঘষার পূর্বে ও পরে B-এর কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

[উঃ 507 Hz ও 517 Hz]

১৯। 50 cm লম্বা একটি তারকে 50 N বল দ্বারা টানা হল। যদি তারের ভর 5 g হয় তবে এর মৌলিক কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০১ ; সি. বো. ২০০২] [উত্তর ঃ 71Hz]

২০। একটি তারের ভর 4 g এবং দৈর্ঘ্য 80 cm। তারটিকে কত বল দ্বারা টানা দিলে এর আড় কম্পনে সৃষ্ট প্রথম উপসুরের কম্পাঙ্ক 256 Hz হবে ? [উত্তর ঃ 209·7 N]

২১। দুটি একই ধরনের তার সমকম্পাঙ্কে আড় কম্পনে কম্পিত হচ্ছে। যখন একটি তারের টান 2·01% বৃদ্ধি করা হয় এবং তার দুটিকে একত্রে কম্পিত করা হয়, তখন প্রতি সেকেন্ডে 3টি বীট উৎপন্ন হয়। তার দুটির প্রারম্ভিক কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 300Hz]

২২। 4×10^3 kgm^{-3} ঘনত্ব বিশিষ্ট এবং 100 cm দীর্ঘ একটি টানা তারকে 30N বল দ্বারা টানা হল। এর কম্পাঙ্ক বের কর। [তারের প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল 1 mm^2]। [উত্তর ঃ 43·3Hz]

২৩। দুটি সুর শলাকা একই সাথে ধ্বনিত হলে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট দেয়। একটি সুর শলাকা নির্দিষ্ট টানে টানা দেয়া তারের 1·30m দৈর্ঘ্যের সাথে এবং অপরটি উক্ত তারের 1·28 দৈর্ঘ্যের সাথে ঐক্যতানে থাকে। সুর শলাকা দুটির কম্পাঙ্ক কত ? [ঢা. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 320 Hz, 325 Hz]

২৪। দুটি শব্দ তরঙ্গের দৈর্ঘ্য 1 m এবং 1·01 m। তরঙ্গ দুটি একটি গ্যাসে 3 s-এ 10টি বীট উৎপন্ন করে। শব্দের বেগ কত ? [উঃ 336·66 ms^{-1}]

২৫। দুটি সুর শলাকা A ও B একসাথে শব্দায়িত হলে প্রতি সেকেন্ডে 5 বার প্রবল ও 5 বার দুর্বল শব্দ শোনা যায়। A-এর এক বাহুতে এক খণ্ড তার জড়ায়ে দিলে বীট উৎপত্তির হার বৃদ্ধি পায়। B-এর কম্পাঙ্ক 320 Hz হলে A-এর প্রকৃত কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 315 Hz]

২৬। A সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 320 Hz। A ও B সুর শলাকাদ্বয়কে একসাথে বাজালে প্রতি সেকেন্ডে 4টি বীট শোনা যায়। A-কে কিছু ঘষে A ও B-কে পুনরায় এক সাথে বাজালে প্রতি সেকেন্ডে 5টি বীট শোনা যায়। B সুর শলাকার কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 316 Hz]

২৭। এক মিটার দীর্ঘ একটি টানা কম্পনরত তারের মূল সুরের কম্পাঙ্ক 250 Hz। তারে প্রবহমান তরঙ্গ দৈর্ঘ্য ও তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 2 m ও 500 ms^{-1}]

২৮। একটি তারের দৈর্ঘ্য 1 m, ব্যাস 0·001 m ও টান 107·8 N। তারের উপাদানের আপেক্ষিক গুরুত্ব 7 হলে তারের মূল সুরের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 70 Hz]

২৯। একটি সনোমিটারের তারটিকে কোন বল দ্বারা টানা হল। যদি টানা বল 9 গুণ এবং একই সাথে তারের দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করা হয় তবে পরিবর্তনের পূর্বের ও পরের কম্পাঙ্কের অনুপাত নির্ণয় কর। [উঃ 2 ঃ 3]

৩০। একটি সনোমিটারের তার 350Hz কম্পাঙ্কের একটি টিউনিং ফর্কের সাথে ঐক্যতানে থাকে। তাদের টান ঠিক রেখে সনোমিটারের তারের দৈর্ঘ্য 1·5% বৃদ্ধি করলে প্রতি সেকেন্ডে কয়টি বীট শোনা যাবে ? [কু. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 5]

৩১। আড় কম্পনে কম্পনরত একটি টানা তারের কম্পাঙ্ক 180 Hz। তারটির টান 9 ঃ 25 অনুপাতে এবং দৈর্ঘ্য 2 ঃ 3 অনুপাতে বাড়ালে তারের কম্পাঙ্ক কত হবে ? [উঃ 200 Hz]

৩২। 0·40 m দৈর্ঘ্যের একটি তার 2 kg ভরের ওজনের সমান বল দ্বারা টানলে তারটি সুর শলাকার সাথে সমসুরে থাকে। যদি টান বাড়িয়ে 2·5 kg ভরের ওজনের সমান করা হয় তবে তারটির দৈর্ঘ্য কত পরিবর্তন করলে তা পুনরায় শলাকাটির সাথে সম-সুরে থাকবে নির্ণয় কর। [উঃ 0·0472 m বৃদ্ধি করতে হবে]

৩৩। টানা দেওয়া একটি তারের সুরের সাথে একটি টিউনিং ফর্কের সাথে একমিল দেখা যায়। তারটির টান চারগুণ বৃদ্ধি করলে তার কত দৈর্ঘ্য পুনরায় টিউনিং ফর্কের সাথে একমিল হবে ? [উঃ দ্বিগুণ]

৩৪। ইস্পাত ও রূপার তৈরি দুটি সমান ব্যাস ও দৈর্ঘ্যের তার একই টানে টানা আছে। ইস্পাতের তারটির মূল সুরের কম্পাঙ্ক 200 Hz হলে রূপার তারটির ঐ সুরের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [রূপা ও ইস্পাতের ঘনত্ব যথাক্রমে $10·4 \times 10^3$ kg m^{-3} ও $7·8 \times 10^3$ kg m^{-3}] [উঃ 173 Hz]

৩৫। 0·88 m দৈর্ঘ্য ও 0·001 kg ভরের একটি তারের টান 55 N। তারটি 5টি লুপে বা বৃত্তাকার অংশে বিভক্ত হয়ে কম্পিত হলে তারের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ 625 Hz]

৩৬। একটি দুই মুখ খোলা নলের মূল সুরের কম্পাঙ্ক 300 Hz। এ নলের প্রথম উপসুরের কম্পাঙ্ক একটি একমুখ বন্ধ নলের প্রথম উপসুরের কম্পাঙ্কের সমান। নল দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[বায়ুতে শব্দের বেগ = 247·5 ms^{-1}] [উঃ 0·41 m ও 0·309 m]

৩৭। কোন একটি সীমাবদ্ধ মাধ্যমে সৃষ্ট দুটি স্থির তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 320 Hz। তরঙ্গের পর পর দুটি নিঃশব্দ বিন্দুর দূরত্ব 0·50 m। মাধ্যমে তরঙ্গের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 320 ms^{-1}]

১৯
শব্দের গতিবেগ
VELOCITY OF SOUND

১৯.১ সূচনা
Introduction

পূর্বেই আমরা জেনেছি যে কোন কম্পমান বস্তু দ্বারা সৃষ্ট অনুদৈর্ঘ্য তরঙ্গই শব্দ। জড় মাধ্যমের মধ্য দিয়ে শব্দ তরঙ্গ আকারে নির্দিষ্ট বেগে গমন করে। শব্দ সঞ্চালনের জন্য মাধ্যম অত্যাবশ্যক। শূন্য মাধ্যমে শব্দ উৎপন্ন হয় না এবং শব্দ চলাচল করতে পারে না। বিভিন্ন মাধ্যমে শব্দের বেগ বিভিন্ন হয়। বায়ু বা শূন্য মাধ্যম অপেক্ষা কঠিন ও তরল মাধ্যমে শব্দের বেগ বেশি হয়। শব্দ যেহেতু তরঙ্গ, তাই এর কম্পাঙ্ক রয়েছে। শব্দের উৎস এবং শ্রোতার মধ্যে আপেক্ষিক গতি থাকলে শ্রোতার কাছে শব্দ তরঙ্গের আপাত কম্পাঙ্ক এর প্রকৃত কম্পাঙ্ক হতে ভিন্নতর মনে হয়। কম্পাঙ্কের এ আপাত পরিবর্তন ডপলার ক্রিয়া বা প্রভাব (Doppler effect) নামে পরিচিত।

এ অধ্যায়ে আমরা শব্দের বেগ সম্পর্কীয় নিউটনের সূত্র, এ সূত্রের সংশোধন, শব্দের বেগের উপর তাপমাত্রা, আর্দ্রতা ও চাপের প্রভাব, শব্দের বেগ নির্ণয় পদ্ধতি, ডপলার ক্রিয়া ইত্যাদি আলোচনা করব।

১৯.২ শব্দের বেগ
Velocity of sound

শব্দ তরঙ্গ আকারে মাধ্যমের মধ্য দিয়ে একস্থান থেকে অন্যস্থানে গমন করে। শব্দ এক সেকেণ্ডে যতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করে তাই শব্দের বেগ। স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় শব্দের বেগ প্রায় 332 ms^{-1}। এ বেগ আলোর বেগের তুলনায় খুবই কম। তাই আকাশে মেঘের ঘর্ষণে বজ্রনিনাদ এবং বিদ্যুৎ চমক একই সময়ে সৃষ্টি হলেও বজ্রপাতের শব্দ বিদ্যুৎ ঝলকানি দেখার বেশ কিছু সময় পরে আমাদের কানে এসে পৌছায়। আলোকের বেগ শব্দের বেগ অপেক্ষা বহুগুণ বেশি বলেই এ ঘটনা ঘটে।

শব্দের বেগ নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতিকে দু'ভাগে ভাগ করা হয়েছে। যথা–(১) তত্ত্বীয় পদ্ধতি এবং (২) পরীক্ষাগার পদ্ধতি। বিখ্যাত বিজ্ঞানী নিউটন তত্ত্বীয় পদ্ধতি প্রদান করেন। একে **শব্দের বেগের জন্য নিউটনের সূত্র** বলা হয়। তিনটি পরীক্ষাগার পদ্ধতি রয়েছে। এখানে আমরা অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ পদ্ধতি আলোচনা করব।

১৯.৩ শব্দের বেগ সম্পর্কিত নিউটনের সূত্র
Newton's law for the velocity of sound

আমরা জানি, শব্দ সঞ্চালনের জন্য স্থিতিস্থাপক ও অবিচ্ছিন্ন (continuous) মাধ্যমের প্রয়োজন। তরঙ্গ প্রবাহে মাধ্যমের কণাগুলো পর্যায় গতিতে দুলতে থাকে এবং যে কোন কণার বিচলন পরবর্তী মুহূর্তে পার্শ্ববর্তী কণায় সঞ্চালিত হয়। কোন মাধ্যমে এ তরঙ্গ গতির বেগ বা দ্রুতি মাধ্যমের ঘনত্ব ও স্থিতিস্থাপকতার উপর নির্ভর করে। বিখ্যাত বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন গাণিতিকভাবে দেখান যে, **শব্দের বেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের**

বর্গমূলের সমানুপাতিক এবং ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। তিনি প্রমাণ করেন যে, E স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক এবং ρ ঘনত্ববিশিষ্ট কোন মাধ্যমে লম্বিক তরঙ্গের সৃষ্টি হলে ঐ তরঙ্গের বেগ,

$$v = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\text{মাধ্যমের}\frac{\text{স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক}}{\text{ঘনত্ব}}} \qquad (1)$$

লম্বিক শব্দ তরঙ্গ প্রবাহে কঠিন পদার্থের অস্থায়ী দৈর্ঘ্য পরিবর্তন হয়। এজন্য কঠিন পদার্থের ক্ষেত্রে স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক E-কে ইয়ং-এর গুণাংক Y দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং কঠিন পদার্থে লম্বিক শব্দ তরঙ্গের বেগ,

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \qquad (2)$$

লোহার ইয়ং-এর গুণাঙ্ক, $Y = 2.205 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}$ ও ঘনত্ব, $\rho = 7.85 \times 10^{3}\ \text{kgm}^{-3}$। কাজেই লোহার ভিতর শব্দের বেগ

$$v = \sqrt{\frac{2.205 \times 10^{11}}{7.85 \times 10^{3}}} \text{ মিটার /সে.} = 5300\ \text{ms}^{-1}$$

তরল অথবা গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দ তরঙ্গ প্রবাহের দরুন মাধ্যমের অস্থায়ী আয়তনের পরিবর্তন ঘটবে এবং মাধ্যমের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক E আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক K দ্বারা নির্দেশ করতে হবে। সুতরাং তরল অথবা গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ,

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad (3)$$

পানির আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক $K = 2.23 \times 10^{9}\ \text{Nm}^{-2}$ এবং ঘনত্ব $\rho = 1 \times 10^{3}\ \text{kgm}^{-3}$ কাজেই পানির মধ্যে শব্দের বেগ

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.23 \times 10^{9}}{10^{3}}} = 1493\ \text{ms}^{-1}$$

১৯.৪ বায়ু বা গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ সম্পর্কীয় নিউটনের সূত্র প্রতিপাদন

Derivation of Newton's formula for the velocity of sound in air or gases

বায়ু বা গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ সম্পর্কিত সূত্র নিরূপণে নিউটন ধারণা করেছিলেন যে গ্যাসের মধ্য দিয়ে তরঙ্গের সঞ্চালনকালে মাধ্যমের প্রসারণ ও সঙ্কোচন খুব ধীরে ধীরে ঘটে। ফলে মাধ্যমের তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ শব্দ তরঙ্গ সঞ্চালনের সময় মাধ্যমের চাপ ও আয়তনের পরিবর্তন সমোষ্ণ অবস্থায় ঘটে। সুতরাং মাধ্যমের চাপ ও আয়তন পরিবর্তনের জন্য এক্ষেত্রে বয়েলের সূত্র প্রযোজ্য।

ধরা যাক সমোষ্ণ প্রক্রিয়ার জন্য কোন নির্দিষ্ট ভরের গ্যাসের চাপ P এবং আয়তন V হলে, বয়েলের সূত্রানুযায়ী,

$$PV = \text{ধ্রুবক}$$

V-এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে আমরা পাই,

$$\frac{d}{dV}(PV) = 0$$

বা, $P + V\frac{dP}{dV} = 0$

বা, $P = -V\frac{dP}{DV} = -\frac{dP}{dV/V}$ (এখানে ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা চাপ বৃদ্ধি পেলে আয়তন হ্রাস অথবা চাপ হ্রাস পেলে আয়তন বৃদ্ধি বুঝায়)।

$$= \frac{\text{চাপের পরিবর্তন}}{\text{আয়তনের পরিবর্তন/আদি আয়তন}}$$

$$= \frac{\text{আয়তন পীড়ন}}{\text{আয়তন বিকৃতি}} = \text{গ্যাসের আয়তন গুণাঙ্ক, } K$$

অর্থাৎ আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক, K = প্রকৃত চাপ, P

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

তরঙ্গ সঞ্চালনকালে মাধ্যমের প্রসারণের জন্য অনুরূপভাবে প্রকাশ করা যায়,

$$K = P$$

অর্থাৎ $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

∴ বায়ু বা গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}} \quad (4)$$

বায়ু বা গ্যাসীয় মাধ্যমে এটিই শব্দের বেগের জন্য নিউটনের সূত্র।

এই সূত্র হতে স্বাভাবিক তাপমাত্রায় এবং চাপে বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় করা যায়। স্বাভাবিক তাপমাত্রায় অর্থাৎ 0°C তাপমাত্রায় বায়ু চাপ, $P_0 = 0.76 \times (13.6 \times 10^3) \times 9.81\ Nm^{-2}$ এবং বায়ুর ঘনত্ব $\rho_0 = 0.001293 \times 10^3\ kgm^{-3}$। যদি স্বাভাবিক তাপমাত্রায় এবং চাপে বায়ুতে শব্দের বেগ v_0 হয়, তবে সমীকরণ (4) অনুসারে

$$v_0 = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{0.76 \times 13.6 \times 10^3 \times 9.81}{0.001293 \times 10^3}}\ ms^{-1} = 280\ ms^{-1}\ \text{(প্রায়)।}$$

52.52 16

কিন্তু এই মান পরীক্ষালব্ধ মান অপেক্ষা অনেক কম। স্বাভাবিক চাপ এবং তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগের পরীক্ষালব্ধ মান 332 ms^{-1}। এই গরমিল হতে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা যায় যে, নিউটনের ধারণায় কোথাও ত্রুটি রয়েছে।

১৯.৫ ল্যাপ্লাস কর্তৃক নিউটনের সূত্র সংশোধন
Laplace's correction of Newton's formula

নিউটনের সূত্রানুসারে গ্যাসে শব্দের বেগের তাত্ত্বিক মান ও পরীক্ষালব্ধ মানের মধ্যে একটি বিরাট গরমিল পরিলক্ষিত হয়। বিজ্ঞানী নিউটন এর কোন ব্যাখ্যাও প্রদান করেননি। প্রায় 120 বছর পর 1817 খ্রিস্টাব্দে ফরাসি গণিতবিদ ল্যাপ্লাস যথাযথ ব্যাখ্যাসহ গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ সম্পর্কিত নিউটন-এর সূত্রের প্রয়োজনীয় সংশোধন প্রদান করেন। এ সংশোধন **ল্যাপ্লাসের সংশোধন** নামে পরিচিত।

নিউটনের মতে গ্যাসীয় মাধ্যমের মধ্য দিয়ে শব্দ সঞ্চালনের সময় মাধ্যম অতীব ধীরে ধীরে সঙ্কুচিত ও প্রসারিত হয়। ফলে মাধ্যমের তাপমাত্রার কোন পরিবর্তন ঘটে না। অতএব গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বিস্তার **সমোষ্ণ তাপীয়** (Isothermal) প্রক্রিয়ায় হয় এবং এই প্রক্রিয়া বয়েলের সূত্র মেনে চলে। নিউটনের ধারণার ত্রুটি হিসেবে ল্যাপ্লাস উল্লেখ করেন যে, গ্যাসীয় মাধ্যমের মধ্য দিয়ে শব্দ সঞ্চালনের সময় মাধ্যমের সংকোচন ও প্রসারণ অত্যন্ত দ্রুত সংঘটিত হয় এবং এতে মাধ্যমের তাপমাত্রার পরিবর্তন ঘটে। যেহেতু গ্যাসের তাপ পরিবহণ ও বিকিরণ ক্ষমতা নিতান্তই কম, সেহেতু সংকোচনের সময় সৃষ্ট তাপ মাধ্যমের ঐ অংশেই আবদ্ধ থাকে পরবর্তী প্রসারণ শুরু হবার পূর্বেই পার্শ্ববর্তী স্তরে সঞ্চালিত হবার অবকাশ পায় না। অনুরূপভাবে প্রসারণের সময় মাধ্যমের প্রসারিত স্তরের তাপমাত্রা হ্রাস পেয়ে শৈত্যের উদ্ভব হয় এবং পরবর্তী সংকোচন শুরু হবার পূর্বে পার্শ্ববর্তী স্তর হতে তাপ দ্রুত প্রবাহিত

হয়ে তাপমাত্রার সমতা বজায় রাখতে পারে না। ফলে গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বিস্তারকালে মাধ্যমের চাপ ও আয়তনের পরিবর্তন বয়েলের সূত্রানুযায়ী না হয়ে **রুদ্ধতাপ** (Adiabatic) প্রক্রিয়ায় সংঘটিত হয়। এ পরিবর্তন একটি নির্দিষ্ট ভরের কোন গ্যাসের চাপ P ও আয়তন V-এর মধ্যে সম্পর্ক হবে,

$PV^{\gamma} = K =$ একটি ধ্রুব সংখ্যা

এখানে, $\gamma = \dfrac{\text{স্থির চাপে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ, } c_p}{\text{স্থির আয়তনে গ্যাসের আপেক্ষিক তাপ, } c_v}$

এক পরমাণুবিশিষ্ট গ্যাসের (আর্গন, নিয়ন ইত্যাদি) ক্ষেত্রে, $\gamma = 1{\cdot}66$ এবং দ্বি-পরমাণুবিশিষ্ট গ্যাসের (হাইড্রোজেন, অক্সিজেন ইত্যাদি) ক্ষেত্রে, $\gamma = 1{\cdot}41$.

রুদ্ধতাপ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে,
$PV^{\gamma} =$ ধ্রুবক

এখন V-এর সাপেক্ষে অবকলন করে পাই,

$$V^{\gamma}\frac{dP}{dV} + P.\gamma\ V^{\gamma-1} = 0$$

$V^{\gamma-1}$ দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$V.\frac{dP}{dV} + \gamma.P = 0$$

বা, $$\frac{dP}{\frac{-dV}{V}} = \gamma\ P$$

কিন্তু আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক

$$K = \frac{dP}{\frac{-dV}{V}}$$

$$K = \gamma.P$$

সুতরাং গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

বায়ুর ক্ষেত্রে $\gamma = 1{\cdot}41$। কাজেই স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় $P = 0{\cdot}76 \times 13{\cdot}6 \times 10^3 \times 9{\cdot}81\ Nm^{-2}$ ও $\rho = 0{\cdot}001293 \times 10^3\ kg\ m^{-3}$।

$$v = \sqrt{\frac{1{\cdot}41 \times 0{\cdot}76 \times 13{\cdot}6 \times 10^3 \times 9{\cdot}81}{0{\cdot}001293 \times 10^3}} = 332{\cdot}52\ ms^{-1}$$

এটি শব্দের বেগের পরীক্ষালব্ধ মানের প্রায় সমান যা ল্যাপ্লাসের শুদ্ধি বা সংশোধনের সত্যতা প্রমাণ করে।

শব্দের বেগের উপর চাপ, তাপমাত্রা, মাধ্যমের ঘনত্ব, আর্দ্রতা এবং বায়ুপ্রবাহের প্রভাব আছে কিনা তা জানা আবশ্যক। এখানে শব্দের বেগের উপর আমরা তাপমাত্রা, আর্দ্রতা ও চাপের প্রভাব আলোচনা করব।

১৯.৬ শব্দের বেগের উপর তাপমাত্রা, আর্দ্রতা ও চাপের প্রভাব
Effect of temperature, humidity and pressure on the velocity of sound

তাপমাত্রার প্রভাব (Effect of temperature) : তাপমাত্রার পরিবর্তনে বায়ুর ঘনত্ব এবং সাথে সাথে বায়ুতে শব্দের বেগ পরিবর্তিত হবে। বায়ুর তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে ঘনত্ব হ্রাস পাবে এবং সাথে সাথে শব্দের বেগ বৃদ্ধি পাবে। আবার বায়ুর তাপমাত্রা হ্রাস পেলে ঘনত্ব বৃদ্ধি পাবে এবং শব্দের বেগ কমে যাবে।

মনে করি একটি নির্দিষ্ট চাপ P-এ 0°C ও t°C তাপমাত্রায় বায়ুর (বা কোন একটি গ্যাসের) ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_0 ও ρ_t এবং বায়ু মাধ্যমে শব্দের বেগ যথাক্রমে v_0 ও v_t সুতরাং,

$$v_0 = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}} \tag{5}$$

এবং
$$v_t = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_t}} \tag{6}$$

সমীকরণ (6)-কে সমীকরণ (5) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\dfrac{v_t}{v_0} = \sqrt{\dfrac{\rho_0}{\rho_t}}$

যেহেতু, $\rho_0 = \rho_t(1 + \alpha t) = \rho_t \left(1 + \dfrac{t}{273}\right)$

α = গ্যাসের আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক = $\dfrac{1}{273}/°C$

সুতরাং, $$\frac{v_t}{v_0} = \sqrt{\frac{\rho_t(1 + \alpha t)}{\rho_t}} = \sqrt{1 + \alpha t}$$

বা, $$v_t = v_0 \sqrt{1 + \alpha t} \tag{7}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \tag{8}$$

$$= \sqrt{\frac{273 + t}{273}} = \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

অর্থাৎ, $$\frac{v_t}{v_0} = \sqrt{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{T_0}}} \tag{9}$$

এখানে, T ও T_0 হচ্ছে t°C ও 0°C তাপমাত্রার আনুষঙ্গিক পরম তাপমাত্রা।

সুতরাং, $\boxed{v \propto \sqrt{T}}$

সিদ্ধান্ত ঃ বায়ু বা গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক, অর্থাৎ তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে শব্দের বেগ বৃদ্ধি পায়।

এখন দেখা যাক, প্রতি ডিগ্রী সেন্টিগ্রেড তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে কোন গ্যাসে শব্দের বেগ বৃদ্ধির পরিমাণ কত।

সমীকরণ (14) হতে পাই,

$$v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$ [বায়ুর ক্ষেত্রে, $\alpha = \dfrac{1}{273}/°C$ বা, $\alpha = 0{\cdot}00366/°C$]

সাধারণ তাপমাত্রায় $\dfrac{t}{273}$-এর উচ্চ ঘাতগুলো উপেক্ষা করে লেখা যায়,

$$v_t = v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{t}{273}\right) = v_0 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha t\right)$$

বা, $$v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{546}\right)$$

বা, $$\boxed{v_t = v_0 (1 + 0{\cdot}00183t)} \tag{10}$$

বায়ু মাধ্যমে 0°C-এ, $v_0 = 332 \text{ ms}^{-1}$

$$\begin{aligned} v_t &= 332(1 + 0{\cdot}00183t) \\ &= (332 + 332 \times 0{\cdot}00183t) \\ &= (332 + 0{\cdot}61t) \text{ ms}^{-1} \end{aligned} \tag{10 (a)}$$

সমীকরণ 10(a) হতে দেখা যাচ্ছে যে, বাতাসের ক্ষেত্রে প্রতি ডিগ্রী তাপমাত্রা বৃদ্ধির জন্য শব্দের বেগ 0·61m বৃদ্ধি পায়।

উল্লেখ্য ঃ সাধারণ তাপমাত্রার ক্ষেত্রে সমীকরণ (10) প্রযোজ্য। অজ্ঞাত বা যে কোন তাপমাত্রার ক্ষেত্রে সমীকরণ (7), (8) অথবা (9) প্রযোজ্য।

আর্দ্রতার প্রভাব (Effect of humidity) ঃ শব্দের বেগের উপর আর্দ্রতার প্রভাব আলোচনা করতে গিয়ে ধরি P পারদ চাপে ও t°C তাপমাত্রায় শুষ্ক ও আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ যথাক্রমে v_d ও v_m এবং বায়ুর ঘনত্ব যথাক্রমে ρ_d ও ρ_m। অতএব আমরা পাই,

$$v_d = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_d}} \tag{11}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_m}} \tag{12}$$

সুতরাং, $$\frac{v_d}{v_m} = \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_d}}$$

বা, $$v_d = v_m\sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_d}} \tag{13}$$

আমরা জানি জলীয় বাষ্প বায়ু অপেক্ষা হালকা। বায়ুতে জলীয় বাষ্পের পরিমাণ অধিক হওয়া অর্থ বায়ু আর্দ্র হওয়া। বায়ু আর্দ্র হওয়া অর্থ বায়ুর ঘনত্ব হ্রাস পাওয়া।

$$\rho_d > \rho_m \qquad \frac{\rho_m}{\rho_d} < 1$$

কাজেই, $$\frac{v_d}{v_m} = \sqrt{\frac{\rho_m}{\rho_d}} < 1$$

$$v_d < v_m$$

আবার গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ তার ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক সুতরাং সমীকরণ (13) হতে অতি সহজে বলা যায় যে, শুষ্ক বায়ু অপেক্ষা আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ বেশি।

সিদ্ধান্ত ঃ বায়ুর আর্দ্রতা বৃদ্ধি পেলে শব্দের বেগ বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ আর্দ্র বায়ুতে শব্দের বেগ বেশি, শুষ্ক বায়ুতে শব্দের বেগ কম।

চাপের প্রভাব ঃ ধরা যাক, m ভরের কোন গ্যাসের উপর চাপ P_1 এবং গ্যাসের আয়তন V_1। স্থির তাপমাত্রায় চাপ P_1 হতে P_2-তে পরিবর্তিত হলে আয়তন V_2 হয়। তাহলে বয়েলের সূত্রানুযায়ী,

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

আবার আমরা জানি, ঘনত্ব, $\rho = \frac{m}{V}$ বা, $V = \frac{m}{\rho}$

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1} \text{ এবং } V_2 = \frac{m}{\rho_2} \qquad [\because m \text{ অপরিবর্তিত}]$$

সুতরাং $$\frac{P_1 m}{\rho_1} = \frac{P_2 m}{\rho_2}$$

বা, $$\frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2} = \text{ধ্রুবক।} \tag{14}$$

আবার নির্দিষ্ট গ্যাসের ক্ষেত্রে γ-এর মান নির্দিষ্ট।

এখন শব্দের বেগ,

$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$ সূত্রে যেহেতু $\frac{P}{\rho}$ অনুপাতটি ধ্রুব থাকে এবং γ-এর মান কোন গ্যাসের জন্য নির্দিষ্ট। কাজেই আমরা বলতে পারি যে, স্থির তাপমাত্রায় চাপের পরিবর্তনের জন্য শব্দের বেগের কোন পরিবর্তন হয় না।

অর্থাৎ, **স্থির তাপমাত্রায় শব্দের বেগের উপর গ্যাসের চাপের কোন প্রভাব নেই।**

১৯.৭ অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ পদ্ধতিতে শব্দের বেগ নির্ণয়
Determination of velocity of sound by resonance air column method

এই পদ্ধতি আলোচনা করার পূর্বে অনুনাদ ও অনুনাদ বায়ু স্তম্ভ কি জানা দরকার।

অনুনাদ (Resonance)

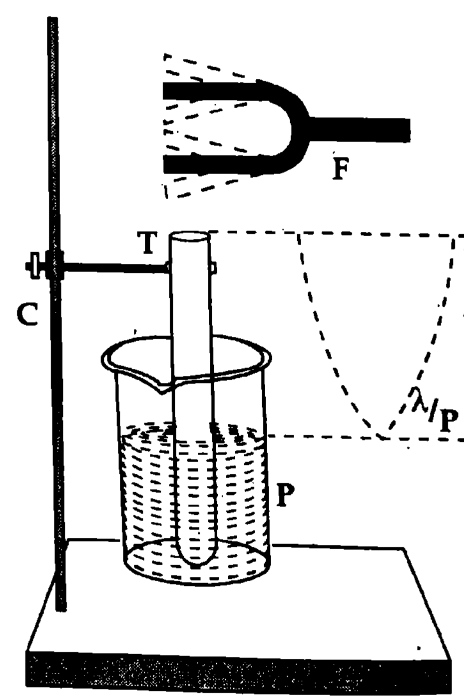
একটি কম্পমান বস্তুকে অন্য একটি বস্তুর নিকট ধরলে দ্বিতীয় বস্তুটি কাঁপতে শুরু করে। যদি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও প্রযুক্ত কম্পন বা বলের পর্যায়কাল ভিন্ন হয়, তবে বস্তু ক্ষুদ্র বিস্তারে কাঁপবে। কিন্তু যদি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও তার উপর প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল সমান হয়, তবে বস্তুটি বৃহত্তর বিস্তারে কাঁপতে বাধ্য হয় এবং শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়। এ ধরনের কম্পনকে অনুনাদ বলে। সুতরাং **অনুনাদ** পরবশ কম্পনের একটি বিশেষ অবস্থা। এ ক্ষেত্রে বাহ্যিক বলের দোলন কাল বাধিত বস্তুর দোলন কালের সমান হওয়ায় বাধিত বস্তু সজোরে কম্পিত হয় এবং শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়। একে **সমবেদী কম্পন**ও বলা হয়। মনে রাখতে হবে অনুনাদে উভয়ের পর্যায়কাল একই হতে হবে।

অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ ঃ কোন বায়ুস্তম্ভের স্বাভাবিক কম্পনের পর্যায়কাল তার উপর আরোপিত পর্যায় বলের পর্যায়কালের সমান হলে ঐ বায়ুস্তম্ভ সর্বাপেক্ষা বৃহৎ বিস্তারে কেঁপে প্রবল শব্দের সৃষ্টি করে। বায়ুস্তম্ভে এ অবস্থায় অনুনাদের সৃষ্টি হয়। এই বায়ুস্তম্ভকে **অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ** বলে।

অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ পদ্ধতিতে শব্দের বেগ নির্ণয় (Determination of velocity of sound by resonance air column method)

যন্ত্রের বর্ণনা ঃ অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ পদ্ধতিতে দুই মুখ খোলা আগা-গোড়া সমান প্রস্থচ্ছেদবিশিষ্ট একটি ফাঁপা ধাতব বা কাচনল T থাকে [চিত্র ১৯.১] এর নাম অনুনাদ নল। এর নিম্ন প্রান্তকে $\frac{2}{3}$ অংশ পানিতে ভর্তি একটি লম্বা কাচ পাত্র P-এ ডুবিয়ে একটি দণ্ড C-এর সাহায্যে নলটিকে খাড়াভাবে স্থাপন করি।

কার্যপদ্ধতি ঃ নির্দিষ্ট কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর শলাকা F লই। একে রবার প্যাডে আঘাত করে অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের নিকটে ধরি। এতে নলের মধ্যস্থিত বায়ুতে পরবশ কম্পনের সৃষ্টি হবে। এ কম্পন নিচের দিকে সঞ্চালিত হবে এবং পানির উপরিতল হতে প্রতিফলিত হয়ে পুনরায় উপর দিকে উঠবে। এই তরঙ্গ সুর শলাকা হতে আগত তরঙ্গের সাথে মিলিত হয়ে স্থির তরঙ্গ সৃষ্টি করবে। এখন নলটিকে উঠা-নামা করিয়ে নলের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্যকে এমনভাবে উপযোজন করি যাতে বায়ুস্তম্ভের সবচেয়ে কম দৈর্ঘ্যে শব্দের প্রাবল্য সর্বাপেক্ষা বেশি হয় অর্থাৎ অনুনাদ সংঘটিত হয়। এমতাবস্থায় পানির উপরিতল হতে নলের উন্মুক্ত প্রান্ত পর্যন্ত অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।



চিত্র ১৯.১

হিসাব ঃ বায়ুস্তম্ভের এই অনুনাদে পানির উপরিতলে একটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং মোটামুটি নলের খোলামুখে একটি সুস্পন্দ বিন্দুর উৎপত্তি হয়। অবশ্যই এই অবস্থায় বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক সুর শলাকার কম্পাঙ্কের সমান।

মনে করি, অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য, l। যদি বায়ুতে শব্দের বেগ v হয় এবং বায়ুস্তম্ভের কম্পাঙ্ক n হয়, তবে

$$v = n\lambda \qquad (15)$$

এবং $l = \frac{1}{4}\lambda$ বা, $\lambda = 4l$

কেননা নলের বন্ধ মুখে নিস্পন্দ বিন্দু এবং খোলা মুখে সুস্পন্দ বিন্দু উৎপন্ন হয় এবং এদের মধ্যে দূরত্ব = $\lambda/4$

উপরের সমীকরণ হতে আমরা পাই, $v = n \times 4l$

অর্থাৎ, $v = 4nl$ (16)

এখন, n এবং l-এর মান জেনে v বের করা হয়। কিন্তু এভাবে প্রাপ্ত v-এর মান অন্যান্য পদ্ধতিতে প্রাপ্ত v-এর মান হতে অনেক কম হয়। এ কারণে উপযুক্ত সংশোধন প্রয়োজন।

প্রান্ত সংশোধন (End correction)

উপরে 2নং সমীকরণ প্রতিপাদনে ধরে নেয়া হয় যে, সুস্পন্দ বিন্দু নলের উন্মুক্ত প্রান্তে সৃষ্টি হয়। কিন্তু বিখ্যাত বিজ্ঞানী লর্ড র‍্যালে গণিতের সাহায্যে প্রমাণ করেন যে, সুস্পন্দ বিন্দু নলের উন্মুক্ত প্রান্তে না হয়ে কিছু উপরে হয়। সুতরাং এর জন্য একটি সংশোধনের প্রয়োজন। এর নাম **প্রান্ত সংশোধন**। কাজেই **একটি অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের বাইরে মুক্ত প্রান্ত হতে ন্যূনতম যে দূরত্বে সুস্পন্দ বিন্দু দেখা যায় তাকে প্রান্ত সংশোধন বলে।**

ধরি প্রান্ত সংশোধন $= x$

অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য $= (l + x)$

নলের আন্তব্যাস d হলে, $x = 0{\cdot}3d$ এবং নলের আন্তব্যাসার্ধ r হলে $d = 2r$

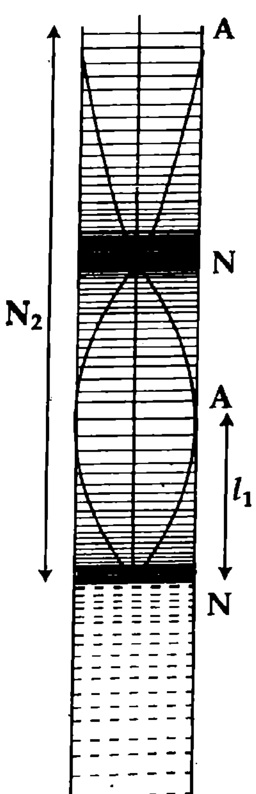
কাজেই $v = n\lambda$ সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$v = 4n(l + x)$ (17)

বা, $v = 4n(l + 0{\cdot}3d)$ (18)

বা, $v = 4n(l + 0{\cdot}6r)$ (19)

প্রান্ত সংশোধন পরিহার (To avoid end correction)



চিত্র ১৯.২

প্রান্ত সংশোধন বাদ দিয়েও শব্দের বেগ নির্ভুলভাবে বের করা যায়। এ স্থলে নলের দুই অবস্থানে অনুনাদ নিতে হবে। প্রথম অনুনাদ বের করার পর নলটিকে উপরে উঠিয়ে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য পূর্বের প্রায় তিন গুণ করলে দ্বিতীয় অনুনাদ পাওয়া যাবে। দ্বিতীয় অনুনাদের ক্ষেত্রে নলে দুটি নিস্পন্দ বিন্দু এবং দুটি সুস্পন্দ বিন্দুর সৃষ্টি হবে।

মনে করি, নলের প্রথম অবস্থানে অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য l_1 [চিত্র ১৯.২] এবং দ্বিতীয় অবস্থানে অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য l_2। যদি প্রান্ত সংশোধন x হয়, তবে

$$l_1 + x = \frac{1}{4}\lambda$$

এবং $$l_2 + x = \frac{3}{4}\lambda$$

সমীকরণদ্বয়ের দ্বিতীয়টি হতে প্রথমটি বিয়োগ করে আমরা পাই,

$$l_2 - l_1 = \frac{1}{2}\lambda$$

$$\boxed{\lambda = 2(l_2 - l_1)}$$

এখন সমীকরণ (17) হতে আমরা পাই, $v = n\lambda = n \times 2(l_2 - l_1)$

$$\boxed{v = 2n(l_2 - l_1)} \quad (20)$$

l_1, l_2 এবং n-এর মান জেনে v বের করা যায়। উক্ত (20) সমীকরণে প্রান্ত সংশোধন নেই। কাজেই এভাবে প্রান্ত সংশোধন পরিহার করা যায়।

১৯·৮ ডপ্‌লার ক্রিয়া বা প্রভাব
Doppler effect

পূর্বের অনুচ্ছেদগুলোতে তরঙ্গগতি সংক্রান্ত আলোচনায় উৎস এবং পর্যবেক্ষক বা শ্রোতার গতি বিবেচনা করা হয় নি। উভয়ই স্থির ধরা হয়েছিল। কিন্তু উৎস এবং পর্যবেক্ষক বা শ্রোতার মধ্যে আপেক্ষিক গতি থাকলে পর্যবেক্ষক বা শ্রোতার নিকট তরঙ্গের আপাত কম্পাঙ্ক এর প্রকৃত কম্পাঙ্ক অপেক্ষা ভিন্নতর মনে হয়। সকল ধরনের তরঙ্গের ক্ষেত্রে এই ঘটনা ঘটে। উৎস এবং শ্রোতা পরস্পর হতে দূরে সরে গেলে আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্ক অপেক্ষা কম হয় ; আবার উৎস এবং শ্রোতা পরস্পরের দিকে অগ্রসর হলে আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্ক অপেক্ষা বেশি হয়। এই ঘটনাকে **ডপলার ক্রিয়া** বা প্রভাব বলে। সুতরাং, শব্দের ক্ষেত্রে ডপলার ক্রিয়ার নিম্নোক্ত সংজ্ঞা দেয়া যায় ঃ

সংজ্ঞা ঃ শব্দের উৎস এবং শ্রোতার মধ্যে আপেক্ষিক গতি বিদ্যমান থাকলে শ্রোতার নিকট উৎস হতে নিঃসৃত শব্দের তীক্ষ্ণতা বা কম্পাঙ্কের যে আপাত পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয় তাকে ডপলার ক্রিয়া বা প্রভাব বলে। যে নীতির সাহায্যে ডপলার এই আপাত পরিবর্তন ব্যাখ্যা করেছিলেন তাকে ডপলার নীতি বলে (Doppler principle) বলে।

1842 খ্রিস্টাব্দে একজন অস্ট্রিয়ান পদার্থবিদ ডপ্‌লার এই সূত্র আবিষ্কার করেন। তাঁর নাম অনুসারে এই নীতিকে ডপ্‌লার-এর নীতি বলা হয়।

ডপ্‌লার প্রমাণ করেছেন যে,

(ক) উৎস স্থির শ্রোতার দিকে অগ্রসর হলে উৎস হতে নির্গত তরঙ্গগুলোর দৈর্ঘ্য ছোট হয়ে যায়। ফলে তীক্ষ্ণতা আরও বৃদ্ধি পায়।

(খ) উৎস স্থির শ্রোতা হতে দূরে সরে গেলে উৎস হতে নির্গত তরঙ্গগুলোর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায়। ফলে তীক্ষ্ণতা হ্রাস পায়।

(গ) শ্রোতা যদি উৎসের দিকে অগ্রসর হয়, তবে শব্দের তীক্ষ্ণতা বৃদ্ধি পায়।

(ঘ) শ্রোতা যদি উৎস হতে দূরে সরে যায়, তবে শব্দের তীক্ষ্ণতা হ্রাস পায়।

(ঙ) মাধ্যমের গতিবেগও শব্দের তীক্ষ্ণতাকে প্রভাবিত করে। তবে উৎস ও শ্রোতা উভয়েই স্থির থাকলে মাধ্যমের গতির জন্য শব্দের তীক্ষ্ণতার পরিবর্তন ঘটে না।

উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে—একটি দ্রুতগামী ট্রেন বাঁশি বাজাতে বাজাতে স্টেশনের দিকে আসতে থাকলে স্টেশনে দণ্ডায়মান একজন শ্রোতার নিকট বাঁশির শব্দের তীক্ষ্ণতা ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে। আবার ট্রেনটি বাঁশি বাজাতে বাজাতে স্টেশন ত্যাগ করে চলে গেলে ঐ শ্রোতার নিকট শব্দের তীক্ষ্ণতা ক্রমশ কমে যাচ্ছে মনে হবে। তা হলে দেখা যাচ্ছে, শব্দের উৎস এবং শ্রোতার মধ্যে আপেক্ষিক গতি বিদ্যমান থাকার ফলে শ্রোতার নিকট শ্রুত শব্দের তীক্ষ্ণতার আপাত পরিবর্তন ঘটে। এর নাম **ডপ্‌লার ক্রিয়া।**

উল্লেখ্য, এটি কোন স্থায়ী পরিবর্তন নয়। উৎস, শ্রোতা এবং মাধ্যমের আপেক্ষিক গতির জন্যে এরূপ ঘটে। এ ক্রিয়া শুধুমাত্র শব্দের জন্যই প্রযোজ্য নয়। আলোক বা যে-কোন তরঙ্গ গতির ক্ষেত্রে এটি প্রযোজ্য।

১৯·৯ ডপলার ক্রিয়ার জন্য শব্দের কম্পাঙ্ক বা তীক্ষ্ণতা পরিবর্তনের রাশিমালা
Expressions for the change of frequency or pitch due to Doppler effect

কম্পাঙ্ক বা তীক্ষ্ণতা পরিবর্তনের রাশিমালা প্রতিপাদনের জন্য আলোচনার সুবিধার্থে ধরে নেয়া হবে উৎস অথবা শ্রোতা এদের সংযোজনকারী সরলরেখা বরাবর চলছে। ডপলারের ক্রিয়া আলোচনার ক্ষেত্রে নিম্নের তিনটি বিষয় বিবেচনা করা যায় ঃ

(ক) শ্রোতা স্থির কিন্তু উৎস গতিশীল,

(খ) উৎস স্থির কিন্তু শ্রোতা গতিশীল এবং

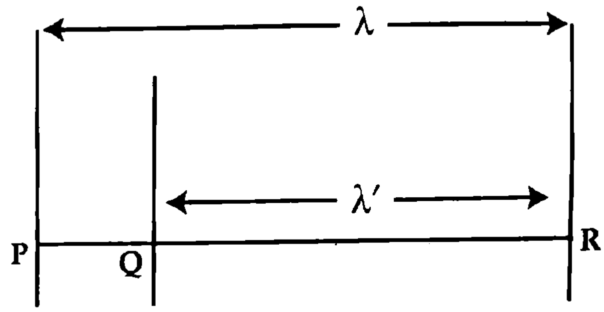
(গ) উৎস এবং শ্রোতা উভয়েই গতিশীল।

(ক) শ্রোতা স্থির কিন্তু উৎস গতিশীল

Observer at rest, but the source in motion

ধরা যাক, v_s বেগে একটি তরঙ্গ উৎস কোন স্থির শ্রোতার দিকে অগ্রসর হচ্ছে। বুঝার সুবিধার জন্য আমরা তরঙ্গটিকে পরপর তরঙ্গামুখের সমবায়ে গঠিত এবং পাশাপাশি দুটি তরঙ্গামুখের মধ্যবর্তী দূরত্ব একটি তরঙ্গাদৈর্ঘ্যের সমান বিবেচনা করব।

ধরা যাক, উৎসটি যখন P অবস্থানে রয়েছে তখন এটি একটি তরঙ্গামুখ নিঃসরণ করে। নিঃসৃত হওয়ার পরই তরঙ্গামুখটি সম্মুখে অগ্রসর হয়। উৎসটি যখন দ্বিতীয় তরঙ্গামুখ নিঃসরণ করে তখন তরঙ্গামুখটি R অবস্থানে পৌঁছেছে [চিত্র ১৯.৪]। যদি উৎসটি স্থির থাকত তবে দ্বিতীয় তরঙ্গামুখও P অবস্থানে নিঃসৃত হত। সেক্ষেত্রে PR হত অপরিবর্তিত তরঙ্গাদৈর্ঘ্য λ। কিন্তু উৎস গতিশীল বলে দ্বিতীয় তরঙ্গামুখ নিঃসরণ কালে উৎস Q অবস্থানে এগিয়ে যাবে। এক্ষেত্রে উৎস তরঙ্গামুখের অন্তর্বর্তী দূরত্ব QR। অতএব, QR-ই হবে পরিবর্তিত তরঙ্গাদৈর্ঘ্য λ′।



চিত্র ১৯.৩

সুতরাং, PR = λ এবং QR = λ′।

এখন, যে সময়ে প্রথম তরঙ্গামুখ P হতে R-এ পৌঁছায়, ঠিক একই সময়ে উৎস P হতে Q-তে পৌঁছায়। তরঙ্গামুখের বা শব্দের বেগ v এবং উৎসের বেগ v_s হলে, আমরা পাই,

$$\frac{PR}{v} = \frac{PQ}{v_s} \qquad (21)$$

$$\text{বা, } \frac{\lambda}{v} = \frac{PR - QR}{v_s} = \frac{\lambda - \lambda'}{v_s} = \frac{\lambda'}{(v - v_s)} \quad \left[\text{ গাণিতিক নিয়ম অনুসারে } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} \right]$$

$$\text{বা, } \lambda' = \lambda\left(\frac{v - v_s}{v}\right) \qquad (22)$$

কিন্তু যে কোন মাধ্যমে দুটি শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রে,

$n\lambda = n'\lambda'$

এখানে n, λ ও n', λ′ যথাক্রমে প্রকৃত ও আপাত বা পরিবর্তিত তরঙ্গের কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গ দৈর্ঘ্য।

$$\text{কজেই, } \frac{n'}{n} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_s)}$$

$$n' = n\frac{v}{(v - v_s)} \qquad (23)$$

সমীকরণ (23) হতে দেখা যায়

(i) উৎস শ্রোতার দিকে অগ্রসর হলে শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি হয়।

(ii) উৎস শব্দের বেগে শ্রোতার দিকে অগ্রসর হলে আপাত কম্পাঙ্ক অসীম হবে।

উৎসটি শ্রোতার দিকে অগ্রসর না হয়ে যদি শ্রোতা হতে দূরে সরে যায়, তবে উৎসের বেগ ঋণাত্মক ধরা হয়। সেক্ষেত্রে সমীকরণ (22) ও (23) নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$\lambda' = \lambda\frac{(v + v_s)}{v} \qquad (24)$$

$$\text{এবং } n' = n\frac{v}{(v + v_s)} \qquad (25)$$

সমীকরণ (25) হতে দেখা যায়

(i) উৎস শ্রোতা হতে দূরে সরে গেলে শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের চেয়ে কম হয়।

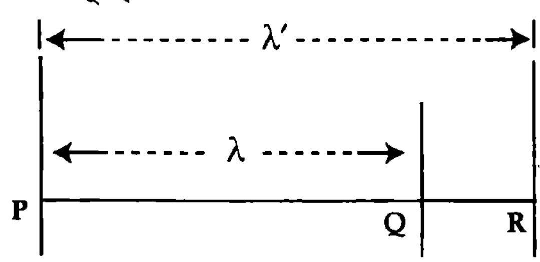
(ii) উৎস শব্দের বেগে শ্রোতা হতে দূরে সরে গেলে শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের অর্ধেক হবে।

(খ) উৎস স্থির কিন্তু শ্রোতা গতিশীল

Source at rest, but the observer in motion

ধরা যাক, শ্রোতা v_0 বেগে স্থির শব্দের উৎস হতে দূরে সরে যাচ্ছে। অর্থাৎ শ্রোতা তরঙ্গের গতির দিকে অগ্রসর হচ্ছে। পূর্বের মত আমরা তরঙ্গকে তরঙ্গমুখের সমবায়ে গঠিত এবং পাশাপাশি পর পর দুটি তরঙ্গমুখের মধ্যবর্তী দূরত্ব একটি তরঙ্গদৈর্ঘ্যের সমান বিবেচনা করব।

ধরা যাক, শ্রোতা যখন Q অবস্থানে তখন উৎস হতে নিঃসৃত প্রথম তরঙ্গমুখ তার নিকট পৌঁছায়। ঐ সময়ে দ্বিতীয় তরঙ্গমুখ P অবস্থানে রয়েছে [চিত্র ১৯.৫]। সুতরাং PQ হচ্ছে তরঙ্গের অপরিবর্তিত তরঙ্গদৈর্ঘ্য λ। এখন শ্রোতা তরঙ্গের অভিমুখে গতিশীল বলে ধরা যাক দ্বিতীয় তরঙ্গদৈর্ঘ্য তার নিকট যখন পৌঁছায় তখন সে R অবস্থানে পৌঁছেছে। অতএব, শ্রোতার নিকট PR দূরত্ব হল পরিবর্তিত তরঙ্গদৈর্ঘ্য।



চিত্র ১৯.৪

সুতরাং, $PQ = \lambda$ এবং $PR = \lambda'$। আবার, যে সময়ে তরঙ্গমুখ P হতে R-এ পৌঁছায়, ঐ একই সময়ে স্রোতা Q হতে R অবস্থানে পৌঁছায়। কাজেই, শ্রোতার বেগ v_0 এবং তরঙ্গের বেগ v বলে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{PR}{v} = \frac{QR}{v_0}$$

বা, $$\frac{\lambda'}{v} = \frac{PR - QR}{v_0} = \frac{\lambda' - \lambda}{v_0}$$

বা, $$\frac{\lambda'}{v} = \frac{\lambda}{v - v_0} \qquad \left[\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}\right]$$

বা, $$\lambda' = \lambda\left(\frac{v}{v - v_0}\right) \qquad (26)$$

কিন্তু একই মাধ্যমে দুটি শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রে

$n\lambda = n'\lambda'$, এখানে n, λ ও n', λ' যথাক্রমে প্রকৃত (বা অপরিবর্তিত) তরঙ্গ ও আপাত (বা পরিবর্তিত) তরঙ্গের কম্পাঙ্ক ও তরঙ্গদৈর্ঘ্য।

$$\frac{n'}{n} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{v - v_0}{v}$$

বা, $$n' = n\left(\frac{v - v_0}{v}\right) \qquad (27)$$

সমীকরণ (27) হতে দেখা যায়

(i) শ্রোতা উৎস হতে দূরে সরে গেলে শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের চেয়ে কম হয়।

(ii) শ্রোতা শব্দের বেগে উৎস হতে সরে গেলে আপাত কম্পাঙ্ক শূন্য হবে।

যদি শ্রোতা উৎসের দিকে গতিশীল হয় তবে উৎস হতে সরে যাওয়ার বেগ $-v_0$ হবে এবং সমীকরণ (26) ও (27) নিম্নরূপ হবে,

$$\lambda' = \lambda\left(\frac{v}{v + v_0}\right) \tag{28}$$

এবং $$n' = n\left(\frac{v + v_0}{v}\right) \tag{29}$$

সমীকরণ (29) হতে দেখা যায়

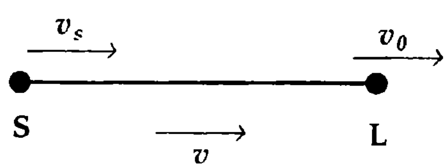
(i) **শ্রোতা উৎসের দিকে অগ্রসর হলে শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের চেয়ে বেশি হবে।**

(ii) **শ্রোতা শব্দের বেগে উৎসের দিকে অগ্রসর হলে শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের দ্বিগুণ হবে।**

(গ) উৎস এবং শ্রোতা উভয়ই গতিশীল

Source and observer both in motion

ধরা যাক, উৎস S ও শ্রোতা L উভয়ই একই দিকে যথাক্রমে v_s এবং v_0 বেগে গতিশীল শব্দের বেগ v [চিত্র ১৯.৬]।



চিত্র ১৯.৫

উৎসের গতির জন্য আপাত কম্পাঙ্ক হবে,

$$n' = n\frac{v}{(v - v_s)} \quad \text{[সমীকরণ (23) অনুসারে]} \tag{30}$$

শ্রোতার গতির জন্য এই কম্পাঙ্কও পুনরায় পরিবর্তিত হয়। কাজেই, চূড়ান্ত আপাত বা পরিবর্তিত কম্পাঙ্ক n'' হবে,

$$n'' = n'\frac{v - v_0}{v} \quad \text{[সমীকরণ (27) ব্যবহার করে]}$$

সমীকরণ (30) বসিয়ে পাই,

$$n'' = n\frac{v}{(v - v_s)} \times \frac{v - v_0}{v}$$

$$= n\left(\frac{v - v_0}{v - v_s}\right) \tag{31}$$

সমীকরণ (31) হতে দেখা যায় যে, যদি শ্রোতা ও উৎস একই বেগে একই দিকে অগ্রসর হলে আপাত কম্পাঙ্ক ও প্রকৃত কম্পাঙ্ক সমান হয় অর্থাৎ উৎস এবং শ্রোতার কোন আপেক্ষিক বেগ না থাকে তবে কম্পাঙ্কের কোন পরিবর্তন হয় না।

যদি উৎস বা শ্রোতা যে কোন একটির অথবা উভয়েরই বেগের অভিমুখ বিপরীত দিকে হয়, তবে সংশ্লিষ্ট প্রতিটি ক্ষেত্রে বেগের চিহ্ন পরিবর্তিত হবে।

বায়ু প্রবাহের প্রভাব (Effect of wind) : উপরের সমীকরণগুলো প্রতিপাদনের সময় বায়ুর বেগ বিবেচনা করা হয় নি। যদি বায়ুর বেগ v_w হয় এবং উৎস হতে শ্রোতার দিকে বায়ু প্রবাহিত হলে শব্দের বেগ v-এর সাথে v_w

যোগ করতে হবে। আপাত কম্পাঙ্কের প্রত্যেক সমীকরণে v-এর স্থলে $v + v_w$ হবে। আবার শ্রোতা হতে উৎসের দিকে বায়ু প্রবাহিত হলে শব্দের কার্যকর বেগ হবে $v - v_w$ এবং আপাত কম্পাঙ্কের সমীকরণে v এর স্থলে $v - v_w$ বসাতে হবে।

বায়ুর গতি বিবেচনা করলে $n' = n\left(\dfrac{v - v_0 + v_w}{v - v_s + v_w}\right)$

১৯.১০ আলোর ক্ষেত্রে ডপলার ক্রিয়া
Doppler effect in light

ডপ্‌লার ক্রিয়া শুধুমাত্র শব্দ তরঙ্গের ক্ষেত্রে পরিলক্ষিত হয় তা কিন্তু নয়। আলোকের উৎস এবং পর্যবেক্ষকের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ থাকলে আলোক তরঙ্গের ক্ষেত্রেও ডপলার ক্রিয়া লক্ষ্য করা যায়।

আলোক উৎসের কম্পাঙ্ক f_s, পর্যবেক্ষক কর্তৃক পরিমাপকৃত কম্পাঙ্ক f_L আলোকের বেগ c এবং আলোকের উৎস ও পর্যবেক্ষকের মধ্যে আপেক্ষিক বেগ v হলে এদের মধ্যে নিম্নরূপ সম্পর্ক রয়েছে,

$$f_L = \left(\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\right) f_s \qquad (28)$$

এখানে আলোক উৎস পর্যবেক্ষক থেকে দূরে সরে গেলে v ধনাত্মক এবং উৎস পর্যবেক্ষকের দিকে অগ্রসর হলে সেক্ষেত্রে v ঋণাত্মক ধরা হয়েছে।

এখন আলোক উৎস পর্যবেক্ষক থেকে দূরে সরে গেলে উপরোক্ত সমীকরণ থেকে দেখা যায় f_s অপেক্ষা f_L ক্ষুদ্রতর হবে এবং উৎস পর্যবেক্ষকের দিকে অগ্রসর হলে f_s অপেক্ষা f_L বড় হবে। আমরা জানি আলোক বর্ণালীর বেগুনী রং-এর কম্পাঙ্ক বেশি এবং লাল রং-এর কম্পাঙ্ক কম। এখন স্পেকট্রোস্কোপ (spectroscope) যন্ত্রের সাহায্যে দূরবর্তী নক্ষত্র থেকে নিঃসৃত বর্ণালী রেখা পর্যবেক্ষণ করলে এবং আর্ক বাতি (arc lamp) নিঃসৃত একই ধরনের বর্ণালী রেখা পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যায় যে নক্ষত্র নিঃসৃত বর্ণালী রেখা ধীরে ধীরে লাল প্রান্তের দিকে সরে যাচ্ছে। এর অর্থ হল কম্পাঙ্ক কমে যাচ্ছে বা তরঙ্গ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাচ্ছে। এখন সমীকরণ (28) হতে বোঝা যাচ্ছে যে f_s কম হওয়ার অর্থ v ধনাত্মক অর্থাৎ উৎস (এক্ষেত্রে নক্ষত্র) পৃথিবী থেকে দূরে সরে যাচ্ছে। নক্ষত্রের নিঃসৃত বর্ণালী রেখার ধীরে ধীরে লাল প্রান্তের দিকে সরে যাওয়াকে লাল অপসরণ (red shift) বলে। বিভিন্ন গ্যালাক্সীর লাল অপসরণ পরিমাপ করে বিখ্যাত বিজ্ঞানী হাবল প্রমাণ করেন যে **গ্যালাক্সীগুলোর দূরে সরে যাওয়ার বেগ পৃথিবী থেকে গ্যালাক্সীগুলোর দূরত্বের বর্গের সমানুপাতিক**। এটি হাবল-এর সূত্র (Hubble's law) নামে পরিচিত। গ্যালাক্সীগুলো শুধুমাত্র পৃথিবী থেকে দূরে সরে যাচ্ছে তাই নয় এরাও পরস্পর থেকে দূরে সরে যাচ্ছে। এ পর্যবেক্ষণের অর্থ হল আমাদের এ মহাবিশ্ব ক্রমশ প্রসারিত হচ্ছে।

স্মরণিকা

শব্দের গতিবেগ ঃ শব্দ এক সেকেন্ডে যতটুকু দূরত্ব অতিক্রম করে, তাকে শব্দের বেগ বা গতিবেগ বলে।

নিউটনের সূত্র ঃ কোন মাধ্যমে শব্দের বেগ মাধ্যমের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্কের বর্গমূলের সমানুপাতিক এবং ঘনত্বের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

শব্দের বেগের উপর চাপের প্রভাব ঃ স্থির তাপমাত্রায় শব্দের বেগের উপরে গ্যাসের চাপের কোন প্রভাব নেই।

অনুনাদ ঃ একটি কম্পমান বস্তুকে অপর একটি বস্তুর নিকট ধরলে দ্বিতীয় বস্তুটি কাঁপতে শুরু করে। যদি বস্তুর স্বাভাবিক পর্যায়কাল ও এর উপর প্রযুক্ত বলের পর্যায়কাল সমান হয় তবে বস্তুটি বৃহত্তর বিস্তারে কাঁপতে বাধ্য হয় এবং শব্দের প্রাবল্য বৃদ্ধি পায়। এ প্রক্রিয়াকে অনুনাদ বলে।

অনুনাদ স্তম্ভ ঃ কোন বায়ুস্তম্ভের স্বাভাবিক কম্পনের পর্যায়কাল তার উপর আরোপিত পর্যায় বলের পর্যায়কালের সমান হলে ঐ বায়ুস্তম্ভে অনুনাদের সৃষ্টি হয়। এই বায়ুস্তম্ভকে অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ বলে।

শব্দের বেগের উপর তাপমাত্রার প্রভাব ঃ তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেলে শব্দের বেগ বৃদ্ধি পায়।

শব্দের বেগের উপর আর্দ্রতার প্রভাব ঃ বাতাসের আর্দ্রতা বৃদ্ধি পেলে শব্দের বেগ বৃদ্ধি পায়।

ডপ্‌লার ক্রিয়া ও সূত্র ঃ শব্দের উৎস ও শ্রোতার মধ্যে আপেক্ষিক গতি বিদ্যমান থাকলে শ্রোতার নিকট শব্দের উৎস হতে নিঃসৃত শব্দের কম্পাঙ্ক তথা তীক্ষ্ণতার আপাত পরিবর্তন ঘটে। শ্রোতা এবং উৎসের আপেক্ষিক গতির জন্যে কম্পাঙ্ক বা তীক্ষ্ণতার এ আপাত পরিবর্তনকে ডপ্‌লার ক্রিয়া বলে এবং যে নীতি বা তত্ত্বের সাহায্যে ডপ্‌লার-এর ক্রিয়া ব্যাখ্যা করা যায় তাকে ডপ্‌লারের সূত্র বলে।

প্রয়োজনীয় সমীকরণ

কঠিনে শব্দের বেগ,

$$f' = \frac{V+V_0}{V-U_s} f$$

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (1)$$

তরল বা গ্যাসে শব্দের বেগ,

$$T_2 = T_1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}$$

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (2)$$

গ্যাসে শব্দের বেগের উপর নিউটনের সমীকরণ

$$v = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (3)$$

গ্যাসে শব্দের বেগের উপর ল্যাপ্লাসের সমীকরণ,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (4)$$

গ্যাসে তাপমাত্রার সাথে বেগের পরিবর্তন ঃ

$$v_t = v_0\sqrt{1 + \alpha t} \quad (5)$$

$$v_t = v_0(1 + \tfrac{1}{2}\alpha t) \quad (6)$$

$$= v_0(1 + 0{\cdot}00183t) \quad (7)$$

$$v \propto \sqrt{T} \quad (8)$$

অনুনাদী বায়ুস্তম্ভে ঃ

$$v = 4nl_1 = 4nl \quad (9)$$

$$v = 4n(l_1 + x) = 4n(l + x) \quad (10)$$

$$v = 4n(l_1 + 0{\cdot}6r) = 4n\,(l + 0{\cdot}3d) \quad (11)$$

$$v = 4n\,(l + 0{\cdot}6r) \quad (12)$$

$$v = 2n\,(l_2 - l_1) \quad (13)$$

ডপলারের ক্রিয়া ঃ

$$n' = \frac{v}{v - v_s} \times n \quad (14)$$

$$n' = \frac{v - v_0}{v} \times n \quad (15)$$

$$n' = \frac{v - v_0}{v - v_s} \times n \quad (16)$$

$$n' = \frac{v \pm v_w - v_0}{v \pm v_w - v_s} \quad (17)$$

উল্লেখ্য ঃ নিম্ন, উচ্চ, অজ্ঞাত যে কোন তাপমাত্রার ক্ষেত্রে সমীকরণ (5) প্রযোজ্য। তবে সাধারণ তাপমাত্রার ক্ষেত্রে সমীকরণ (6) বা (7) প্রযোজ্য।

সমাধানকৃত উদাহরণ

১। একমুখ খোলা একটি নলের ভেতরে আবদ্ধ বায়ুস্তম্ভকে 356 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট সুর শলাকা দ্বারা শব্দায়িত করলে যদি অনুনাদ সংঘটিত হয় তবে ঐ বায়ুস্তম্ভের সম্ভাব্য ন্যূনতম দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [বায়ুতে শব্দের বেগ 340 ms^{-1}।]

মনে করি বায়ুস্তম্ভের সম্ভাব্য ন্যূনতম দৈর্ঘ্য $= l$

আমরা পাই, $v = 4nl$ (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই, $l = \frac{v}{4n} = \frac{340\ ms^{-1}}{4 \times 356\ Hz}$
$= 0.2388\ m$

এখানে,
$n = 356\ Hz$
$v = 340\ ms^{-1}$

P.√

২। আলো দেখার 10 sec পরে বজ্র নির্ঘোষের শব্দ শোনা গেল। মেঘের দূরত্ব যদি 1650 m এবং 0°C তাপমাত্রায় শব্দের দ্রুতি 332 ms^{-1} হয়, তবে ঐ সময়কার তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$s = v_t \times$ ব্যয়িত সময় (1)

আবার, $v_t = v_0 (1 + 0.00183t)$ (2)

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$s = v_0 (1 + 0.00183t) \times$ ব্যয়িত সময়

বা, $1650 = 332 \times (1 + 0.00183t) \times 10$

বা, $1 + 0.00183t = \frac{165}{332}$

বা, $0.00183t = \frac{165}{332} - 1 = -0.503$

$t = -\frac{0.503}{0.00183} = -274.9°C$

এখানে,
শব্দের দ্রুতি, $v_0 = 332\ ms^{-1}$
মেঘের দূরত্ব, $s = 1650\ m$
ব্যয়িত সময় = 10 sec
তাপমাত্রা, $t = ?$

2√

৩। 261 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুরশলাকাকে আঘাত করে অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের নিকটে ধরলে বাতাসের 0·30 m এবং 0·94 m দৈর্ঘ্যের অনুনাদ পাওয়া গেল। শব্দের দ্রুতি ও প্রান্ত সংশোধন বের কর।
[রা. বো. ২০০৬, ২০০৩ ; কু. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$v = 2n (l_2 - l_1)$
$= 2 \times 261 \times (0.94 - 0.30)$
$= 334.08\ ms^{-1}$

আবার, $v = 4n(l_1 + x)$

$334.08 = 4 \times 261\ (0.30 + x)$

$0.30 + x = \frac{334.08}{4 \times 261}$

বা, $x = 0.32 - 0.30$
$= 0.02$

এখানে,
$l_1 = 0.30\ m$
$l_2 = 0.94\ m$
$n = 261\ Hz$

P.√

৪। 512 Hz কম্পনাঙ্কের একটি সুরশলাকাকে আঘাত করে একটি অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের নিকট ধারায় বাতাসের 0.15 m দৈর্ঘ্যের প্রথম অনুনাদ পাওয়া গেল। বাতাসে শব্দের দ্রুতি 350 ms^{-1} হলে নলের ব্যাস কত ?
[চ. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$v = 4n\ (l + x)$

বা, $v = 4n(l + 0.3\ d)$

$350 = 4 \times 512\ (0.15 + 0.3 \times d)$

বা, $\frac{350}{2048} = (0.15 + 0.3d)$

বা, $0.1709 = 0.15 + 0.3d$

বা, $0.3d = 0.1709 - 0.15 = 0.0209$

$d = 0.07m$

এখানে,
$n = 512\ Hz$
$l_1 = 0.15\ m$
$v = 350\ ms^{-1}$
$d = ?$

৫। 272 Hz কম্পাঙ্কের একটি সুর শলাকাকে কম্পিত করে অনুনাদী নলের খোলা মুখের নিকটে ধরলে বায়ুস্তরের 0·31 m এবং 0·95 m দৈর্ঘ্যে অনুনাদ পাওয়া যায়, বাতাসে শব্দের বেগ এবং প্রান্ত শুদ্ধি নির্ণয় কর।
[চ. বো. ২০০৬ ; য. বো. ২০০৫, ২০০৪; ব. বো. ২০০৩]

এখানে,
$n = 272$ Hz
$l_1 = 0·31$ m
$l_2 = 0·95$ m
$v = ?$
$x = ?$

মনে করি, শব্দের বেগ $= v$
এবং প্রান্ত শুদ্ধি $= x$
আমরা জানি, $v = 2n(l_2 - l_1)$ এবং $v = 4n\ (l_1 + x)$

$$x = \frac{v}{4n} - l_1$$

এখন, $v = 2n\ (l_2 - l_1)$
$= 2 \times 272 \times (0·95 - 0·31)$
$= 2 \times 272 \times 0·64\ \text{ms}^{-1}$
$= 348·16\ \text{ms}^{-1}$

আবার, $x = \frac{v}{4n} - l_1 = \frac{348·16\ \text{ms}^{-1}}{4 \times 272\ \text{s}^{-1}} - 0·31$ m
$= (0·32 - 0·31)$ m
$= 0·01$ m

৬। একটি কম্পমান সুরেলী কাটাকে একটি অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের নিকট ধরায় বায়ুস্তম্ভের 16 cm ও 48·5 cm দৈর্ঘ্যে যথাক্রমে ১ম ও ২য় অনুনাদ পাওয়া গেল। প্রান্ত সংশোধন বের কর। [সি. বো. ২০০৬]

এখানে,
$l_1 = 16$ cm
$l_2 = 48·5$ cm
$x = ?$

আমরা জানি,

$v = 2n\ (l_2 - l_1)$ (1)

এবং $v = 4n\ (l_1 + x)$ (2)

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,
$2n\ (l_2 - l_1) = 4n\ (l_1 + x)$
বা, $l_2 - l_1 = 2\ (l_1 + x)$
বা, $2l_1 + 2x = l_2 - l_1$
বা, $2x = l_2 - l_1 - 2l_1 = l_2 - 3l_1$
বা, $x = \frac{l_2 - 3l_1}{2} = \frac{48·5 - 3 \times 16}{2}$
$= \frac{0·5}{2}$
$= 0·25$ cm

৭। 512Hz কম্পাঙ্কের কোন সুর শলাকাকে একটি অনুনাদী নলের খোলা মুখের কাছে কাঁপালে বায়ুস্তম্ভের 0.16m ও 0.485m দৈর্ঘ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদ পাওয়া যায়। বায়ুতে শব্দের বেগ এবং প্রান্ত সংশোধন নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০০৫]

$l_1 = 0·16$ m
$l_2 = 0·485$ m
$n = 512$ Hz
$x = ?$

আমরা জানি,
$v = 2n\ (l_2 - l_1)$
$= 2 \times 512\ (0·485 - 0·16)$
$= 332·8\ \text{ms}^{-1}$
আবার, $v = 4n\ (l_1 + x)$

$\Rightarrow\ l_1 + x = \frac{v}{4n}$

$x = \frac{v}{4n} - l_1$
$= \frac{332·8}{4 \times 512} - 0·16$
$= \frac{332·8}{2048} - 0·16$
$= 0·1625 - 0·16$
$= 0·0025$

৮। ইস্পাতের ঘনত্ব $7{\cdot}8 \times 10^3$ kg m^{-3} এবং ইয়ং-এর স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক 2×10^{11} Nm^{-2}। ইস্পাতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

মনে করি ইস্পাতে শব্দের বেগ $= v$

আমরা পাই, $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ (1)

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 10^{11}\ \text{Nm}^{-2}}{7{\cdot}8 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}}} = 5064\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
$\rho = 7{\cdot}8 \times 10^3$ kg m^{-3}
$Y = 2 \times 10^{11}$ Nm^{-2}

৯। কোন এক দিন বায়ুতে শব্দের বেগ 340 ms^{-1} এবং বায়ুর ঘনত্ব $1{\cdot}22$ kg m^{-3}। যদি $\gamma = 1{\cdot}41$ হয় তবে ঐ দিনে বায়ুমণ্ডলের চাপ নির্ণয় কর। [পারদের ঘনত্ব $= 13{\cdot}6 \times 10^3$ kg m^{-3} ও $g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}।]

মনে করি বায়ুমণ্ডলের চাপ $= P$ এবং পারদ উচ্চতায় এই চাপ h-এর সমান।

তাহলে $P = h\rho_m g$

আমরা পাই, $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

$v = \sqrt{\frac{\gamma \times h\rho_m g}{\rho}}$ (1)

$h = \frac{v^2 \times \rho}{\gamma \rho_m g}$

$$= \frac{(340\ \text{ms}^{-1})^2 \times 1{\cdot}22\ \text{kg m}^{-3}}{1{\cdot}41 \times 13{\cdot}6 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3} \times 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}} = \frac{340 \times 340 \times 1{\cdot}22}{1{\cdot}41 \times 13{\cdot}6 \times 10^3 \times 9{\cdot}8}\ \text{m} = 0{\cdot}75\ \text{m}$$

এখানে,
$\gamma = 1{\cdot}41$
$v = 340$ ms^{-1}
$\rho = 1{\cdot}22$ kg m^{-3}
$\rho_m = 13{\cdot}6 \times 10^3$ kg^{-3}
$g = 9{\cdot}8$ ms^{-2}

১০। কত তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগ 0°C তাপমাত্রার বেগের দ্বিগুণ হবে ? [কু. বো. ২০০৫; ব. বো. ২০০১]

মনে করি নির্ণেয় তাপমাত্রা $= t$°C

আমরা পাই, $v_t = v_0\sqrt{(1 + \alpha t)}$

$2v_0 = v_0\sqrt{(1 + \alpha t)}$

বা, $4 = 1 + \alpha t$

$t = \frac{3}{\alpha} = \frac{3}{\frac{1}{273}/°\text{C}} = 3 \times 273$°C

$= 819$°C

এখানে
$v_t = 2v_0$
$\alpha = \frac{1}{273}/\text{K} = \frac{1}{273}/°\text{C}$

১১। কত তাপমাত্রায় বাতাসে শব্দের বেগ 0°C তাপমাত্রায় শব্দের বেগের 3 গুণ হবে ? $\left[\alpha = \frac{1}{273}/°\text{C}\right]$

[ঢা. বো. ২০০৫]

মনে করি, নির্ণেয় তাপমাত্রা $= t$°C

আমরা পাই,

$v_t = v_0\sqrt{(1 + \alpha t)}$

বা, $3v_0 = v_0\sqrt{(1 + \alpha t)}$

বা, $3 = \sqrt{1 + \alpha t}$

বা, $9 = 1 + \alpha t$

বা, $8 = \alpha t$

$t = \frac{8}{\alpha} = \frac{8}{\frac{1}{273}/°\text{C}}$

$= 8 \times 273$

$= 2184$°C

এখানে,
$v_t = 3v_0$
$\alpha = \frac{1}{273}$ /K
$= \frac{1}{273}$ /°C

$\left[\frac{8}{\alpha}\right]$

Q.

১২। একটি সুর শলাকার কম্পাঙ্ক 700 Hz। বায়ুর তাপমাত্রা 30°C হলে 100 কম্পনে শব্দ কত দূর অতিক্রম করবে ? 0°C তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগ 332 ms^{-1}। [সি. বো. ২০০৫]

মনে করি, 30°C তাপমাত্রায় শব্দের বেগ v_t।

আমরা জানি,

$$v_t = v_0(1 + 0.00183t)$$
$$= 332 \times (1 + 0.00183 \times 30)$$
$$= 350.22\ ms^{-1}$$

এখানে,

0°C তাপমাত্রায় শব্দের বেগ, $v_0 = 332\ ms^{-1}$

তাপমাত্রা, $t = 30°C$

$v_t = ?$

আবার, অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = N\lambda$

বা, $s = N\dfrac{v_t}{n}$ $[\ n\lambda = v]$

$$s = 100 \times \frac{350.22}{700}$$
$$= 50.03\ m$$

এখানে,

কম্পাঙ্ক, $n = 700$ Hz

$v_t = 350.22 ms^{-1}$

কম্পান সংখ্যা, N = 100

অতিক্রান্ত দূরত্ব, $s = ?$

2.

১৩। NTP-তে শব্দের বেগ 332 ms^{-1} হলে 50°C ও 70 cm পারদ চাপে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৪]

আমরা জানি,

$$v_t = v_0\left(1 + \frac{t}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$

বা, $$v_t = 332 \times \left(1 + \frac{323}{273}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 490.55\ ms^{-1}$$

এখানে,

$t = (50 + 273)$ K = 323K

$v_0 = 332\ ms^{-1}$

$v_t = ?$

শব্দের বেগের উপর চাপের প্রভাবে নেই।

সুতরাং শব্দের বেগ = 490.55 ms^{-1}

2.

১৪। আলো দেখার 5.5 s পরে বজ্রনির্ঘোষের শব্দ শোনা গেল। বায়ুর তাপমাত্রা 20°C হলে মেঘের দূরত্ব বের কর। [0°C-এ বায়ুতে শব্দের বেগ 332 ms^{-1} এবং প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রা বৃদ্ধিতে বায়ুতে শব্দের বেগ বৃদ্ধি = 0.61 ms^{-1}]

মনে করি মেঘের দূরত্ব = s

আমরা পাই, $s = v_t \times$ ব্যয়িত সময়

$s = v_t \times$ ব্যয়িত সময়

$= 344\ ms^{-1} \times 5.5\ s$

$= 1892$ m

এখানে, ব্যয়িত সময় = 5.5 s

v_t = 20°C তাপমাত্রায় শব্দের বেগ

$= (v_0 + 0.61 \times t)$

$= 332\ ms^{-1} + 0.61\ ms^{-1}\ °C^{-1} \times 20°C$

$= 344\ ms^{-1}$

১৫। স্বাভাবিক চাপ ও তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগ 330 ms^{-1} ধরে হাইড্রোজেনে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।
[1 লিটার হাইড্রোজেনের ভর = 0.0896×10^{-3} kg ও বায়ুর ভর = 1.293×10^{-3} kg]

ধরি বায়ুতে ও হাইড্রোজেনে শব্দের বেগ যথাক্রমে v_a ও v_h

তা হলে $v = \sqrt{\dfrac{\gamma P}{\rho}}$ সমীকরণ অনুসরণে লেখা যায়,

$$v_a = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_a}} \text{ ও } v_h = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_h}}$$

$$\frac{v_h}{v_a} = \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_h}} \qquad (1)$$

সমীকরণ (1) অনুযায়ী,

$$v_h = v_a \times \sqrt{\frac{\rho_a}{\rho_h}}$$

এখানে, $v_a = 330\ ms^{-1}$,

হাইড্রোজেনের ঘনত্ব,

$$\rho_h = \frac{\text{ভর}}{\text{আয়তন}} = \frac{0.0896 \times 10^{-3}\ kg}{1 \times 10^{-3}\ m^3}$$
$$= 0.0896\ kg\ m^{-3}$$

বায়ুর ঘনত্ব,

$$\rho_a = \frac{1.293 \times 10^{-3}\ kg}{1 \times 10^{-3}}$$
$$= 1.293\ kgm^{-3}$$

$$= 330\ ms^{-1} \times \sqrt{\frac{1.293\ kg\ m^{-3}}{0.0896\ kg\ m^{-3}}} = 330\ ms^{-1} \times 3.7988 = 1253\ ms^{-1}$$

১৬। 78·4m গভীর কূপে একখণ্ড পাথর ফেলা হল এবং 4·23 s পর পানিতে এর আঘাতের শব্দ শোনা গেল। যদি অভিকর্ষীয় ত্বরণ $g = 9·8\ ms^{-2}$ হয় তবে বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

ধরি t সেকেন্ডে পাথরটি $h = 78·4$ m পথ অতিক্রম করে কূপের পানিতে পড়ে। অতএব পড়ন্ত বস্তুর সমীকরণ হতে আমরা পাই, $h = \frac{1}{2}gt^2$

$$78·4 = \frac{1}{2} \times 9·8 \times t^2$$

বা, $t = \sqrt{\frac{2 \times 78·4}{9·8}} = 4\ s$

সুতরাং কূপের নিচ হতে শব্দের কূপের মুখে আসতে ব্যয়িত সময় $= (4·23 - 4)s = 0·23\ s$

কাজেই বায়ুতে শব্দের বেগ, $v = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{78·4\ m}{0·23\ s} = 340·87\ ms^{-1}$

১৭। দেখাও যে, উৎস যদি স্থির শ্রোতা থেকে শব্দের দ্রুতিতে সরে যায়, তবে শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্ক অর্ধেক হয়।
[রা. বো. ২০০৫ ; য. বো. ২০০১]

আমরা জানি,

$$n' = \frac{v - v_0}{v - v_s} n$$

$$n' = \frac{v}{v + v} n \quad [\text{ উৎস স্রোতা থেকে দূরে যায় তাই } v_s = -v\ ]$$

$$= \frac{1}{2} n \ \text{(প্রমাণিত)}$$

এখানে,
$v_0 = 0$
$v_s = -v$

১৮। যদি শ্রোতা স্থির উৎসের দিকে শব্দের বেগে অগ্রসর হয় তবে দেখাও যে, শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্ক দ্বিগুণ হবে।
মনে করি শব্দের বেগ = v, শ্রোতার বেগ = v_0 ও
উৎস হতে উৎপন্ন শব্দের কম্পাঙ্ক = n

আমরা পাই, শ্রোতা স্থির উৎসের দিকে অগ্রসর হলে শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্ক,

$$n' = \frac{v + v_0}{v} \times n \qquad (1)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই, $n' = \frac{v + v}{v} \times n = 2n$

এখানে, $v = v_0$

অর্থাৎ শ্রোতা স্থির উৎসের দিকে শব্দের বেগে অগ্রসর হলে, শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্ক দ্বিগুণ হয় (প্রমাণিত)।

১৯। এক ব্যক্তি বাঁশি বাজিয়ে 600Hz কম্পাঙ্কের ধ্বনি উৎপন্ন করছে। ঘণ্টায় 16km বেগে একজন সাইকেল আরোহী তাকে অতিক্রম করে গেল। অতিক্রম করার পূর্বে ও পরে ঐ ধ্বনির আপাত কম্পাঙ্ক তার নিকট কিরূপ মনে হবে? [শব্দের দ্রুতি = 300 ms⁻¹]

আমরা জানি,
যখন শ্রোতা উৎসের দিকে অগ্রসর হয় তখন আপাত কম্পাঙ্ক

$$n' = n\ \frac{(v + v_0)}{v}$$

$$n' = 600 \times \frac{(300 + 4·44)}{300}$$

$$= 609\ Hz$$

এখানে,
কম্পাঙ্ক, $n = 600$ Hz
সাইকেলের দ্রুতি, $v_0 = 16\ kmh^{-1}$
$= \frac{16 \times 1000}{60 \times 60}$
$= 4·44\ ms^{-1}$
শব্দের দ্রুতি, $v = 300\ ms^{-1}$

আবার, যখন শ্রোতা উৎস অতিক্রম করে দূরে সরে যায় তখন আপাত কম্পাঙ্ক

$$n' = n\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$$

$$n' = 600 \times \left(\frac{300 - 4·44}{300}\right) = 600 \times 0·985 = 591Hz$$

উত্তর ঃ 609 Hz 591 Hz

২০। একটি ট্রেন বাঁশি বাজাতে বাজাতে একটি প্লাটফর্মের দিকে 90 km h^{-1} বেগে অগ্রসর হচ্ছে। বাঁশির কম্পাঙ্ক 600 Hz এবং শব্দের দ্রুতি 325 ms^{-1} হলে প্লাটফর্মে দাঁড়ানো কোন শ্রোতার কানে এ শব্দের আপাত কম্পাঙ্ক কত মনে হবে ? [ব. বো. ২০০৬ ; ঢা. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; চ. বো. ২০০০]

মনে করি, আপাত কম্পাঙ্ক $= n'$

আমরা পাই, $n' = \dfrac{v}{v - v_s} \times n$ (1)

সমীকরণ (1) হতে আমরা পাই,

$$n' = \frac{325}{325 - 25} \times 600 \text{ Hz}$$
$$= 650 \text{ Hz}$$

দেয়া আছে,

$v = 325 \text{ ms}^{-1}$

$v_s = 90 \text{ kmh}^{-1} = \dfrac{90 \times 1000}{60 \times 60}$

$= 25 \text{ ms}^{-1}$

$n = 600 \text{ Hz}$

$n' = ?$

২১। 90 kmh^{-1} বেগে প্লাটফর্মের দিকে গতিশীল একটি ট্রেন 500 Hz কম্পাঙ্কের হুইসেল বাজাল। শব্দের দ্রুতি 325 ms^{-1} হলে প্লাটফর্ম থেকে ঐ হুইসেলের কম্পাঙ্ক কত মনে হবে ? [সি. বো. ২০০৫]

মনে করি কম্পাঙ্ক $= n'$

আমরা পাই,

$n' = \dfrac{v}{v - v_s} \times n$ (1)

এখন (1) হতে পাই,

$$n' = \frac{325}{325 - 25} \times 500$$
$$= 541{\cdot}6 \text{ Hz}$$

নির্ণেয় কম্পাঙ্ক $= 541{\cdot}6$ Hz

এখানে,

$v = 325 \text{ ms}^{-1}$

$v_s = 90 \text{ kmh}^{-1} = \dfrac{90 \times 1000}{60 \times 60}$

$= 25 \text{ ms}^{-1}$

$n = 500$ Hz.

২২। একটি ট্রেন 81 km/hr বেগে একজন দণ্ডায়মান পর্যবেক্ষককে অতিক্রম করে চলে গেল। ট্রেনটি ক্রমাগত 200 Hz কম্পাঙ্কের হুইসেল বাজাতে থাকলে, ট্রেনটি পর্যবেক্ষককে অতিক্রম করে চলে যাবার সময় শ্রুত হুইসেলের কম্পাঙ্ক কত হবে ? [সি. বো. ২০০৩]

আমরা জানি,

$$n' = \frac{v}{v + v_s} n$$

বা, $n' = \dfrac{330}{330 + 22{\cdot}5} \times 200$

$n' = 187$ Hz

এখানে,

$v = 330 \text{ ms}^{-1}$

$v_s = 81$ km/hr

$= \dfrac{81 \times 1000}{1 \times 60 \times 60}$

$= 22{\cdot}5 \text{ ms}^{-1}$

$n = 200$ Hz

$n' = ?$

২৩। দুটি ট্রেন যথাক্রমে 50 km/hr এবং 40 km/ hr বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হচ্ছে। প্রথম ট্রেনটির ড্রাইভার 600 Hz কম্পাঙ্কের হুইসেল বাজান। ট্রেন দুটি পরস্পরকে অতিক্রম করার পূর্বে ও পরে দ্বিতীয় ট্রেনটির কোন যাত্রীর নিকট ঐ হুইসেলের কম্পাঙ্ক কত মনে হবে ? [শব্দের বেগ = 332ms^{-1}]

(ক) ট্রেন দুটি পরস্পরকে অতিক্রম করার পূর্বে শব্দের উৎস শ্রোতার দিকে অগ্রসর হচ্ছে বলে আপাত কম্পাঙ্ক

$$n' = n\frac{v}{v - v_s}$$

১ম ট্রেনটির বেগ, $v_s = 50\text{km/hr} = 13{\cdot}89\text{ms}^{-1}$

২য় ট্রেনটির বেগ, $v_0 = 40\text{km/hr} = 11{\cdot}11\text{ms}^{-1}$

শব্দের বেগ, $v = 332\text{ms}^{-1}$

হুইসেলের কম্পাঙ্ক, $n = 600\text{Hz}$

আবার, শ্রোতা উৎসের দিকে v_0 বেগে অগ্রসর হচ্ছে বলে চূড়ান্ত আপাত কম্পাঙ্ক

$$n'' = n' \times \frac{v + v_0}{v} = n\,\frac{v}{v - v_s} \times \frac{v + v_0}{v} = n\,\frac{v + v_0}{v - v_s}$$

$$n'' = 600 \times \left[\frac{(332 + 11{\cdot}11)}{332 - 13{\cdot}89}\right] \text{Hz} = 647 \text{ Hz}$$

(খ) ট্রেন দুটি পরস্পরকে অতিক্রম করার পর শব্দের উৎস শ্রোতা হতে দূরে সরে যাচ্ছে এবং শ্রোতাও উৎস হতে v বেগে দূরে সরে যাচ্ছে, অতএব চূড়ান্ত আপাত কম্পাঙ্ক

$$n'' = n\,\frac{v - v_0}{v + v_s}$$

$$n'' = 600 \times \left(\frac{332 - 11.11}{332 + 13.89}\right) \text{Hz} = 557\text{Hz}$$

উত্তর ঃ 647Hz : 557Hz

২৪। পানির নিচে একটি সাবমেরিন স্থির অবস্থানে রয়েছে। একটি চলন্ত জাহাজ হতে আগত শব্দ চিহ্নিত করল। জাহাজ হতে নির্গত শব্দের কম্পাঙ্ক অপেক্ষা 1.0032 গুণ বেশি কম্পাঙ্কের শব্দ সাবমেরিনে ধরা পড়লে জাহাজের বেগ নির্ণয় কর। [পানিতে শব্দের বেগ 1470 ms^{-1}]

পানিতে শব্দের বেগ, $v = 1470\ \text{ms}^{-1}$
জাহাজের বেগ, $v_s = ?$
$\frac{n'}{n} = 1.0032$

যেহেতু সাবমেরিন বেশি কম্পাঙ্কের শব্দ চিহ্নিত করছে ; সুতরাং জাহাজটি সাবমেরিনের দিকে এগিয়ে আসছে। অর্থাৎ উৎস শ্রোতার দিকে আসছে। অতএব, আপাত কম্পাঙ্ক, $n' = n\,\frac{v}{v - v_s}$

বা, $\frac{n'}{n} = \frac{v}{v - v_s}$

$1.0032 = \frac{1470}{1470 - v_s}$

বা, $1470 - v_s = \frac{1470}{1.0032}$

বা, $v_s = 1470 - \frac{1470}{1.0032} = 1470 - 1465 = 5\text{ms}^{-1}$

উত্তর ঃ 5 ms^{-1} -

২৫। একটি ইঞ্জিন স্থির দর্শক অতিক্রমকালে এর আপাত প্রতীয়মান কম্পাঙ্ক 6 ঃ 5 অনুপাতে পরিবর্তন হয়। যদি বাতাসে শব্দের বেগ 332 ms^{-1} হয় তবে ইঞ্জিনটির বেগ নির্ণয় কর। [ব. বো. ২০০৫ ; চ. বো. ২০০৪]

এখানে,
$\frac{n'_1}{n'_2} = 6:5$
$v = 332\text{ms}^{-1}$
$v_s = ?$

শ্রোতা ও উৎস উভয়ই গতিশীল হলে আমরা পাই,

$$n' = \left(\frac{v - v_0}{v - v_s}\right) n \quad \dots \quad (1)$$

উৎস যখন শ্রোতার দিকে গতিশীল তখন আপাত কম্পাঙ্ক,

$$n_1' = \left(\frac{v}{v - v_s}\right) n \quad (2)$$

আবার, উৎস শ্রোতা হতে সরে গেলে

আপাত কম্পাঙ্ক, $n_2' = \left(\frac{v}{v + v_s}\right) n \quad (3)$

সমীকরণ (2) ও (3) হতে পাই, $\frac{n_1'}{n_2'} = \frac{v + v_s}{v - v_s}$

$\frac{6}{5} = \frac{332 + v_s}{332 - v_s}$

বা, $332 \times 5 + 5v_s = 332 \times 6 - 6v_s$

বা, $6v_s + 5v_s = 332 \times 6 - 332 \times 5$

বা, $11v_s = 1992 - 1660 = 332$

বা, $v_s = \frac{332}{11} = 30.18\ \text{ms}^{-1}$

২৬। দুটি হর্ন বহন করে একটি মোটর গাড়ী 36kmhr^{-1} বেগে দণ্ডায়মান একজন পর্যবেক্ষকের দিকে ধাবিত হচ্ছে। হর্ণ দুটির শব্দের কম্পাঙ্কের পার্থক্য 320 Hz হলে পর্যবেক্ষক কর্তৃক শ্রুত দুটি শব্দের কম্পাঙ্কের পার্থক্য কত হবে ? বাতাসে শব্দের বেগ 350 ms^{-1}। [কু. বো. ২০০৬]

এখানে,
শব্দের বেগ, $v = 350\ \text{ms}^{-1}$
উৎসের বেগ, $v_s = 36\ \text{kmhr}^{-1}$
$= \frac{36 \times 1000}{60 \times 60} = 10\ \text{ms}^{-1}$
কম্পাঙ্কের পার্থক্য, $n = 320$ Hz
শ্রুত কম্পাঙ্কের পার্থক্য, $n' = ?$

আমরা জানি,

$$n' = \frac{v}{v - v_s} \times n$$

$$n' = \frac{350 \times 320}{350 - 10}$$

$$= \frac{350 \times 320}{340}$$

$$= 329.4\ \text{Hz}$$

২৭। প্রতি সেকেণ্ডে 200 চক্রের ডপলার পরিবর্তন উৎপন্ন করতে হলে, 1050 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট শব্দ উৎসকে কোন স্থির দর্শকের দিকে যে বেগে আগমন করতে হবে, তার হিসাব দাও। [বাতাসে শব্দের বেগ = 330 ms^{-1}]

এখানে দর্শক স্থির এবং উৎস দর্শকের সাপেক্ষে গতিশীল। [ঢা. বো. ২০০৪]

$$n' = n\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$$

বা, $1250 = 1050 \times \left[\frac{330}{330 - v_s}\right]$

বা, $25 = 21 \times \frac{330}{330 - v_s}$

বা, $25 \times 330 - 25 \times v_s = 330 \times 21$

বা, $25\, v_s = 8250 - 6930$

বা, $25\, v_s = 1320$

বা, $v_s = \frac{1320}{25}$

∴ $v_s = 52.8\ ms^{-1}$

এখানে,

$n = 1050$ Hz

$n' = n + 200$
$= 1050 + 200$
$= 1250$ Hz

$v = 330\ ms^{-1}$

$v_s = ?$

২৮। একটি ইঞ্জিন স্থির দর্শক অতিক্রমকালে এর হুইসেলের আপাত প্রতীয়মান কম্পাঙ্ক 6 ঃ 5 অনুপাতে পরিবর্তন হয়। যদি বাতাসে শব্দের বেগ 352 ms^{-1} হয়, তবে ইঞ্জিনের বেগ নির্ণয় কর।

[য. বো. ২০০৬ (মান ভিন্ন) ; রা. বো. ২০০৩]

আমরা পাই,

$$n' = \left(\frac{v}{v - v_s}\right)n$$

$$n'' = \left(\frac{v}{v + v_s}\right)n$$

$$\frac{n'}{n''} = \frac{v + v_s}{v - v_s}$$

বা, $\frac{6}{5} = \frac{352 + v_s}{352 - v_s}$

বা, $v_s = \frac{352\,(6 - 5)}{6 + 5}$

বা, $v_s = \frac{352}{11}$

$v_s = 32\ ms^{-1}$

এখানে,

$\frac{n'}{n''} = 6 ঃ 5$

$v = 352\ ms^{-1}$

$v_s = ?$

প্রশ্নমালা

সংক্ষিপ্ত-উত্তর প্রশ্ন ঃ

১। অনুনাদ বায়ু স্তম্ভ বলতে কি বুঝ ? [রা. বো. ২০০০ ; কু. বো. ২০০০]

২। প্রান্ত সংশোধন কি ? [ঢা. বো. ২০০৫ ; রা. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]

৩। প্রান্ত শুদ্ধি কিসের উপর নির্ভর করে ? [য. বো. ২০০৪]

৪। অনুনাদ বায়ু স্তম্ভ পদ্ধতিতে বেগ নির্ণয় পদ্ধতিতে প্রান্তীয় সংশোধন করতে হয় কেন ?

৫। অনুনাদ কাকে বলে ? [ঢা. বো. ২০০৪ ; য. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৪ ; রা. বো. ২০০৩]

৬। ডপলার প্রভাব কি ? [রা. বো. ২০০৪]

বা ডপলার ক্রিয়া কি ? [রা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০৫ ; সি. বো. ২০০৪, ২০০১; কু. বো. ২০০১; য. বো. ২০০৫, ২০০০]

৭। ডপলার সূত্রটি বিবৃত কর। [ঢা. বো. ২০০৩]

৮। ডপলার ক্রিয়া ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০৩, ২০০২ ; রা. বো. ২০০০ ; য. বো. ২০০২ ঢা. বো. ২০০০ ; চ. বো. ২০০০]

৯। বায়ুতে শব্দ সংক্রান্ত নিউটনের সূত্রটি লিখ। [কু. বো. ২০০৬, ২০০২, ২০০০; চ. বো. ২০০৪, ২০০২, ২০০০ ; সি. বো. ২০০৪, ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০১; ব. বো. ২০০৪, ২০০২ ; রা. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০০ ; রা. বো. ২০০১]

১০। হাবল-এর সূত্র বিবৃত কর।

১১। মহাবিশ্ব ক্রমশ সম্প্রসারিত হচ্ছে কিভাবে বুঝা গেল ?

রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। বায়ুতে শব্দের বেগ সম্পর্কিত নিউটনের সূত্রটি লিখ। ল্যাপ্লাস কেন এবং কিভাবে নিউটনের সূত্র সংশোধন করেন ? [সি. বো. ২০০৬ ; ব. বো. ২০০৬, ২০০৪, ২০০২ ; রা. বো. ২০০৬, ২০০২ ; চ. বো. ২০০৬, ২০০৪,২০০০; য. বো. ২০০৫, ২০০৩, ২০০০; ঢা. বো. ২০০৪ ; কু. বো. ২০০৪, ২০০০]

২। শব্দের বেগ সংক্রান্ত নিউটনের সূত্র কিভাবে ল্যাপ্লাস সংশোধন করেছেন বর্ণনা কর। [রা.বো.২০০৪; সি.বো. ২০০৪]

৩। শব্দের বেগের উপর তাপমাত্রার প্রভাব আলোচনা কর। [রা. বো. ২০০৫; চ. বো. ২০০৪, '০১; ব. বো. ২০০৪ ; সি. বো. ২০০৫ ; কু. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০৩, ২০০০]

৪। দেখাও যে, কোন গ্যাসীয় মাধ্যমে শব্দের বেগ তার পরম তাপমাত্রার বর্গমূলের সমানুপাতিক।
[ব. বো. ২০০৬; কু. বো. ২০০২, ২০০০ ; ঢা. বো. ২০০০, ২০০১, য. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]

৫। দেখাও যে, প্রতি ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রা বৃদ্ধির জন্য বাতাসে শব্দের বেগ 0·61m বৃদ্ধি পায়।

৬। শব্দের দ্রুতির উপর আর্দ্রতার প্রভাব ব্যাখ্যা কর। [কু. বো. ২০০৩ ; ব. বো. ২০০১]

৭। শব্দের বেগের উপর তাপমাত্রা ও আর্দ্রতার প্রভাব নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০২]

৮। **অনুনাদী বায়ু স্তম্ভ পদ্ধতিতে শব্দের বেগ নির্ণয়ের পরীক্ষা বর্ণনা কর।**
[ঢা. বো. ২০০৫, ২০০০; রা. বো. ২০০৪ ; চ. বো. ২০০৩ ; য. বো. ২০০২ ; সি. বো. ২০০১]

বা, বায়ুস্তম্ভের অনুনাদ পদ্ধতিতে কিভাবে শব্দের বেগ নির্ণয় করা যায় বর্ণনা কর।
[ব. বো. ২০০২ ; য. বো. ২০০০ ; চ. বো. ২০০০ ; কু. বো. ২০০১ ; রা. বো. ২০০০]

৯। প্রান্তীয় সংশোধন পরিহার করে কিরূপে অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ পদ্ধতিতে শব্দের বেগ নির্ণয় করা যায়?
[কু. বো. ২০০৬, ২০০৪ ; য. বো. ২০০৬]

১০। প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদের ক্ষেত্রে একমুখ বন্ধ নলের বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে l_1 ও l_2 হলে দেখাও যে, নিঃসৃত শব্দের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য $\lambda = 2(l_2 - l_1)$।

১১। দেখাও যে, পর পর দুটি অনুনাদী বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্যের পার্থক্য সৃষ্ট শব্দ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের অর্ধেকের সমান।

১২। শ্রোতা যদি গতিশীল উৎসের দিকে অগ্রসর হয় তাহলে শ্রুত কম্পাঙ্কের রাশিমালা প্রতিপাদন কর।
[রা. বো. ২০০২ ; কু. বো. ২০০২ ; ঢা. বো. ২০০৪]

১৩। কোন স্থির উৎসের দিকে গতিশীল শ্রোতা কর্তৃক শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্কের রাশিমালা প্রতিপাদন কর।
[রা. বো. ২০০৪, '০২ ; য. বো. ২০০৩ ; সি. বো. ২০০৩]

১৪। একটি শব্দের উৎস কোন স্থির শ্রোতার দিকে অগ্রসর হলে শ্রোতা কর্তৃক শ্রুত কম্পাঙ্কের রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [রা. বো. ২০০০ ; চ. বো. ২০০৩, '০১ ; ব. বো. ২০০৩]

বা, স্থির শ্রোতার দিকে শব্দের উৎস গতিশীল থাকলে শ্রোতা কর্তৃক শ্রুত শব্দের আপাত কম্পাঙ্কের রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [য. বো. ২০০৫; সি. বো. ২০০১; য. বো. ২০০০; চ. বো. ২০০৫]

১৫। একটি শব্দের উৎস কোন স্থির শ্রোতা থেকে দূরে যেতে থাকলে দেখাও যে শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্ক প্রকৃত কম্পাঙ্কের চেয়ে কম হয়। [কু. বো. ২০০১]

বা স্থির শ্রোতা হতে একটি শব্দের উৎস দূরে যেতে থাকলে শ্রোতা কর্তৃক শ্রুত আপাত কম্পাঙ্কের রাশিমালা প্রতিপাদন কর। [ব. বো. ২০০১]

১৬। আলোক তরঙ্গের ক্ষেত্রে ডপলার ক্রিয়া আলোচনা কর। উৎসের কম্পাঙ্ক এবং পরিমাণকৃত কম্পাঙ্কের সম্পর্ক লিখ।

গাণিতিক সমস্যাবলি ঃ

১। 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর শলাকাকে আঘাত করে অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের নিকটে ধরা হল। বায়ুতে শব্দের বেগ 332 ms^{-1} হলে, বায়ুস্তম্ভের কত দৈর্ঘ্যে প্রথম অনুনাদ ঘটবে বের কর। [উঃ 0·3242 m]

২। 250 Hz কম্পাঙ্কের একটি কম্পমান সুরেলী কাঁটা কোন কাচের নলে 0·33 m বায়ুস্তম্ভের সাথে প্রথম অনুনাদ সৃষ্টি করে। ঐ একই নলে বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য 1·005 m হলে সুরেলী কাঁটাটি পুনরায় অনুনাদ সৃষ্টি করে। নলের প্রান্ত সংশোধন নির্ণয় কর। [উঃ $7·5 \times 10^{-3}$ m]

৩। 332 Hz কম্পাঙ্কের একটি কম্পমান সুরেলী কাঁটাকে অনুনাদ বায়ুস্তম্ভ নলের মুখে ধরলে 0·238 m দৈর্ঘ্যে প্রথম অনুনাদ সৃষ্টি হয়। নলের ভেতরের ব্যাসার্ধ 0·02 m হলে বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 332 ms^{-1}]

৪। 256 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর শলাকাকে আঘাত করে 0·05 m ব্যাসবিশিষ্ট একটি অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের নিকটে ধরলে বায়ুস্তম্ভের 0·31 m দৈর্ঘ্যে প্রথম অনুনাদ পাওয়া গেল। বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। বায়ুস্তম্ভের দৈর্ঘ্য কত হলে দ্বিতীয় অনুনাদ পাওয়া যাবে ? [উঃ 332·8 ms^{-1} ও 0·96 m]

৫। 250Hz কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি সুর শলাকাকে আঘাত করে অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের নিকট ধরায় বায়ুতে 0·31m দৈর্ঘ্যে প্রথম অনুনাদ পাওয়া গেল। যদি বায়ুতে শব্দের বেগ 330ms^{-1} হয় তবে (ক) প্রান্ত সংশোধন নির্ণয় কর ; (খ) নলের খোলামুখ হতে কত উপরে সুস্পন্দ বিন্দু পাওয়া যাবে ? (গ) নলের ব্যাস কত ?
[উত্তর ঃ 0·02 m, এই প্রান্ত সংশোধনই নলের খোলা মুখ হতে সুস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব ; 0·067m]

৬। 612Hz কম্পাঙ্কে কোন সুর শলাকাকে একটি অনুনাদী নলের খোলা মুখের কাছে কাঁপালে বায়ু স্তম্ভের 0·36m এবং 0·525 m দৈর্ঘ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় অনুনাদ পাওয়া যায়। বায়ুতে শব্দের বেগ ও প্রান্ত সংশোধন নির্ণয় কর।
[ঢা. বো. ২০০৪] [উত্তর ঃ 201·96ms^{-1} ; — 0·2775m]

৭। এক মুখ খোলা 1m লম্বা একটি খাড়া কাচনল পানি দ্বারা পূর্ণ 660 Hz কম্পাঙ্ক বিশিষ্ট একটি সুর শলাকাকে নলের খোলা মুখের উপর ধরলে ও নলের তলদেশ হতে ধীরে ধীরে পানি নির্গত হলে নলের মধ্যে পানির তলের কোন্ কোন্ অবস্থানের জন্য অনুনাদ ঘটবে ? (বায়ুতে শব্দের বেগ = 330ms^{-1}) [উত্তর ঃ 0·125m ; 0·375m ; 0·625m ; 0·875m]

৮। 384 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর শলাকাকে আঘাত করে একটি অনুনাদী নলের উন্মুক্ত প্রান্তের উপরে ধরায় নলের 0·21 m দীর্ঘ বায়ুস্তম্ভের জন্য প্রথম অনুনাদ পাওয়া যায়। বায়ুতে শব্দের বেগ 345·6 ms^{-1} হলে নলের খোলামুখ হতে কত উপরে সুস্পন্দ বিন্দু উৎপন্ন হবে ? [উঃ 15×10^{-3} m]

৯। একটি দুই মুখ নল আংশিকভাবে পানিতে খাড়াভাবে ডুবান আছে। নলের উপরের খোলা মুখের নিকটে 360 Hz কম্পাঙ্কের একটি কম্পমান সুরেলী কাঁটা ধরলে প্রথম অনুনাদ সৃষ্টি হয়। বায়ুতে শব্দের বেগ 332 ms^{-1} হলে পানির উপর নলের দৈর্ঘ্য কত ? [নলটির অন্তর্ব্যাস 0·04 m] [উঃ 0·219 m]

১০। একমুখ খোলা 1 m লম্বা একটি কাচনল পানিতে পূর্ণ আছে। 360 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট একটি সুর শলাকাকে নলের খোলা মুখের উপরে ধরলে এবং নলের তলদেশ হতে ধীরে ধীরে পানি নির্গত হতে দিলে নলের মধ্যে পানির তলের কোন্ কোন্ অবস্থানের জন্য অনুনাদ ঘটবে ? [বায়ুতে শব্দের বেগ 330 ms^{-1}])

১১। একটি কম্পমান সুরেলী কাঁটা প্রথমে কোন কাচনলের 0·31 m বায়ুস্তম্ভের সাথে অনুনাদ সৃষ্টি করে। প্রান্ত সংশোধন নির্ণয় কর। [উঃ 0·0275 m]

১২। কোন কেল্লা হতে নির্দিষ্ট সময়ে তোপধ্বনি করা হয়। কেল্লা হতে 10·2 km দূরে দাঁড়ানো একজন পর্যবেক্ষক তোপধ্বনি শুনে নিজের ঘড়ি মিলিয়ে নেয়। কিন্তু পরে কেল্লার ঘড়ির সাথে মিলিয়ে দেখেন যে ঘড়ি অর্ধ মিনিট স্লো হয়েছে। বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 340 ms^{-1}]

১৩। একটি তামার নলাকার দণ্ডের দৈর্ঘ্য 760 m, প্রস্থচ্ছেদ-ক্ষেত্রফল $15 \times 10^{-4}\ m^2$ ও ভর 10260 kg। তামার ভেতর শব্দের বেগ নির্ণয় কর। ঐ দণ্ডের এক মুখ হতে অপর মুখে যেতে শব্দের কত সময় লাগবে ? [তামার ক্ষেত্রে $Y = 1·2996 \times 10^{11}\ Nm^{-2}$] [উঃ 3800 ms^{-1} ও 0·2s]

১৪। 1050 m দীর্ঘ একটি ফাঁপা লোহার চোঙের এক মুখে শব্দ করে অপর মুখে 2·8 s সময়ের ব্যবধানে দুটি শব্দ শোনা গেল। বায়ুতে শব্দের বেগ 350 ms^{-1} হলে লোহার মধ্যে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 5250 ms^{-1}]

১৫। একটি নির্দিষ্ট আয়তনের পানির প্রতি বর্গ সেমি. ক্ষেত্রে 8·41 N চাপ বৃদ্ধিতে তার আয়তন 4×10^{-5} গুণ হ্রাস পায়। পানিতে শব্দের বেগ এবং 480 Hz কম্পাঙ্কের কোন সুরের তরঙ্গ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [উঃ 1450 ms^{-1} ; 3·02 m]

১৬। পানির আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক $2·25 \times 10^9\ Nm^{-2}$। পানিতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 1500 ms^{-1}]

১৭। পানিতে শব্দের বেগ 4°C-এ 1350 ms^{-1} ধরে পানির আয়তনের স্থিতিস্থাপক গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $1·8 \times 10^6\ Nm^{-2}$]

১৮। কোন কূপের মুখে একখণ্ড পাথর ছেড়ে দেওয়ায় খণ্ডটি কূপের পানির উপরিতলকে 39·2 ms^{-1} বেগে আঘাত করে। যদি আঘাতের শব্দ পাথর ফেলে দেয়ার 4·23 s পরে শোনা যায় তবে বায়ুতে শব্দের বেগ নির্ণয় কর। [উঃ 340·86 ms^{-1}]

১৯। বায়ুতে শব্দের বেগ 0°C-এ 330 ms^{-1} ও 27°C-এ তাপ 346·3 ms^{-1} হলে বায়ুর আয়তন প্রসারণ গুণাঙ্ক নির্ণয় কর। [উঃ $\frac{1}{273}$ /°C]

২০। কত ডিগ্রী সেলসিয়াস তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগ 0°C তাপমাত্রার বেগের 1·5 গুণ হবে ? [উত্তরঃ 341·25°C]

২১। কত তাপমাত্রায় বাতাসে শব্দের বেগ 0°C তাপমাত্রায় শব্দের বেগের 2·5 গুণ হবে ? [$\alpha = \frac{1}{273}$ /°C]

$T_2 = (n^2-1)T_1$ [উত্তর ঃ 1433·25°C]

২২। 27°C তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগ 346 ms^{-1} হলে 0°C তাপমাত্রায় বায়ুতে শব্দের বেগ বের কর। [α = 0·003665/K] [উঃ 330 ms^{-1}]

২৩। 774°C তাপমাত্রায় ও 2 বায়ুমণ্ডলীয় চাপে হিলিয়াম গ্যাসে শব্দের বেগ 1900 ms^{-1}, হিলিয়ামের ক্ষেত্রে γ-এর মান নির্ণয় কর। [হিলিয়ামের গ্রাম-আণবিক ভর = 4] [উঃ 1·66]

২৪। একটি সাইরেন হতে উদ্ভূত কম্পাঙ্ক 100 Hz। তোমার নিকট হতে সাইরেনটি 10 ms^{-1} বেগে সরে যেতে থাকলে তুমি যে শব্দ শুনবে তার কম্পাঙ্ক কত হবে ? [উঃ 97 Hz]

২৫। প্রতি সেকেণ্ডে 40 ডপলার পরিবর্তন উৎপন্ন করতে 1000 Hz কম্পাঙ্কবিশিষ্ট কোন স্থির শব্দ উৎসের দিকে একজন শ্রোতাকে কত বেগে অগ্রসর হতে হবে ? [উঃ 13·2 ms^{-1}]

২৬। প্রমাণ কর যে, যদি কোন স্থির পর্যবেক্ষক হতে শব্দের উৎস শব্দের বেগে দূরে সরে যেতে থাকে তবে শ্রুত শব্দের কম্পাঙ্ক অর্ধেক হয়।

২৭। একটি সাইরেন 1000 Hz কম্পাঙ্কের শব্দ উৎপন্ন করতে করতে 10 ms^{-1} বেগে একজন পর্যবেক্ষক হতে দূরে সরে গেল। পর্যবেক্ষক কত কম্পাঙ্কের শব্দ শুনতে পাবে ? [বায়ুতে শব্দের বেগ = 332ms^{-1}] [উত্তর ঃ 97·07 Hz]

২৮। একটি মোটর গাড়ি 40 km/hr বেগে চলতে চলতে একটি সাইরেনকে অতিক্রম করল। সাইরেনটি 500 Hz কম্পাঙ্কে বাজছে। একে অতিক্রম করার পূর্বে এবং পরে গাড়ির চালক কর্তৃক শ্রুত আপাত কম্পাঙ্ক কত হবে ? (শব্দের বেগ 332ms^{-1}) [উত্তর ঃ 516 Hz ; 483 Hz]

২৯। একটি ইঞ্জিন স্থির দর্শক অতিক্রমকালে এর হুইসেলের আপাত প্রতীয়মান কম্পাঙ্ক 6 : 5 অনুপাতে পরিবর্তন হয়। যদি বাতাসে শব্দের বেগ 352 ms^{-1} হয়। তবে ইঞ্জিনের বেগ নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০০৩] [উত্তর ঃ 32ms^{-1}]

৩০। একটি ইঞ্জিন স্থির দর্শক অতিক্রমকালে এর হুইসেলের আপাত প্রতীয়মান কম্পাঙ্ক 6 : 5 অনুপাতে পরিবর্তন হয়। যদি ইঞ্জিনের বেগ 32 ms^{-1} হয়। তবে শব্দের বেগ কত ? [য. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 352ms^{-1}]

৩১। একটি ট্রেন হুইসেল বাজাতে বাজাতে 80 km/hr বেগে একটি রেলস্টেশন পার হয়ে গেল। হুইসেলের কম্পাঙ্ক 450Hz। ট্রেনটি (ক) স্টেশনের দিকে আসার সময় এবং (খ) স্টেশন পার হয়ে যাওয়ার পর প্লাটফর্মে দাঁড়ানো কোন ব্যক্তির নিকট হুইসেলের আপাত কম্পাঙ্ক কত হবে ? [শব্দের বেগ 332 ms^{-1}] [উত্তর ঃ 482 Hz ; 422 Hz]

৩২। একটি ট্রেন 450 Hz কম্পাঙ্কের হুইসেল দিতে দিতে একটি প্লাটফরম থেকে 144 km/hr বেগে দূরে সরে যাচ্ছে। বায়ুতে শব্দের বেগ 332ms^{-1} হলে প্লাটফরমে দাঁড়ানো কোন শ্রোতার নিকট শ্রুত কম্পাঙ্ক কত হবে ? [ঢা. বো. ২০০৬] [উত্তর ঃ 401·6Hz]